2005, **25A**(3): 357－361

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

多线性奇异积分算子的加权 Lipschitz 估计*

兰家诚

(丽水学院数学系　浙江丽水 323000)

摘要：该文讨论了一类多线性积分算子的加权 Lipschitz 有界性，通过将多线性积分算子用相应的分数次积分估计，得到一种简明的证明方法.

关键词：多线性算子；Lipschitz 空间；$A(p,q)$ 权；分数次积分。

MR(2000)主题分类：42B20；42B35　　**中图分类号**：O174.2　　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)03-357-05

1　引言和主要结果

设 Ω 是 R^n 上的零次齐次函数，且 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$，其中 $q\geqslant\dfrac{n}{n-\beta}$，$S^{n-1}$ 表示 R^n 中的单位球面，A 表示定义在 R^n 中的函数.

定义多线性积分算子如下

$$T_Af(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n+m-1}}R_m(A;x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

及相应的极大算子为

$$M_Af(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n+m-1}}\int_{|x-y|<r}|\Omega(x-y)R_m(A;x,y)f(y)|\mathrm{d}y.$$

$R_m(A;x,y)$ 表示 $A(x)$ 在点 x 关于 y 的 m 阶 Taylor 展开式的余项，即

$$R_m(A;x,y)=A(x)-\sum_{|\gamma|<m}\frac{1}{\gamma!}D^\gamma A(y)(x-y)^\gamma$$

且 $D^\gamma A(x)\in\dot{\Lambda}_\beta(|\gamma|=m-1)$. 其中 $\dot{\Lambda}_\beta$ 表示 Lipschitz 空间，即对 $\beta>0$，$\dot{\Lambda}_\beta$ 表示具有如下范数的函数构成的集合

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in R^n,h\neq0}\frac{|\Delta_h^{[\beta]+1}f(x)|}{|h|^\beta}<\infty,$$

其中

$$\Delta_h^1f(x)=f(x+h)-f(x),\ \Delta_h^{k+1}f(x)=\Delta_h^kf(x+h)-\Delta_h^kf(x),\ k\geqslant1.$$

众所周知，当 $D^\gamma A\in L^r(R^n)$ $(1<r\leqslant\infty)$ 和 $D^\gamma A\in BMO(R^n)$时，关于与奇异积分算子相关联的多线性算子的研究受到广泛的关注，出现很多成果(参见文[1]－[4]，[8]及相关的

收稿日期：2003-12-30；修订日期：2004-10-20

E-mail：jiachenglan@163.com

* 基金项目：浙江省自然科学基金(M103069)，浙江省教育厅科研基金(20021022)资助

文献). 在 1982 年, Cohen 和 Gosselin[1] 用旋转的方法, 证明了 T_A 是在 L^p 有界的.

我们注意到当 $m=1$ 时, T_A 是由 T 和 A 生成的交换子 $[A,T]f(x)=A(x)Tf(x)-T(Af)(x)$, 这里 T 表示奇异积分

$$Tf(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y.$$

1995 年, M Paluszynski[2] 证明如果 $A\in\dot{\Lambda}_\beta(0<\beta<1)$, $\Omega\in C^\infty(S^{n-1})$, 且 $\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)\mathrm{d}\theta=0$, 则 $[A,T]$ 是 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ $(1<p<\frac{n}{\beta},\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n})$ 有界的. 2003 年, 陆善镇, 伍火熊, 张璞[3] 证明了当 $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta(0<\beta<1)$ 时, 则 T_A 是 (L^p,L^q) 有界的.

