Black-Scholes模型欧式买权的避险参数分析

张忠桢[1],马国东[1],赵郭陈[2]

(1.武汉理工大学 管理学院,湖北 武汉 430070;2.中央财经大学 金融系,北京 100000)

摘 要:观察 Black-Scholes 欧式买权模型可知,有 5 个变量的变动会影响欧式买权价值的变动,包括标的股价、履约价、无风险利率、到期日及标的股报酬率标准差。讨论当某一变量变动时,欧式买权价值的变动值及如何采用这些避险参数来规避实务中的风险。

关键词:欧式买权;避险参数;Delta;Gamma;Theta;Vega;Rho

中图分类号:F069.9 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-7348(2003)10-00-0

0 前言

经过近 30 年的发展,期权理论已趋向成熟,期权在实务中的应用也日趋频繁。虽然期权是一个很好的避险工具,但是我们应该看到期权的应用本身也会引发一定的风险,那么一个现实的问题就是:怎样降低由于期权的应用而引发的风险呢?虽然以前有过著作讨论这方面的问题,但都比较理论和零散。本文将从 Black-Scholes 期权定价模型出发,全面探讨期权的避险参数。

20 世纪 70 年代 Black and Scholes 得出了经典的欧式期权定价模型,模型采用如下假设:

(1)股价变动可由 Itŏ Process 代表:$dS=\mu Sdt+\sigma Sdw$。(μ 和 σ 是标的股票报酬率的期望值和标准差。)

(2)股票交易连续进行,且股票具有可分割性(即可交易任何比率的股票)。

(3)交易费用及税的不存在。

(4)可无限放空股票及充分利用放空得来的资金。

(5)无风险利率存在。

(6)标的股在衍生性商品的存续时间不分布现金股息。

得出的模型评价公式是:

$$C=SN(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$

其中:C 为欧式买权的期权价;S 为 0 时刻标的股的股价;$N(\cdot)$ 为标准正态分布函数;K 为期权和约的履约价;r 为无风险利率;T 为期权和约的到期日。

$$\tau=T-t$$

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

(注:文章后面字母的含义与上面所表示的一致)。

由 B-S 欧式买权评价模型可知,买权的价值是由 5 种变量决定的,包括标的股价(S)、履约价(K)、无风险利率(r)、到期日(T)和标的股报酬率标准差(σ)。下面让我们来讨论由这 5 个变量而引出的 5 个参数以及怎样运用其中的一些参数来进行套期保值。

1 Delta($\partial C/\partial S$)

它代表股价变动一单位时,造成买权价值的变量。根据定义

$$\text{Delta}=\frac{\partial C}{\partial S}=N(d_1)+S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\times\frac{\partial d_1}{\partial S}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\times\frac{\partial d_2}{\partial S}=N(d_1)>0$$

在实务中,通过对 Delta 的计算,可以调整期权交易者的期权头寸,从而使他们的有价证券组合在以后的短时间间隔内免受标的资产价格微小变动的影响。假设某看涨期权的 Delta 为 0.7,这意味着当股票价格变化一个小量 ΔS 时,该期权价格变化约 0.7 个 ΔS。假设该期权价格是$10,股票价格为$100。若某投资者出售了 50 份该股票看涨期权合约(50 份看涨期权可购买 5 000 股股票)。投资者可采用的保值方法就是买入 0.7×5 000=3 500 股股票。在期权头寸上的盈利(亏损)就可以由股票头寸上的损失(盈利)所抵消。图 1 是股票价格的波动所引起的 Delta 值的变化。

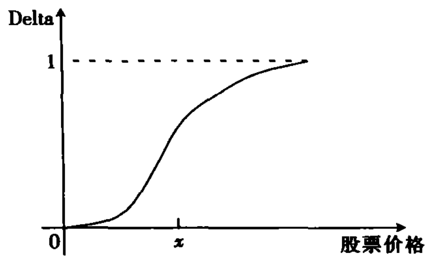

图 1

可是有一点应该明白,投资者的保值头寸保持 Delta 对冲状态只能维持一个相当短暂的时间,因为随股票价格的变化和时间的流逝,Delta 值也在不断的变化,在实务中,这种套期保值的头寸需要定期的调整,这种调整为再均衡。

收稿日期:2003-04-04

作者简介:张忠桢,武汉理工大学管理学院教授,博士生导师,研究方向为金融工程。

2 Gamma($\partial^2C/\partial S^2$)

Gamma 代表当股价等于 S 的价位时，买权价值线的弧度，也是 Delta 变动的敏感度，Gamma 愈大代表当股价变动时，Delta 的变动愈大，避险也就愈困难。根据定义：

$$\text{Gamma}=\frac{\partial^2C}{\partial S^2}=\frac{\partial}{\partial S}N(d_1)=\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\left(N(d_1)=\int_{-\infty}^{d_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt,N(d_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}\right)$$

