2005,**25A**(7):996–1003

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

非线性发展方程的 Jacobi 椭圆函数解 *

张辉群
(青岛大学数学系 266071)

摘要：借助齐次平衡原则，提出了一种新的构造非线性发展方程的 Jacobi 椭圆函数精确解的方法．并利用之得到了 KdV 方程， Boussinesq 方程， KGS 方程组的新形式 Jacobi 椭圆函数解.

关键词：齐次平衡原则； Jacobi 椭圆函数；扰动方程组.

MR(2000) 主题分类：35Q　**中图分类号**：O.175　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)07-996-08

1 引言

自 1834 年，英国科学家 Russell 发现水波中的孤立波现象以来，越来越多的著名的非线性发展方程被发现具有孤波解．在近 30 多年来，非线性数学物理研究领域颇具特色的成就之一就是创造了求非线性偏微分方程的解特别是孤波解的各种方法.

最近，出现了许多求非线性发展方程精确解的新方法，如：齐次平衡法 [1], 双曲正切函数展开法 [2], F - 展开法 [3], Jacobi 椭圆函数展开法 [4] 等．它们各自对于某一类方程求某一种形式的行波精确解是十分有效的．其中“ Jacobi 椭圆函数展开法”，“ F - 展开法”对于求非线性发展方程的 Jacobi 椭圆函数解是十分有效的.

本文依据它们提出了构造非线性发展方程 Jacobi 椭圆函数精确解的一种新思路．下面简单说明一下步骤．为求非线性发展方程行波精确解，首先，将它行波约化为常微分方程，再将常微分方程的解展开为关于两个待定函数 (比如 u, v) 的多项式 (同时利用齐次平衡原则 [5], 定出多项式的最高幂次)．令多项式中的两个待定函数，满足不同的“扰动方程组”(特别是 Jacobi 椭圆函数的形式)，从而可将常微分方程化为代数方程组．最后，可以借助像 Maple 或 Mathematica 这样的计算机代数系统有效地处理复杂而繁琐的代数计算，从而得到原方程的解.

在本文中，我们利用此种方法求解了 KdV 方程， Boussinesq 方程， KGS 方程组，不仅得到了大家所熟知的它们的 Jacobi 椭圆函数解，而且得到了它们的新形式的 Jacobi 椭圆函数解.

2 KdV 方程， Boussinesq 方程的新形式 Jacobi 椭圆函数解

著名的 KdV 方程 [6]

$$\Phi_t + \Phi\Phi_x + P\Phi_{xxx} = 0 \tag{1}$$

收稿日期：2003-11-21; 修订日期：2004-12-08
E-mail: hqzhangqd@yahoo.com.cn

是非线性波理论中的一个基本模型，它一直被作为研究孤立子现象的经典方程. 它首先从浅水波方程中得到，又在等离子体的等离子声波和磁流体动力学中发现，它是一种重要的数学物理模型.

方程 (1) 经行波约化

$$\Phi(x,t)=\Phi(\xi),\quad \xi=k(x-ct)+\xi_0, \tag{2}$$

其中 k 为波数， c 为波速， ξ_0 为任意常数.

得到

$$-c\Phi'+\Phi\Phi'+Pk^2\Phi'''=0. \tag{3}$$

将 (3) 式关于 ξ 积分一次，并取积分常数为零，得到

$$\Phi''+A\Phi+B\Phi^2=0, \tag{4}$$

其中 $A=-\dfrac{c}{Pk^2},B=\dfrac{1}{2Pk^2}$.

著名的 Boussinesq 方程

$$\Phi_{tt}-\lambda^2\Phi_{xx}-\mu\Phi_{xxxx}-\nu(\Phi^2)_{xx}=0 \tag{5}$$

经 (2) 式行波约化后，再关于 ξ 积分两次，并取积分常数为零，也得到了 (4) 式的形式. 其中 $A=\dfrac{\lambda^2-c^2}{\mu k^2},B=\dfrac{\nu}{\mu k^2}$.

下面，用“引言”中所述方法求解 (4) 式.

