2005,**25A**(5):663－672

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

加权解析 Lipschitz 空间的等价范数*

黄玲娣

(绍兴文理学院数学系　绍兴 312000)

陈泽乾

(中国科学院武汉物理与数学研究所　武汉 430071)

摘要:该文研究单位圆盘上加权解析 Lipschitz 空间的等价范数。作者首先推广文献[3]中的结果，给出了加权解析 Lipschitz 函数的 p-Garsia 模刻画,然后用高阶导数刻画了加权解析 Lipschitz 函数,并给出了它的 Bergman-Carleson 测度特征。最后,还得到了加权解析 Lipschitz 函数类似于 BMO 指数衰减的 John-Nirenberg 定理。

关键词:加权解析 Lipschitz 空间；p-Garsia 模；Bergman-Carleson 测度；指数衰减。

MR(2000)主题分类:32A37　　**中图分类号**:O174　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)05-663-10

1　引言

单位圆盘上解析 Lipschitz 函数空间的研究,从 Hardy 和 Littlewood 的研究算起已有近八十年的历史。人们从不同角度研究了解析 Lipschitz 空间的结构性质以及它和一些经典函数空间的关系,得到了解析 Lipschitz 函数其导数的平均增长以及趋于边界的光滑性,如 Hardy-Littlewood 定理和 Zygmund 定理等。特别是,人们发现解析 Lipschitz 函数空间可以用来描述小指标的 Hardy 空间的对偶空间。详细情况参见文献[2]。

近二十年来,人们进一步研究了加权解析 Lipschitz 空间,如文献[1]、[3]和[8]等。为了研究加权 Bergman 空间,Blasco[1] 研究了加权解析 Lipschitz 空间中的函数趋于边界的光滑性并由此给出了加权 Bergman 空间的对偶空间可以用加权解析 Lipschitz 空间刻画的结论。他还进一步将这个结论推广到向量值情形。1997 年 Dyakonov[3] 给出了加权解析 Lipschitz 空间两个非常重要的刻画。一个是用 Garsia 模给出加权解析 Lipschitz 空间的一个等价范数;另一个是用函数绝对值刻画加权解析 Lipschitz 空间,这是一个非常深刻的结论。这个结论的一个简化证明由 Pavlovic[8] 给出.

在本文中,我们主要研究单位圆盘上加权解析 Lipschitz 空间的等价范数。我们的研究基于 Blasco[1] 和 Dyakonov[3] 的工作。我们首先推广 Dyakonov 的结果,给出了加权解析 Lipschitz 函数的 p-Garsia 模刻画(见定理 4.1)。Dyakonov 的结论是 $p=2$ 的情形,我们把

收稿日期:2004-06-01

* 基金项目:国家自然科学基金(10271117)

它推广到 $1\leqslant p<\infty$ 的情形。接下来,我们研究了加权解析 Lipschitz 函数的高阶导数刻画问题。在解析 Lipschitz 空间情形,这方面的结论可以追述到 Hardy 和 Littlewood 的工作[2]。我们将这个结论推广到加权解析 Lipschitz 函数情形(见定理 4.2)。我们还进一步给出了加权解析 Lipschitz 函数的 Bergman-Carleson 测度特征(见定理 4.3)。加权解析 Lipschitz 函数的 p-Garsia 模特征表明,加权解析 Lipschitz 空间应当有与 BMO 空间类似的某种性质。情况确实如此,我们证明了加权解析 Lipschitz 函数类似于 BMO 指数衰减的 John-Nirenberg 定理(见定理 4.4)。

由于一般的权没有齐次性,我们通常要用不同于解析 Lipschitz 空间的方法来证明加权解析 Lipschitz 空间上的相应结果。其中,我们主要充分使用了由 Blasco 和 Dyakonov 等人发展起来的逐点估计技巧。