本文则考虑将文献[1]中的条件 $D^\alpha A\in BMO$ 换为 $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta$ 时, 多线性奇异积分算子 T_A 的加权有界性, 是文献[3]中上述定理的一种推广, 其中 $A(p,q)$ 权的定义见文献[4]。

我们的主要结果如下

定理 1 设 $0<\beta<1$, $1<p<\frac{n}{\beta}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$, Ω 是 R^n 上的零次齐次函数, 且 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$ $(s\geqslant\frac{n}{n-\beta})$, $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta(|\gamma|=m-1)$. 如果指标集 $\{\beta, p, q, s\}$ 满足下面的条件之一

(a) $s'<p$, $w(x)^{s'}\in A(p/s',q/s')$;

(b) $s>q$, $w(x)^{-s'}\in A(q'/s', p'/s')$;

(c) $\beta/n+1/s<1/p<1/s'$, 存在 r 满足, $1<r<\frac{s}{(n/\beta)'}$ 使得 $w(x)^{r'}\in A(p,q)$; 则存在不依赖于 f 和 A 的常数 $C>0$, 使得

$$\|T_Af\|_{L^q(w^q)}\leqslant C\sum_{|\gamma|<m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

定理 2 在定理 1 的条件下, 如果指标集 $\{\beta, p, q, s\}$ 满足 (a), (b) 和 (c) 的条件之一, 则存在不依赖于 f 和 A 的常数 $C>0$, 使得

$$\|M_Af\|_{L^q(w^q)}\leqslant C\sum_{|\gamma|<m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

2 引理和定理的证明

引理 1[4] 设 $0<\beta<n$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$, $1<p<\frac{n}{\beta}$, Ω 是 R^n 上的零次齐次函数, 且 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$ $(s>1)$. 如果指标集 $\{\beta, p, q, s\}$ 满足下面的条件之一

(a) $s'<p$, $w(x)^{s'}\in A(p/s',q/s')$;

(b) $s>q$, $w(x)^{-s'}\in A(q'/s', p'/s')$;

(c) $\beta/n+1/s<1/p<1/s'$, 存在 r 满足, $1<r<\frac{s}{(n/\beta)'}$ 使得 $w(x)^{r'}\in A(p,q)$; 则 $T_{\Omega,\beta}$ 是从 $L^p(w^p)$ 到 $L^q(w^q)$ 的有界算子. 其中

$$T_{\Omega,\alpha}f(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y.$$

引理 2[1] 设 $A(x)$ 是 R^n 上的 m 阶可微函数, 且 $D^\gamma A\in L^l_{\mathrm{loc}}(R^n)$ $(|\gamma|=m, l>n)$. 则有

$$|R_m(A;x,y)|\leqslant C|x-y|^m\sum_{|\gamma|<m}\left(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A(z)|^l\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{l}},$$

其中 Q_x^y 是以 x 为中心 $5\sqrt{n}|x-y|$ 为直径的方体.

引理 3[2] $0<\beta<1$,$1\leqslant q<\infty$,则

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|f(x)-m_Q(f)|\mathrm{d}x$$
$$\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-m_Q(f)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

引理 4[5] 设 $Q^*\subset Q$,$g\in\dot{\Lambda}_\beta(0<\beta<1)$,则

$$|m_{Q^*}(g)-m_Q(g)|\leqslant C|Q|^{\beta/n}\|g\|_{\dot{\Lambda}_\beta}.$$

最近,陆善镇,伍火熊,张璞[3]研究了多线性算子 T_A,他们得到下面的重要的引理

引理 5 设 $0<\beta<1$,Ω 是 R^n 上的零次齐次函数,且 $D^\gamma A\in\dot{\Lambda}_\beta(|\gamma|=m-1)$,则对任意的 $x\in R^n$,有

$$|T_Af(x)|\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\overline{T}_{\Omega,\beta}f(x).$$

这里

$$\overline{T}_{\Omega,\beta}f(x)=\int_{R^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\beta}}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

证 对任意固定的 $x\in R^n$,取 $r>0$,我们有

$$|T_Af(x)|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}r\leqslant|x-y|<2^kr}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n+m-1}}|R_m(A;x,y)||f(y)|\mathrm{d}y=\sum_{k=-\infty}^{\infty}I_k.$$

对于每个 I_k,令 Q 是以 x 为中心,r 为直径的方体,$Q_k=2^kQ$.