假设

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}a_iu^i+\sum_{i=1}^{n}b_ivu^{i-1}+c_0 \tag{6}$$

且 u,v 满足如下的“扰动方程组”

$$u'^2=v^2(v^2-m^2), \tag{7}$$

$$v'^2=u^2(v^2-m^2), \tag{8}$$

其中 $u=u(\xi),v=v(\xi)$ 为待定函数， a_i, $b_i(i=1\ldots n)$, c_0, n 为待定常数. m 为模数.

当 $m^2<1$ 时， (7) 、 (8) 式有特解

$$u=\frac{cn(\xi)}{sn(\xi)},\quad v=\frac{1}{sn(\xi)}.$$

由 (6) − (8) 式得到

$$\Phi''=2na_nu^{n+2}+\ldots, \tag{9}$$

$$\Phi^2=a_n^2u^{2n}+\ldots, \tag{10}$$

利用齐次平衡原则，得

$$n=2. \tag{11}$$

从而可设 Φ 具如下形式

$$\Phi=a_2u^2+a_1u+b_1v+b_2uv+c_0. \tag{12}$$

由 (12) 式得到

$$\Phi'' = 2a_2u'^2 + 2a_2uu'' + a_1u'' + b_1v'' + b_2u''v + 2b_2u'v' + b_2uv''. \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Phi^2 = {} & a_2^2u^4 + a_1^2u^2 + b_1^2v^2 + b_2^2u^2v^2 + c_0^2 \\ & +2a_1a_2u^3 + (2a_2b_1 + 2a_1b_2)u^2v + 2a_2b_2u^3v + 2a_2c_0u^2 \\ & +(2a_1b_1 + 2b_2c_0)uv + 2b_1b_2uv^2 + 2a_1c_0u + 2b_1c_0v,\end{aligned} \tag{14}$$

并且由 (7) – (8) 可得到如下关系

$$u'' = 2u^3 + (2 - m^2)u, \tag{15}$$

$$v'' = 2v^3 - (1 + m^2)v, \tag{16}$$

$$u'v' = uv(v^2 - m^2), \tag{17}$$

$$u^2 = v^2 - 1. \tag{18}$$

将 (7) – (8) 式代入 (13) 、 (14) 式，并利用 (15) – (18) 式进行化简，可得到

$$\begin{aligned}\Phi'' = {} & 6a_2u^4 + 6b_2u^3v + 2a_1u^3 + 2b_1u^2v + 4a_2(2 - m^2)u^2 \\ & +(5b_2 - 4b_2m^2)uv + a_1(2 - m^2)u + b_1(1 - m^2)v + 2a_2(1 - m^2).\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\Phi^2 = {} & (a_2^2 + b_2^2)u^4 + 2a_2b_2u^3v + 2(a_1a_2 + b_1b_2)u^3 \\ & +2(a_2b_1 + b_2a_1)u^2v + (2c_0a_2 + a_1^2 + b_2^2 + b_1^2)u^2 + 2(c_0b_2 + a_1b_1)uv \\ & +2(c_0a_1 + b_2b_1)u + 2c_0b_1v + c_0^2 + b_1^2.\end{aligned} \tag{20}$$

将 (12) 、 (19) 、 (20) 式代入 (4) 式，并分别令 $u^4, u^3, u^2, u, u^3v, u^2v, uv, v$ 的系数和常数项为零，得到关于 $a_i, b_i, (i = 1, 2), c_0$ 的代数方程组

$$6a_2 + B(a_2^2 + b_2^2) = 0, \tag{21}$$

$$6b_2 + B(2a_2b_2) = 0, \tag{22}$$

$$a_1 + B(a_1a_2 + b_1b_2) = 0, \tag{23}$$

$$b_1 + B(b_1a_2 + a_1b_2) = 0, \tag{24}$$

$$4a_2(2 - m^2) + B(2c_0a_2 + a_1^2 + b_2^2 + b_1^2) + Aa_2 = 0, \tag{25}$$

$$b_2(5 - 4m^2) + Ab_2 + 2B(c_0b_2 + a_1b_1) = 0, \tag{26}$$

$$a_1(2 - m^2) + Aa_1 + 2B(c_0a_1 + b_2b_1) = 0, \tag{27}$$

$$b_1(1 - m^2) + b_1A + 2Bc_0b_1 = 0, \tag{28}$$

$$2a_2(1 - m^2) + Ac_0 + B(c_0^2 + b_1^2) = 0. \tag{29}$$

利用计算机代数系统分析 (21) – (29) 式，得到如下一组解

$$a_2 = -\frac{3}{B}, \quad b_2 = \pm\frac{3}{B}, \quad c_0 = \frac{4m^2 - 5 - A}{2B}, \quad a_1 = b_1 = 0 \tag{30}$$