2 记号和预备知识

我们用 $\boldsymbol{C}$ 表示复平面,$D\overset{\text{def}}{=}\{z\in\boldsymbol{C}:|z|<1\}$ 表示单位圆盘,$T\overset{\text{def}}{=}\{z\in\boldsymbol{C}:|z|=1\}$ 为其边界一单位圆周;记 $\overline{D}\overset{\text{def}}{=}D\cup T$,用 dm 表示 D 上的欧氏面积测度;对 D 中的 Lebesgue 可测集 K,记 $|K|=m(K)$,则 $|D|=\pi$;$d\sigma$ 表示 T 上规范的弧长测度,即 $\sigma(T)=1$。另外,未加说明的术语见文献[2]、[4]、[9]和[10]等。

D 上的解析函数的全体记为 $H(D)$。对于 $f\in H(D)$,$z\in D$,其 n 阶导数记为 $f^{(n)}(z)$。用 $A(D)$ 代表在 D 内解析且在 $\overline{D}$ 上连续的函数全体。

设 $a\in D$,Möbius 变换 $\varphi_a:D\to D$ 定义为

$$\varphi_a(z)\overset{\text{def}}{=}\frac{a-z}{1-\bar{a}z},\quad z\in D.$$

定义

$$g(z,a)\overset{\text{def}}{=}\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{a-z}\right|=\log\frac{1}{|\varphi_a(z)|}$$

为以 a 为对数奇点的 Green 函数。

由定义可得

$$\varphi_a\circ\varphi_a(z)=z,\qquad \varphi_a^{-1}(z)=\varphi_a(z),\quad \forall z\in D.$$

固定 $a\in D$,$0<r<1$,用 $D(a,r)$ 表示以 a 为伪双曲中心,r 为伪双曲半径的伪双曲圆盘,即 $D(a,r)\overset{\text{def}}{=}\{z\in D:|\varphi_a(z)|<r\}$。事实上,伪双曲圆盘也是欧氏圆盘,它的欧氏圆心和半径分别是 $\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$ 和 $\frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r$,因此 $|D(a,r)|=\pi r^2\frac{(1-|a|^2)^2}{(1-|a|^2r^2)^2}$。

对 $z\in D$,$\zeta\in T$

$$P_z(\zeta)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

为 Possion 核;由 Possion 核诱导的调和测度为 $d\mu_z\overset{\text{def}}{=}P_zd\sigma$. 对于一个函数 $f\in C(T)$,它的 Possion 积分定义如下

$$P[f](z)\overset{\text{def}}{=}\int_T f(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_z(\zeta),\quad z\in D.$$

定理 A[9,定理3.2.2] 若 $f\in A(D)$，则 $f(z)=P[f](z)$，$z\in D$。

此定理说明了 Possion 核具有再生性。

设 $f\in L(T)$，$I\subset T$，$f_I\overset{\text{def}}{=}\dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I f\,\mathrm{d}\sigma$，我们称 f_I 为 f 在 I 上的平均值。对 $t\in T$，$\delta>0$，$I(t,\delta)\overset{\text{def}}{=}\{\tau\in T:|\tau-t|<\delta^2\}$，这里 t 称为是 $I(t,\delta)$ 的中心。注意，每个弧 $I\subset T$ 都可唯一地表示成这种形式。当 $\delta>\sqrt{2}$ 时，$I(t,\delta)=T$，而且 $|I(t,\delta)|$ 只依赖于 δ。

定理 B[9,命题5.1.4] 对 $I(t,\delta)\subset T$，比率 $I(t,\delta)/\delta^2$ 关于 δ 单调递增，且

$$\frac{1}{\pi}\leqslant\frac{I(t,\delta)}{\delta^2}\leqslant\frac{1}{2},\quad \delta\in(0,\sqrt{2}].$$