设

$$A_{Q_k}(y)=A(y)-\sum_{|\gamma|=m-1}\frac{1}{\gamma!}m_{Q^k}(D^\gamma A)y^\gamma,$$

则 $R_m(A;x,y)=R_m(A_{Q_k};x,y)$. 由引理 2 得

$$|R_m(A_{Q_k};x,y)|\leqslant|R_{m-1}(A_{Q_k};x,y)|+C\sum_{|\gamma|=m-1}|D^\gamma A_{Q_k}(y)||x-y|^{m-1}$$
$$\leqslant C|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}\left(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A_{Q_k}(z)|^l\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{l}}$$
$$+C|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}|D^\gamma A_{Q_k}(y)|,$$

其中 Q_x^y 是以 x 为中心 $5\sqrt{n}|x-y|$ 为直径的方体. 注意到当 $|x-y|<2^k$ 时,则 $Q_x^y\subset 2nQ$. 再由引理 2 和引理 3 得到

$$\left(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A_{Q_k}(z)|^l\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{l}}=\left(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A(z)-m_{Q_x^y}(D^\gamma A)|^l\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{l}}$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q_x^y|}\int_{Q_x^y}|D^\gamma A(z)-m_{Q_x^y}(D^\gamma A)|^l\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{l}}$$
$$+|m_{Q_x^y}(D^\gamma A)-m_{2nQ_k}(D^\gamma A)|+|m_{2nQ_k}(D^\gamma A)-m_{Q_k}(D^\gamma A)|$$
$$\leqslant C|Q_k|^{\beta/n}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\leqslant C(2^kr)^\beta\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}$$

和

$$|D^\gamma A_{Q_k}(y)|=|D^\gamma A(y)-m_{Q_k}(D^\gamma A)|\leqslant C|Q_k|^{\beta/n}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\leqslant C(2^kr)^\beta\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}.$$

从而

$$|R_m(A_{Q_k};x,y)|\leqslant C(2^k r)^\beta |x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}.$$

因此

$$\begin{aligned}I_k&\leqslant\sum_{|\gamma|<m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_{2^{k-1}r\leqslant|x-y|<2^k r}\frac{(2^k r)^\beta}{|x-y|^n}|\Omega(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\sum_{|\gamma|<m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_{2^{k-1}r\leqslant|x-y|<2^k r}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\beta}}|f(y)|\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而

$$|T_A f(x)|\leqslant C\sum_{|\gamma|<m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\overline{T}_{\Omega,\beta}f(x).$$ ▌

下面的引理揭示了算子 T_A 与 M_A 的内在联系.

引理 6 在定理 1 的条件下,则

$$\overline{T}_A f(x)\geqslant M_A f(x),$$

其中

$$\overline{T}_A f(x)=\int_{R^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n+m-1}}|R_m(A;x,y)||f(y)|\mathrm{d}y.$$

定理 1 的证明

由引理 1 和引理 5 可得

$$\begin{aligned}\|T_A f\|_{L^q(w^q)}&\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\overline{T}_{\Omega,\beta}\|_{L^q(w^q)}\\&\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p(w^p)}.\end{aligned}$$ ▌