且

$$16m^4-16m^2+1-A^2=0, \tag{31}$$

由 (7) 、 (8) 、 (12) 、 (30) 式，我们得到了经行波约化后的方程 (4) 的 Jacobi 椭圆函数解

$$\Phi(\xi)=-\frac{3}{B}(\frac{cn\xi}{sn\xi})^2\pm\frac{3}{B}\frac{cn\xi}{sn^2\xi}+\frac{4m^2-5-A}{2B}, \tag{32}$$

其中 $16m^4-16m^2+1-A^2=0$，m 为模数．此为 KdV 方程、 Boussinesq 方程的新形式的 Jacobi 椭圆函数解.

特别地，当 $m^2\to 0$ 时，得到方程 (3) 的解为

$$\Phi(\xi)=-\frac{3}{B}\cot^2(\xi)\pm\frac{3}{B}\cot(\xi)\csc(\xi)-\frac{3}{B} \tag{33}$$

或

$$\Phi(\xi)=-\frac{3}{B}\cot^2(\xi)\pm\frac{3}{B}\cot(\xi)\csc(\xi)-\frac{2}{B}. \tag{34}$$

当 $m^2\to 1$ 时，得到方程 (3) 的另一类解为

$$\Phi(\xi)=-\frac{3}{B}\mathrm{csch}^2(\xi)\pm\frac{3}{B}\mathrm{csch}(\xi)\coth(\xi)-\frac{1}{B} \tag{35}$$

或

$$\Phi(\xi)=-\frac{3}{B}\mathrm{csch}^2(\xi)\pm\frac{3}{B}\mathrm{csch}(\xi)\coth(\xi). \tag{36}$$

3 耦合 KGS 方程组的新形式 Jacobi 椭圆函数解

耦合 Klein-Gordon-Schrödinger 方程组

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi+\frac{1}{2}\Delta\Psi=-\Phi\Psi,\quad t\in R, X\in R^3, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-\Delta\Phi+M^2\Phi=|\Psi|^2,\quad t\in R, X\in R^3 \tag{38}$$

描述了一个保守的复原子核场 Ψ 与一个实中性介子场 Φ 的相互作用的古典 Yukawa 模型，这两个场是标量场． M 是介子的质量 [7,8].

令

$$X=(x,y,z),$$

则 (37) 和 (38) 式可以改写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi+\frac{1}{2}(\Psi_{xx}+\Psi_{yy}+\Psi_{zz})+\Phi\Psi=0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz})+M^2\Phi-|\Psi|^2=0. \tag{40}$$

假设

$$\Psi(x,y,z,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{u}(\zeta), \tag{41}$$

$$\Phi(x,y,z,t)=\overline{v}(\zeta), \tag{42}$$

其中 $\zeta = ax+by+ez+dt+\zeta_0$，$\theta = \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\theta_0$ 且 ζ_0，θ_0 为任意常数. $\overline{u}(\zeta)$, $\overline{v}(\zeta)$, a, b, e, d, α, β, γ, δ 待定. 则 (37) 和 (38) 式可以改写为

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+e^2)\overline{u}''-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)\overline{u}+\overline{uv}+\mathrm{i}(d+a\alpha+b\beta+e\gamma)\overline{u}'=0, \tag{43}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)\overline{v}''+M^2\overline{v}-\overline{u}^2=0. \tag{44}$$

令

$$d+a\alpha+b\beta+e\gamma=0, \tag{45}$$

得到

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+e^2)\overline{u}''-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)\overline{u}+\overline{uv}=0, \tag{46}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)\overline{v}''+M^2\overline{v}-\overline{u}^2=0. \tag{47}$$

此时，利用齐次平衡原则，可假设 $\overline{u}$, $\overline{v}$ 满足

$$\overline{u}=a_2u^2+a_1u+b_1v+b_2uv+c_0, \tag{48}$$

$$\overline{v}=c_2u^2+c_1u+d_1v+d_2uv+e_0. \tag{49}$$

其中 $a_2,a_1,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,d_1,d_2,e_0$ 为待定常数. 且 u,v 满足 “扰动方程组”(7) 、 (8).