定义 2.1[1],[3] 设 $w:[0,2]\to R$ 连续且 $w(0)=0$，如果 $w(t)$ 满足条件：对 $t>0$，$w(t)$ 单调上升，$w(t)/t$ 单调下降，则称 $w(t)$ 是权函数；如果 $w(t)$ 还满足条件：存在常数 $c(w)>0$，使得

$$\int_0^\delta\frac{w(t)}{t}\mathrm{d}t+\delta\int_\delta^2\frac{w(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant c(w)w(\delta)$$

成立，其中 $0<\delta<2$，则称 $w(t)$ 是正则权函数。

若 $w(t)$ 是权函数，由定义并经过简单计算有

(1) $w(t)\geqslant 0$；

(2) $w(ct)\leqslant cw(t)$，$c\geqslant 1$ 及 $w(ct)\geqslant cw(t)$，$c\leqslant 1$.

常见的正则权函数是 $w(t)=t^\alpha(1-\log t)^\beta$，其中 $\alpha(1-\log 2)>\beta\geqslant 0$ 且 $\alpha<1$。

定义 2.2[1],[3] 设 w 是权函数，$f:\overline{D}\to C$，若

$$\|f\|_{\Lambda_w(\overline{D})}\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{w(|z_1-z_2|)}:z_1,z_2\in\overline{D},z_1\neq z_2<\infty\right\},$$

则称 f 为 $\overline{D}$ 上的加权 Lipschitz 函数。若将彼此相差仅为常数的函数视为同一元素，则全体加权 Lipschitz 函数赋以范数 $\|\cdot\|_{\Lambda_w(\overline{D})}$ 构成 Banach 空间，记作 $\Lambda_w(\overline{D})$。相应的

$$A_w\overset{\text{def}}{=}A\cap\Lambda_w(\overline{D})。$$

在文献[3]中 Dyakonov 证明了 A_w 与 $A\cap\Lambda_w(T)$ 是一致的。当 $w(t)=t^\alpha(0<\alpha<1)$ 时，$A_w(\overline{D})$ 空间即为我们熟知的解析 Lipschitz 空间 A_α。

定理 C[3,引理6和定理1] 设 w 是正则权函数，$f\in A(D)$，则

$$\|f\|_{\Lambda_w(\overline{D})}\approx\|f\|_{\Lambda_w(T)}\approx\sup_{z\in D}\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(z)|.$$

定义 2.3[11],[12] 设 μ 是 D 上的 Borel 测度，若对任意 $r(0<r<1)$

$$\sup_{a\in D}\frac{\mu(D(a,r))}{|D(a,r)|}<\infty,$$

则称 μ 为 Bergman-Carleson 测度。

关于 Bergman-Carleson 测度有如下刻画

定理 D[11,引理2.1] D 上 Borel 测度 μ 是 Bergman-Carleson 测度的充分必要条件为

$$\sup_{a\in D}\int_D|\varphi_a'(z)|^2\mathrm{d}\mu(z)<\infty,$$

这里 $\varphi_a(z)$ 是 D 上的 Möbius 变换。

注 在本文中出现的 c，$c(w)$ 都代表常值，且在不同地方可以取不同的值。我们约定，

对两个非负量 X 和 Y，$X\approx Y$ 表示存在一个常数 $c>0$，使得 $c^{-1}X\leqslant Y\leqslant cX$ 成立。另外，记 $\tilde{z}=\frac{z}{|z|}$，$z\in C\setminus\{0\}$，特别地，当 $z=0$ 时，记 $\tilde{z}=1$。

3 一些引理

在这一节中，作为准备工作，我们要证明几个引理。

引理 3.1[3, 引理2] 设 w 是一个正则权函数，$z\in D$，则

$$\int_T w(|\zeta-\tilde{z}|)\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\leqslant c(w)w(1-|z|).$$

引理 3.2[3, 引理3] 设 w 是一个正则权函数。若 $f\in\Lambda_w(T)$，$z\in D$，则

$$|P[f](z)-f(\tilde{z})|\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}w(1-|z|).$$