定理 2 的证明可由引理 6 和定理 1 直接推出。

3 进一步的结果

设

$$T_{A_1,A_2,\cdots,A_k}f(x)=\int_{R^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n+M-k}}\prod_{j=1}^k R_{m_j}(A_j;x,y)f(y)\mathrm{d}y;$$

$$M_{A_1,A_2,\cdots,A_k}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n+M-k}}\int_{|x-y|<r}|\Omega(x-y)|\prod_{j=1}^k|R_{m_j}(A_j;x,y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中

$$R_{m_j}(A_j;x,y)=A_j(x)-\sum_{|\alpha|<m_j}\frac{1}{\alpha!}D^\gamma A_j(y)(x-y)^\alpha\quad(j=1,2,\cdots,k),$$

$$M=\sum_{j=1}^k m_j.$$

我们可得

定理 3 设 $0<\beta<1$, $1<p<\frac{n}{\beta}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$,$\Omega$ 是 R^n 上的零次齐次函数,且 $\Omega\in L^s(S^{n-1})s\geqslant\frac{n}{n-\beta}$, $D^\gamma A_j\in\dot{\Lambda}_\beta(|\gamma|=m_j-1)$. 如果指标集$\{\beta, p, q, s\}$ 满足下面的条件之一

(a) $s'<p$, $w(x)^{s'}\in A(p/s',q/s')$;

(b) $s>q$, $w(x)^{-s'}\in A(q'/s', p'/s')$;

(c) $\beta/n+1/s<1/p<1/s'$,存在 r 满足,$1<r<\frac{s}{(n/\beta)'}$ 使得 $w(x)^{r'}\in A(p,q)$;则存在不依赖于 f 和 A 的常数 $C>0$,使得

$$\| T_{A_1},\cdots,A_k f \|_{L^q(w^q)} \leqslant C\prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{|\gamma|=m_{j-1}} \| D^\gamma A_j \|_{\dot{\Lambda}_\beta}\Big) \| f \|_{L^p(w^p)}.$$

定理 4　在定理 3 的条件下,如果指标集$\{\beta, p, q, s\}$ 满足(a),(b)和(c)的条件之一,则存在不依赖于 f、A 和 A_j 的常数 $C>0$,使得

$$\| M_{A_1,A_2,\cdots,A_k} f \|_{L^q(w^q)} \leqslant \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{|\gamma|=m_{j-1}} \| D^\gamma A \|_{\dot{\Lambda}_\beta}\Big) \| f \|_{L^p(w^p)}.$$

注　我们可以类似定理 1 的证明得出定理 3 和定理 4 的证明,这里省略.

参　考　文　献

[1] Cohen J, Gosselin J. A BMO estimate for multilinear sigular integrals. Illinois J of Math, 1986, **30**: 445－464

[2] Paluszynski M. Characterization of the Besov space via the commutator operator of Coifman,Rochberg and Weiss. Indiana Univ Math J, 1995, **44**: 1－17

[3] Lu Shanzhen, Wu Huoxiong, Zhang Pu. Multilinear singular integrals with rough Kernel. Acta Mathematica Sinica, 2003,**19**(1): 51－62

[4] Ding Yong, Lu Shanzhen. Weighted norm inequalities for fractional integral operators with rough Kernel. Canadia J of Math, 1998, **50**: 29－39

[5] Devore R A, Sharpley R C. Maximal functions measuring smoothness. Mem Amer Math Soc, 1984, **47**: 23－36

[6] 刘宗光,曾岳生。齐型空间上的 Herz 空间及其应用。数学物理学报,1999,**19**(3):270－277

[7] 韦旦。一类奇异积分算子在 Banach 空间值 Hardy 空间上的有界性。数学物理学报,1997,**17**(2):235－240

[8] 王衡庚,陶祥兴。区域上 Besov 空间的分子分解及其在偏微分方程中的应用。数学物理学报,2003,**23**(4):449－455

The Weighted Lipschitz Estimates for Multilinear Singular Intergral

Lan Jiacheng

(*Department of Mathematics, Lishui College, Lishui* 323000)

Abstract: In this paper, the author shows the weighted Lipschitz boundedness for a class of multilinear operators, which is similar to the higher-order commutator for the singular integral. It is in a simple way that is closely linked with a class of rough fractional integral operator.

Key words: Multilinear operator; Lipschitz spaces; $A(p,q)$ weight; Fractional integral.

MR(2000) Subject Classification: 42B20; 42B35