当 Gamma 值很小时，Delta 变化缓慢，为保持 Delta 中性并不需要进行频繁的调整标的资产头寸，所以在实务中，投资者经常保持 Gamma 值的中性。

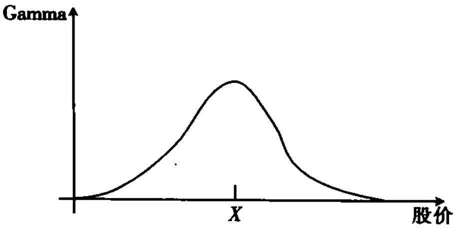

图 2

3 Theta($\partial C/\partial t$)

Theta 是在其他条件不变的情况下，一个证券组合的价值变化相对于时间变化的比率。有时也被称为有价证券组合的时间损耗。

$$\text{Theta}=\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial C}{\partial T}=-\left[\frac{S\sigma N(d_1)}{2\sqrt{\tau}}+Ke^{-r\tau}N(d_2)\right]<0$$

单个期权的 Theta 几乎总为负，因为当到期日临近时，期权的时间价值就变得越来越不值钱了，同时我们可以看出，Theta 与 Delta 和 Gamma 不是同一类型的保值参数。这是因为，虽然对于未来的股价存在着某些不确定性因素，而到期时间的减少却是毫无疑问的。因此我们不可能用对冲的保值方法消除时间变化对期权组合价值的影响。

下面讨论 Delta、Gamma、Theta 之间的关系。

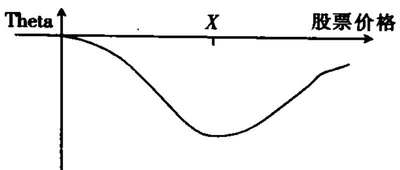

图 3

根据 Black-Scholes 期权模型，任何不付红利股票的衍生证券的价格 f 必须满足：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

由于 $\text{Theta}=\frac{\partial f}{\partial t}$，$\text{Delta}=\frac{\partial f}{\partial S}$，$\text{Gamma}=\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$

可得 $\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rf$

这个公式对基于不付红利股票的单种衍生证券和多个衍生证券组合都同样正确。

对于Delta 中性的组合，$\Delta=0$，并且：

$$\Theta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rf$$

这意味着当Theta 为正值并且很大时，Gamma 将会为负值，并且也很大；反之亦然。

4 Vega($\partial C/\partial\sigma$)

Vega 定义为有价证券组合的价值变化与标的资产波动率的比率。根据定义：

$$\text{Vega}=\frac{\partial C}{\partial\sigma}=S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial\sigma}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial\sigma}$$

$$=S\sqrt{\tau}N(d_1)>0$$

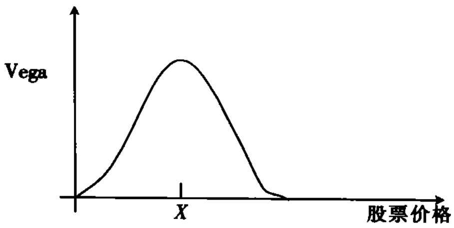

图 4

如果 Vega 很大，则证券组合的价值对波动率的变化就敏感，如果 Vega 很小，则波动率的变化就不怎么会影响证券组合的价值，比较容易对冲。投资者也经常在实务中采用中性化 Vega 的策略。

5 Rho($\partial C/\partial r$)

Rho 代表当利率变化时，对期权价格的影响。

$$\text{Rho}=\frac{\partial C}{\partial r}=S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial r}+K\tau e^{-r\tau}N(d_2)$$

$$-Ke^{-r\tau}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial r}=\tau Ke^{-r\tau}N(d_2)>0$$

因此，欧式买权的价值随着利率水准的上升(或下降)而上升(或下降)。

下面我们讨论一下Delta、Gamma、Theta 在实务中的应用：

考虑某个处于 Delta 中性状态的有价证券组合，Gamma 值为-2 000，Vega 值为-8 000。假设某个可交易期权的 Gamma 值为 0.4，Vega 值为 1.0，Delta 值为 0.5。如果购买 5 000 个可交易期权的多头头寸，则可使该组合达到 Gamma 中性状态，但同时 Delta 增加到了 2 500，这就要求出售 2 500 个标的资产以维持 Delta 中性状态。该证券组合的 Vega 值将从-8 000 变为-3 000。为了使得该组合处于 Gamma 中性和 Vega 中性状态，我们假设存在第二种可交易期权，Gamma 值为 0.5，Vega 值为 2.25，Delta 值为 0.6。如果 w_1，w_2 分别为证券组合中这两种可交易期权的数量，我们要求：

$$-2\,000+0.4w_1+0.5w_2=0$$

$$-8\,000+w_1+2.25w_2=0$$

求出：$w_1=1\,250$　$w_2=3\,000$

因此加入 1 250 份第一种可交易期权和 3 000 份第二种可交易期权将使得该组合处于 Gamma 中性和 Vega 中性状态。可是 Delta 将变成 2 425，所以需要卖出 2 425 份标的资产以保持 Delta 中性状态，如果算出来的交易数量是负值，那么说明要卖空同样数量的标的资产，交易策略同样有效。

4 结束语

本文涉及期权策略时采用的标的资产均用股票表示，但在实务中，选择外汇、期货等标的资产，也可以采用同样的策略方法。

参考文献：

[1][美]约翰·赫尔.期权、期货和衍生证券[M].张陶伟译.北京：华夏出版社，1997.

[2]陈松南.金融工程学[M].上海：复旦大学出版社，2002.

[3][美]约翰·马歇尔，维普尔·班塞尔.金融工程[M].宋逢明，朱宝宪，张陶伟译.北京：清华大学出版社，1998.

[4]陈松男.金融分析[M].上海：复旦大学出版社，2001.

(责任编辑：曙　光)