引理 3.3[3, 引理4] 设 w 是一个正则权函数。若 $f\in\Lambda_w(T)$，则

$$P[f]\in\Lambda_w(\bar{D})\ \text{且}\ \|P[f]\|_{\Lambda_w(\bar{D})}\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

进一步，若 $f\in A(D)$，则

$$\|f\|_{\Lambda_w(\bar{D})}\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

引理 3.4 设 w 是一个权函数，$f\in A_w$，$1\leqslant p<\infty$。考虑下面两个量

$$M_0(f)\overset{\text{def}}{=}\sup_{z\in D}\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(z)|,$$

$$M_p(f)\overset{\text{def}}{=}\sup_{z\in D}\frac{1}{w(1-|z|)}\left(\int_T|f(\zeta)-f(z)|^p\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}},$$

则下面两个结论成立

(a) $M_0(f)\leqslant M_p(f)$；

(b) 若 w 和 w^p 都是正则权函数，则

$$M_p(f)\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

证 (a) 固定 $z\in D$，由 Cauchy 积分公式和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(z)|&=\frac{1}{w(1-|z|)}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_T(f(\zeta)-f(z))\frac{1-|z|}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|\\&\leqslant\frac{1}{w(1-|z|)}\int_T|f(\zeta)-f(z)|\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\\&\leqslant\frac{1}{w(1-|z|)}\left(\int_T|f(\zeta)-f(z)|^p\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

两边取上确界即得 $M_0(f)\leqslant M_p(f)$。

(b) 注意到 w^p 是正则的，故引理 3.1 和引理 3.2 对 w^p 亦成立。固定 $\zeta\in T$，$z\in D$，又由于

$$(x+y)^p\leqslant 2^{p-1}(x^p+y^p),\quad 1<p<\infty,$$

这里 x 和 y 都大于零。故

$$\begin{aligned}|f(\zeta)-f(z)|^p&\leqslant(|f(\zeta)-f(\tilde{z})|+|f(\tilde{z})-f(z)|)^p\\&\leqslant 2^{p-1}(|f(\zeta)-f(\tilde{z})|^p+|f(\tilde{z})-f(z)|^p)\\&\leqslant 2^{p-1}(\|f\|^p_{\Lambda_w(T)}w^p(|\zeta-\tilde{z}|)+c(w)\end{aligned}$$

$$\|f\|^p_{\Lambda_w(T)} w^p(1-|z|))$$

$$\leqslant c(w)\|f\|^p_{\Lambda_w(T)}(w^p(|\zeta-\tilde{z}|)+w^p(1-|z|)).$$

对上不等式的两边在 T 上进行关于 $\mathrm{d}\mu_z(\zeta)$ 的积分,由引理 3.1(w^p 代替 w)得

$$\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta) \leqslant c(w)\|f\|^p_{\Lambda_w(T)}\left(\int_T w^p(|\zeta-\tilde{z}|)\mathrm{d}\mu_z(\zeta)+w^p(1-|z|)\right)$$

$$\leqslant c(w)\|f\|^p_{\Lambda_w(T)} w^p(1-|z|).$$

故

$$\frac{1}{w(1-|z|)}\left(\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

再对上不等式的两边取上确界得

$$M_p(f) \leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

∎

注 $p=1$ 和 $p=2$ 的情形已由 Dyakonov 证明[3]。

引理 3.5[5, 引理2.1] 设 $0<r<1$,则对 $\forall z\in D(a,r)$,有

$$\frac{1-r}{1+r}<\frac{1-|z|^2}{1-|a|^2}<\frac{1+r}{1-r}.$$

引理 3.6 设 $w(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$。令 $f(z)=z, z\in\overline{D}$,则 $f\in A_\alpha$。但是,当$\frac{1}{p}<\alpha<1$ 时

$$\sup_{z\in D}\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\left(\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}=\infty.$$