所以

$$\begin{aligned}\overline{u}''=&6a_2u^4+6b_2u^3v+2a_1u^3+2b_1u^2v+4a_2(2-m^2)u^2\\&+(5b_2-4b_2m^2)uv+a_1(2-m^2)u+b_1(1-m^2)v+2a_2(1-m^2),\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\overline{uv}=&(a_2c_2+b_2d_2)u^4+(a_2c_1+a_1c_2+b_1d_2+b_2d_1)u^3\\&+(c_2c_0+a_2e_0+a_2c_1+b_1d_1+b_2d_2)u^2+(b_1d_2+b_2d_1)u\\&+(a_2d_2+b_2c_2)u^3v+(a_2d_1+a_1d_0+b_1c_0+b_2c_1)u^2v+(b_1e_0+d_1c_0)v\\&+(a_1d_1+b_1c_1+b_2e_0+d_2c_0)uv+(a_1e_0+c_1c_0+b_1d_1+c_0e_0),\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\overline{u}^2=&(a_2^2+b_2^2)u^4+2a_2b_2u^3v+2(a_1a_2+b_1b_2)u^3\\&+2(a_2b_1+b_2a_1)u^2v+(2c_0a_2+a_1^2+b_2^2+b_1^2)u^2+2(c_0b_2+2a_1b_1)uv\\&+2(c_0a_1+b_2b_1)u+2c_0b_1v+c_0^2+b_1^2,\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\overline{v}''=&6c_2u^4+6d_2u^3v+2c_1u^3+2d_1u^2v+4c_2(2-m^2)u^2\\&+(5d_2-4d_2m^2)uv+c_1(2-m^2)u+d_1(1-m^2)v+2c_2(1-m^2).\end{aligned} \tag{53}$$

将 (48) − (53) 式分别代入 (46) 、 (47) 式，并令 $u^4,u^3,u^2,u,u^3v,u^2v,uv,v$ 的系数和常数项为零，得到关于 $a_i,b_i,c_i,d_i(i=1,2),c_0,d_0$ 的代数方程组

$$3a_2(a^2+b^2+e^2)+a_2c_2+b_2d_2=0, \tag{54}$$

$$a_1(a^2+b^2+e^2)+a_2c_1+a_1c_2+b_1d_2+b_2d_1=0, \tag{55}$$

$$\begin{aligned}&2a_2(2-m^2)(a^2+b^2+e^2)-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)a_2\\&+(c_2c_0+a_2e_0+a_2c_1+b_1d_1+b_2d_2)=0,\end{aligned} \tag{56}$$

$$\frac{1}{2}a_1(2-m^2)(a^2+b^2+e^2)-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)a_1+(b_1d_2+b_2d_1)=0, \tag{57}$$

$$3b_2(a^2+b^2+e^2)+(a_2d_2+b_2c_2)=0, \tag{58}$$

$$b_1(a^2+b^2+e^2)+a_2d_1+a_1d_0+b_1c_0+b_2c_1=0, \tag{59}$$

$$\frac{1}{2}(5b_2-4b_2m^2)(a^2+b^2+e^2)-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)b_2+a_1d_1+b_1c_1+b_2e_0+d_2c_0=0, \tag{60}$$

$$\frac{1}{2}b_1(1-m^2)(a^2+b^2+e^2)-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)b_1+(b_1e_0+d_1c_0)=0, \tag{61}$$

$$a_2(1-m^2)(a^2+b^2+e^2)-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)c_0+(a_1e_0+c_1c_0+b_1d_1+c_0e_0)=0, \tag{62}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)6c_2-(a_2^2+b_2^2)=0, \tag{63}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)2c_1-2(a_1a_2+b_1b_2)=0, \tag{64}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)4c_2(2-m^2)+M^2c_2-(2c_0a_2+a_1^2+b_2^2+b_1^2)=0, \tag{65}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)c_1(2-m^2)+M^2c_1-2(c_0a_1+b_2b_1)=0, \tag{66}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)6d_2-2a_2b_2=0, \tag{67}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)2d_1-2(a_2b_1+b_2a_1)=0, \tag{68}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)(5d_2-4d_2m^2)+M^2d_2-2(c_0b_2+2a_1b_1)=0, \tag{69}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)d_1(1-m^2)+M^2d_1-2c_0b_1=0, \tag{70}$$

$$(d^2-a^2-b^2-e^2)2c_2(1-m^2)+M^2e_0-(c_0^2+b_1^2)=0. \tag{71}$$

求解 (54) – (71) 式，得到解

$$a_1=b_1=c_1=d_1=0, \tag{72}$$

$$a_2=b_2=\pm\sqrt{-\frac{9}{2}(d^2-a^2-b^2-e^2)(a^2+b^2+e^2)}, \tag{73}$$

$$c_2=d_2=-\frac{3}{2}(a^2+b^2+e^2), \tag{74}$$

$$c_0=\frac{5-4m^2+\frac{M^2}{(d^2-a^2-b^2-e^2)}}{6}a_2, \tag{75}$$

$$e_0=\left(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta\right)+\frac{(a^2+b^2+e^2)}{4}\left[\frac{M^2}{(d^2-a^2-b^2-e^2)}-(5-4m^2)\right] \tag{76}$$

且各常数之间满足 (45) 式和如下关系

$$24(m^2-1)=\left(\frac{M^2}{(d^2-a^2-b^2-e^2)}\right)^2-(5-4m^2)^2, \tag{77}$$

$$-\frac{3}{2}(1-m^2)(a^2+b^2+e^2)(d^2-a^2-b^2-e^2)+M^2e_0=c_0^2. \tag{78}$$

则可得 KGS 相应的如下形式的 Jacobi 椭圆函数解

$$\Psi(x,y,z,t)=a_2\Big[\Big(\frac{cn(\zeta)}{sn(\zeta)}\Big)^2+\Big(\frac{cn(\zeta)}{sn^2(\zeta)}\Big)+\frac{5-4m^2+\frac{M^2}{(d^2-a^2-b^2-e^2)}}{6}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\theta_0)}, \tag{79}$$

$$\Phi(x,y,z,t)=c_2\Big[\Big(\frac{cn(\zeta)}{sn(\zeta)}\Big)^2+\Big(\frac{cn(\zeta)}{sn^2(\zeta)}\Big)\Big]+(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta)$$
$$+\frac{(a^2+b^2+e^2)}{4}\Big[\frac{M^2}{(d^2-a^2-b^2-e^2)}-(5-4m^2)\Big]. \tag{80}$$

特别地，当 $m^2\to 0$ 时，由 (72) − (78) 式，得到

$$a_1=b_1=c_1=d_1=0, \tag{81}$$

$$a_2=b_2=\pm\sqrt{-\frac{9}{2}(d^2-a^2-b^2-e^2)(a^2+b^2+e^2)}, \tag{82}$$

$$c_2=d_2=-\frac{3}{2}(a^2+b^2+e^2), \tag{83}$$

$$c_0=\frac{2}{3}a_2, \tag{84}$$

$$e_0=-2\Big(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta\Big) \tag{85}$$

且

$$M^2=-(d^2-a^2-b^2-e^2), \tag{86}$$

$$a^2+b^2+e^2=2\Big(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta\Big). \tag{87}$$

相应地得到解为

$$\Psi(x,y,z,t)=a_2\Big[\cot^2(\zeta)+\frac{\csc(\zeta)}{\cot(\zeta)}+\frac{2}{3}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\theta_0)}, \tag{88}$$

$$\Phi(x,y,z,t)=c_2\Big[\cot^2(\zeta)+\frac{\csc(\zeta)}{\cot(\zeta)}\Big]-2\Big(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta\Big) \tag{89}$$

且各常数之间满足 (45) 、 (87) 、 (88) 式.