证 由定义直接计算得 $f\in A_\alpha$。下面通过对 p 值的分段讨论来证明,当$\frac{1}{p}<\alpha<1$ 时

$$\sup_{z\in D}\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\left(\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}=\infty.$$

当 $1<p\leqslant 2$ 时,则

$$\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\left(\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=(1+|z|)^{\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}\left(\int_T |\zeta-z|^{p-2}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant(1+|z|)^{\frac{1}{p}+1-\frac{2}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}$$

$$=(1+|z|)^{1-\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}\to\infty, \quad |z|\to 1^-.$$

当 $2<p<\infty$ 时,则

$$\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\left(\int_T |f(\zeta)-f(z)|^p \mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=(1+|z|)^{\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}\left(\int_T |\zeta-z|^{p-2}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant(1+|z|)^{\frac{1}{p}-\frac{2}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}\left(\int_T |\zeta-z|^p \mathrm{d}\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant(1+|z|)^{-\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}\left|\int_T(\zeta-z)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\right|$$

$$=(1+|z|)^{-\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{1}{p}-\alpha}|z|\to\infty, \quad |z|\to 1^-.$$

综上所述得

$$\sup_{z\in D}\frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}}\left(\int_T|f(\zeta)-f(z)|^p\,\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}=\infty. \qquad \blacksquare$$

注 $p=2$ 的情形在文献[3]中给出。注意，当$\frac{1}{p}<\alpha<1$时，$w^p=t^{p\alpha}$不是正则权函数。

引理 3.7 设 w 是一个正则权函数，则存在一个绝对常数 $c>0$，使得

$$\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I\exp\left\{\frac{|f-f_I|}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\right\}\mathrm{d}\sigma\leqslant c.$$

证 $\forall\,\zeta\in I$，由 I 表示的唯一性，我们不妨设 $I=I(\zeta_0,\delta)$，则

$$|\zeta-\eta|<|\zeta-\zeta_0|+|\eta-\zeta_0|<2\delta^2\leqslant 2\pi|I|,\quad \forall\,\eta\in I.$$

从而

$$\begin{aligned}|f(\zeta)-f_I|&=\left|f(\zeta)-\frac{1}{|I|}\int_I f(\eta)\mathrm{d}\sigma(\eta)\right|\\&\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I|f(\zeta)-f(\eta)|\,\mathrm{d}\sigma(\eta)\\&\leqslant\|f\|_{\Lambda_w(T)}w(|\zeta-\eta|)\\&\leqslant 2\pi\|f\|_{\Lambda_w(T)}w(|I|).\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{|I|}\int_I\exp\left\{\frac{|f-f_I|}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\right\}\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I\exp(2\pi)\mathrm{d}\sigma=\exp(2\pi)=c,$$

两边取上确界即得

$$\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I\exp\left\{\frac{|f-f_I|}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\right\}\mathrm{d}\sigma\leqslant c. \qquad \blacksquare$$

4 主要结果

下面，我们给出本文的主要结论及其证明。

定理 4.1 若 w 和 $w^p(1\leqslant p<\infty)$都是正则权函数，则对任意 $f\in A_w$

$$\|f\|_{\Lambda_w(\bar D)}\approx\sup_{z\in D}\frac{1}{w(1-|z|)}\left(\int_T|f(\zeta)-f(z)|^p\,\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证 在定理的假设下，由定理 C、引理 3.3 和引理 3.4 得

$$\|f\|_{\Lambda_w(\bar D)}\approx\|f\|_{\Lambda_w(T)}\approx\sup_{z\in D}\frac{1}{w(1-|z|)}\left(\int_T|f(\zeta)-f(z)|^p\mathrm{d}\mu_z(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \blacksquare$$