当 $m^2\to 1$ 时，由 (72) − (78) 式，得到

$$a_1=b_1=c_1=d_1=0, \tag{90}$$

$$a_2=b_2=\pm\sqrt{-\frac{9}{2}(d^2-a^2-b^2-e^2)(a^2+b^2+e^2)}, \tag{91}$$

$$c_2=d_2=-\frac{3}{2}(a^2+b^2+e^2), \tag{92}$$

$$c_0=e_0=0 \tag{93}$$

且

$$M^2=-(d^2-a^2-b^2-e^2),$$

$$a^2+b^2+e^2=2\Big(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2+\delta\Big).$$

相应地得到解为

$$\Psi(x,y,z,t)=a_2[\mathrm{csch}^2(\zeta)+\mathrm{csch}(\zeta)\coth(\zeta)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\theta_0)}, \tag{94}$$

$$\Phi(x,y,z,t)=c_2[\mathrm{csch}^2(\zeta)+\mathrm{csch}(\zeta)\coth(\zeta)] \tag{95}$$

且各常数之间满足 (45) 、 (87) 、 (88) 式.

4 讨论

实际上，扰动方程组 (7) 、 (8) 可以取的更为一般，如

$$u'^2 = q_4u^4 + q_2u^2 + q_0, \tag{96}$$

$$v'^2 = p_4v^4 + p_2v^2 + p_0. \tag{97}$$

当参数 q_i，p_i 取不同的值时，扰动方程组将会有不同的 Jacobi 椭圆函数解.

例如当 $q_4 = m^2, q_2 = -1 - m^2, q_0 = 1$，$p_4 = p_2 = p_0 = 0$ 时， (96) − (97) 式有特解为 $u(\xi) = sn\xi$，$v(\xi) = 0$；

注 这相当于 Jacobi 椭圆函数展开法中的 sn 展开. 利用它们求解时可得到曾用齐次平衡方法，双曲正切函数展开法， Jacobi 椭圆函数展开法等得到的大家熟知的 KdV 方程， Boussinesq 方程， KGS 方程组 [9] 的解.

当 $q_4 = 1, q_2 = 2 - m^2, q_0 = 1 - m^2, p_4 = 1$，$p_2 = -(1 + m^2)$，$p_0 = m^2$ 时， (96) − (97) 式有特解为 $u(\xi) = \dfrac{cn\xi}{sn\xi}$，$v(\xi) = ns\xi$；在本文中，我们在齐次平衡原则的基础上利用这一组解构造出了 KdV 方程， Boussinesq 方程， KGS 方程组的新形式的 Jacobi 椭圆函数解.

参 考 文 献

[1] Mingliang Wang, Yubin Zhou, Zhibin Li. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. Phys Lett A, 1996, **216**: 67–75

[2] Fan E. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Phys Lett A, 2000, **277**: 212–218

[3] Yubin Zhou, Mingliang Wang, Yueming Wang. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients. Phys Lett A, 2003, **308**: 31–36

[4] 刘式适，傅遵涛，刘式达，赵强. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用. 物理学报， 2001, **50**(11): 2068–2073

[5] 王明亮，周宇斌，李志斌. 齐次平衡原则及其应用. 兰州大学学报 (自然版), 1999, **35**(3): 8–16

[6] Whitham G B. Linear and Nonliear Waves. New York: Wiley, 1974

[7] Fukuda I, Tsutsumi M. On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations 3-Higher order interaction,decay and blow-up. Math Japonica, 1979, **24**: 307–321

[8] Yukawa H. On the interaction of elementary particles I. Proc Physico-Math Soc Japan, 1935, **17**: 48–57

[9] 张辉群. 耦合 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的孤立波解. 数学物理学报， 2002, **22A**(3): 336–341

Jacobi Elliptic Function Solutions of Nonlinear Evolution Equation

Zhang Huiqun

(*Department of Mathematics, Qingdao University, 266071*)

Abstract: Based on the homogeneous balance principle, a new and effective method is given. By this method, new exact Jacobi elliptic function solutions of KdV equation, Boussinesq equation, KGS equations are obtained.

Key words: Homogeneous balance principle; Jacobi elliptic function solution; Disturbed equations.

MR(2000) Subject Classification: 35Q