注 由引理 3.6 可知，定理 4.1 中要求 w^p 为正则权函数的条件是不能去掉的。

下面，我们给出 A_w 的高阶导数刻画。

定理 4.2 设 w 是一个正则权函数，$n\geqslant 2$ 是整数，则 $f\in A_w$ 的充分必要条件是

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|<\infty.$$

证 由 Cauchy 积分公式和引理 3.4 知，对 $\forall\,z\in D$ 有

$$\begin{aligned}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|&=\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}\left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_T\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\\&\leqslant\frac{n!}{w(1-|z|)}\int_T\frac{|f(\zeta)-f(z)|\,(1-|z|^2)}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\sigma(\zeta)\end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{w(1-|z|)}\int_T |f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}\mu_z(\zeta)$$
$$\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}.$$

再对上不等式两边取上确界,从而有

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|\leqslant c(w)\|f\|_{\Lambda_w(T)}<\infty.$$

另一方面,令 $K_n=\sup\limits_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|<\infty$。因为

$$f^{(n-1)}(z)-f^{(n-1)}(0)=z\int_0^1 f^{(n)}(tz)\,\mathrm{d}t,$$

故

$$|f^{(n-1)}(z)|\leqslant|f^{(n-1)}(0)|+|z|\int_0^1|f^{(n)}(tz)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|f^{(n-1)}(0)|+K_n|z|\int_0^1\frac{w(1-|tz|)}{(1-|tz|)^n}\mathrm{d}t$$
$$=|f^{(n-1)}(0)|+K_n\int_{1-|z|}^1\frac{w(t)}{t^n}\mathrm{d}t.$$

下面我们就对 n 分情况讨论。

当 $n=2$ 时,由上得

$$|f'(z)|\leqslant|f'(0)|+K_n\int_{1-|z|}^1\frac{w(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|f'(0)|+K_n\int_{1-|z|}^2\frac{w(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|f'(0)|+c(w)\frac{w(1-|z|)}{1-|z|},$$

这里用到了正则权函数的定义。故

$$\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(z)|\leqslant\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(0)|+c(w)\leqslant\frac{1}{w(1)}|f'(0)|+c(w)<\infty.$$

从而两边取上确界并由定理 C 就得 $f\in A_w$。

当 $n\geqslant3$ 时

$$|f^{(n-1)}(0)|\leqslant|f^{(n-1)}(0)|+K_n\int_{1-|z|}^1\frac{w(t)}{t^n}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|f^{(n-1)}(0)|+K_n\frac{w(1-|z|)}{1-|z|}\int_{1-|z|}^1\frac{1}{t^{n-1}}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|f^{(n-1)}(0)|+K_n\frac{w(1-|z|)}{1-|z|}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{(1-|z|)^{n-2}}-1\right)$$
$$=|f^{(n-1)}(0)|+\frac{K_n}{n-2}\cdot\frac{w(1-|z|)}{(1-|z|)^{n-1}}-\frac{K_n}{n-2}\cdot\frac{w(1-|z|)}{1-|z|}.$$

从而有

$$\frac{(1-|z|)^{n-1}}{w(1-|z|)}|f^{(n-1)}(z)|\leqslant\frac{(1-|z|)^{n-1}}{w(1-|z|)}|f^{(n-1)}(0)|+\frac{K_n}{n-2}-\frac{K_n}{n-2}(1-|z|)^{n-2}$$
$$\leqslant\frac{1}{w(1)}|f^{(n-1)}(0)|+\frac{K_n}{n-2}<\infty.$$

故

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|)^{n-1}}{w(1-|z|)}|f^{(n-1)}(z)|<\infty.$$

再从上式出发重复上述过程 $n-2$ 次,最终可得

$$\sup_{z\in D}\frac{1-|z|}{w(1-|z|)}|f'(z)|<\infty,$$

再由定理 C 得 $f\in A_w$。 ▌

注 K Zhu[13]给出了单位圆盘上解析 Lipschitz 函数的高阶导数刻画,B Li 和 C Ouyang[7]将这个结论推广到复球上。我们这里的结论是关于加权解析 Lipschitz 函数的,这个结论可望推广到复球上。需要指出的是,加权解析 Lipschitz 空间可以用来描述加权 Bergman 空间的对偶空间。所以,我们上面得到的结论可以看作是加权 Bergman 空间的对偶空间的高阶导数刻画。

定理 4.3 设 $f\in A_w$,$n\geqslant 1$。若 w 是一个正则权函数,则下列命题等价

(a) $\|f\|_{\Lambda_w(\bar{D})}<\infty$;

(b) $\mathrm{d}\mu_f(z)\overset{\text{def}}{=}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|\mathrm{d}m(z)$是一个 Bergman-Carleson 测度。

证 由定理 4.2 和定理 C 知,条件(a)与$\sup\limits_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|<\infty$是等价的。故只需证(b)与$\sup\limits_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|<\infty$的等价性。

若 $K_n=\sup\limits_{z\in D}\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)|<\infty$,则

$$\begin{aligned}\sup_{a\in D}\int_D|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}\mu_f(z)&=\sup_{a\in D}\int_D\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)||\varphi'(z)|^2\mathrm{d}m(z)\\&\leqslant K_n\sup_{a\in D}\int_D|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}m(z)=K_n\pi<\infty.\end{aligned}$$

故由定理 D 得,$\mathrm{d}\mu_f(z)$是一个 Bergman-Carleson 测度。

反之,假设 $\mathrm{d}\mu_f(z)$是 Bergman-Carleson 测度,则还是由定理 D 知

$$\sup_{a\in D}\int_D|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}\mu_f(z)<\infty.$$

取定 $r(0<r<1)$,由次调和性得

$$|g(0)|\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(0,r)}|g(\xi)|\mathrm{d}m(\xi),\ \forall g\in H(D).$$

令 $g=f^{(n)}\circ\varphi_a$,则

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(a)|&\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(0,r)}|f^{(n)}(\varphi_a(z))|\mathrm{d}m(z)\\&=\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)}|f^{(n)}(z)||\varphi_a'(z)|^2\mathrm{d}m(z)\\&\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_D|f^{(n)}(z)||\varphi_a'(z)|^2\mathrm{d}m(z).\end{aligned}$$

又对 $z\in D(a,r)$,由引理 3.5 我们有

$$\frac{1-r}{1+r}\leqslant\frac{1-|z|^2}{1-|a|^2}\leqslant\frac{1+r}{1-r},$$

从而

$$\frac{1-r}{2(1+r)}\leqslant\frac{1-|a|}{1-|z|}\leqslant\frac{2(1+r)}{1-r}.$$

故

$$\begin{aligned}\frac{(1-|a|)^n}{w(1-|a|)}|f^{(n)}(a)|&\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_D\frac{(1-|a|)^n}{w(1-|a|)}|f^{(n)}(z)||\varphi_a{}'(z)|^2\mathrm{d}m(z)\\&\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\Big[\frac{2(1+r)}{1-r}\Big]^{n+1}\int_D\frac{(1-|z|)^n}{w(1-|z|)}|f^{(n)}(z)||\varphi_a{}'(z)|^2\mathrm{d}m(z)\\&=\frac{2^{n+1}(1+r)^{n+1}}{\pi r^2(1-r)^{n+1}}\int_D|\varphi_a{}'(z)|^2\mathrm{d}\mu_f(z)<\infty,\end{aligned}$$

(第二个不等号用到了权函数的定义)。从而两边取上确界即得

$$\sup_{a\in D}\frac{(1-|a|)^n}{w(1-|a|)}|f^{(n)}(a)|<\infty.$$ ▌

在本节的最后,我们给出 A_w 类似于 BMO 空间指数衰减的 John-Nirenberg 定理。

定理 4.4 若 w 和 $w^p(1<p<\infty)$都是正则权函数,则存在常数 $c(w)>0$ 使得,对任何 $f\in A_w$,弧段 $I\subset T$ 及 $t>0$,有

$$\sigma\{e^{i\theta}\in I:|f(e^{i\theta})-f_I|\geqslant t\}\leqslant c(w)|I|\exp\Big\{-\frac{c(w)t}{w(|I|)M_p(f)}\Big\}.$$

这里 $M_p(f)$见引理 3.4 中的定义。

证 对任意弧段 $I\subset T$ 及 $t>0$,由引理 3.4 和引理 3.7 得

$$\begin{aligned}&\sigma\{e^{i\theta}\in I:|f-f_I|\geqslant t\}\\&=\int_{\{e^{i\theta}\in I:|f-f_I|\geqslant t\}}1\cdot\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\int_{\{e^{i\theta}\in I:|f-f_I|\geqslant t\}}\exp\Big\{-\frac{t}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{|f-f_I|}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\Big\}\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\exp\Big\{-\frac{t}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\Big\}|I|\cdot\frac{1}{|I|}\int_I\exp\Big\{\frac{|f-f_I|}{w(|I|)\|f\|_{\Lambda_w(T)}}\Big\}\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant c(w)|I|\exp\Big\{-\frac{c(w)t}{w(|I|)M_p(f)}\Big\}.\end{aligned}$$ ▌

注 定理 4.4 给出了加权解析 Lipschitz 函数局部振动的特性。事实上,上述结论可以改写为

$$\frac{1}{|I|}\sigma\{e^{i\theta}\in I:|f(e^{i\theta})-f_I|\geqslant t\}\leqslant c(w)\exp\Big\{-\frac{c(w)t}{w(|I|)M_p(f)}\Big\}.$$

此时,不等式左边是 f 在 I 上远离均值的平均偏离程度,而右边是一种指数衰减。

参 考 文 献

[1] Blasco O. Operators on weighted Bergman spaces $(0<p\leqslant 1)$ and applications. Duke Math J, 1992, **66**: 443－467

[2] Duren P. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970

[3] Dyakonov K M. Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions. Acta Math, 1997, **178**: 143－167

[4] Garnett J. Bounded Analytic Function. New York: Academic Press, 1981

[5] Jévtic M. A note on the carleson measure characterization of BMOA functions on the unit ball. Complex Variables, 1992, **17**: 189－194

[6] 黄玲娣. 加权解析 Lipschitz 空间的等价模与复合算子[学位论文]. 武汉:中国科学院武汉物理与数学研究所, 2004

[7] Li B, Ouyang C H. Higher radial derivative of bloch type functions. Acta Math Sci, 2002, **22**B: 433－445

[8] Pavlovic M. On Dyakonov′s paper "Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions". Acta Math, 1999, **183**: 141－143

[9] Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of C^n. New York: Springer-Verlag, 1980

[10] 史济怀. 多复变函数论基础. 北京:高等教育出版社, 1996

[11] Xiao J. Interpolation sequences for $A^{\infty}(\varphi)$ -functions. Science in China, 1992, **35**A: 907－916

[12] Zhao R H. On α -bloch functions and VMOA. Acta Math Sci, 1996, **16**: 339－360

[13] Zhu K. Bloch type spaces of analytic functions. Rocky Mountain J Math, 1993, **23**: 1143－1177

Equivalent Norms on Weighted Analytic Lipschitz Spaces

Huang Lingdi

(*Department of Mathematics*, *Shoxing University*, *Shanxing* 312000)

Chen Zeqian

(*Wuhan Institute of Physics and Mathematics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Wuhan* 430071)

Abstract: In this paper, the authors first extend Theorem 1 in [3] and obtain the characterization of weighted analytic Lipschitz functions in terms of p -Garsia modules. Secondly, the authors characterize them by using higher derivatives and Bergman-Carleson measures, respectively. Firnally, the authors show the associated expondntial decay effect as similar to John-Nirenberg′s theorem of BMO spaces.

Key words: Weighted analytic Lipschitz spaces; p -Garsia modules; Bergman-Carteson measures.

MR(2000) Subject Classification: 32A37