2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

具非局部源退化抛物型方程组的一致爆破模式 *

蒋良军
(南京晓庄学院数学系　江苏南京 210017)
李慧玲
(东南大学数学系　江苏南京 210018)

摘要：考虑带有齐次 Dirichlet 边界条件且具有非局部源项的退化抛物型方程组正解的爆破性质. 在适当条件下，建立了该问题解的局部存在性并证明解在有限时刻爆破，此外，还导出了解的两个分量同时爆破的必要条件，并得到了该问题解的一致爆破模式.

关键词：退化抛物型方程组；非局部源；一致爆破模式；同时爆破.

MR(2000) 主题分类: 35K15; 35K65　**中图分类号**: O175.26　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1　背景介绍与主要结论

本文研究如下具有非局部源的退化抛物型方程组的正解的爆破性质：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u^m=\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha u+\beta v}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\ \ t>0\\ v_t-\Delta v^n=\displaystyle\int_\Omega e^{pu+qv}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\ \ t>0\\ u(x,t)=v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ \ t>0\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\overline{\Omega}\end{cases}\tag{1.1}$$

其中有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^\mathbf{N}$, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，常数 $m,n>1$, 非负常数 α,β,p,q 满足 $\alpha,q>0$.

对于具非局部源半线性抛物型方程解的一致爆破性质，已经有许多的研究结果 (参见文 [1, 3] 及其参考文献). 其中重要的工作由 Philippe Souplet 做出.　Souplet 在文 [1] 中研究了单个具有非局部源半线性抛物型方程，得到其正解的爆破速率在区域的任意紧子集内是一致的，文 [5, 8, 9] 将 Souplet 所建立的方法推广到方程组：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u^m=\displaystyle\int_\Omega v^\beta\ e^{\alpha u}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\ \ t>0\\ v_t-\Delta v^n=\displaystyle\int_\Omega u^p\ e^{qv}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\ \ t>0\\ u(x,t)=v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ \ t>0\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\overline{\Omega}\end{cases}\tag{1.2}$$

收稿日期：2007-12-05; 修订日期：2008-10-16
E-mail: : jlj158@163.com
* 基金项目：国家自然科学基金 (批准号：　107010024) 资助项目

当 $m=n=1$ 时， (1.2) 是一个带非局部源的半线性抛物型方程组.

文 [9] 研究 $\alpha>0,q>0,p\geq 0,\beta\geq 0$ 情形，得到极限 $\lim\limits_{t\to T^*}\left|\ln(T^*-t)\right|^{-1}u(x,t)=1/a$ 与 $\lim\limits_{t\to T^*}\left|\ln(T^*-t)\right|^{-1}v(x,t)=1/q$ 在 Ω 的任意紧子集内一致收敛.

文 [8] 研究 $\alpha=q=0,\beta\geq 1,p\geq 1,p\ \cdot\beta>1$ 情形，得到极限 $\lim\limits_{t\to T^*}(T^*-t)^{(\beta+1)/(\beta p-1)}u(x,t)=C_1$(常数) 与 $\lim\limits_{t\to T^*}(T^*-t)^{(p+1)/(\beta p-1)}v(x,t)=C_2$(常数) 在 Ω 的任意紧子集内一致收敛，其中 T^* 表示 (u,v) 的爆破时间.

当 $m>1,n>1$ 时，(1.2) 是退化的. 文 [5] 研究 $\alpha=q=0,\beta>m>1,p>n>1$ 情形，得到爆破速率与半线性抛物型方程组爆破速率同阶. 即极限 $\lim\limits_{t\to T^*}(T^*-t)^{(\beta+1)/(\beta p-1)}u(x,t)=C_3$(常数) 与 $\lim\limits_{t\to T^*}(T^*-t)^{(p+1)/(\beta p-1)}v(x,t)=C_4$(常数) 在 Ω 的任意紧子集内一致收敛，其中 T^* 表示 (u,v) 的爆破时间.

本文的主要目的是，建立退化抛物型方程组 (1.1) 在区域 Ω 内的一致爆破模式. 同样，爆破速率的证明方法是对 Souplet 工作的改进，但方法与文 [5] 不同，值得注意的是，在这里，退化抛物型方程组与半线性抛物型方程组爆破速率相同，而与 m,n 无关. 本文第二节证明了 (1.1) 的古典解的局部存在性，以及在有限时刻爆破；第三节讨论了 (1.1) 的古典解的两个分量在有限时刻同时爆破的必要条件，并研究 (1.1) 的解在区域 Ω 内部的一致爆破模式. 我们假设初值 $u_0(x),v_0(x)$ 满足下列条件：

(H_1) $u_0(x),\ v_0(x)\in C(\overline{\Omega})\bigcap C^{2+\mu}(\Omega)$, 其中 $\mu\in(0,1)$; $u_0(x),\ v_0(x)>0,\ x\in\Omega$.

(H_2) $u_0(x)\big|_{\partial\Omega}=v_0(x)\big|_{\partial\Omega}=0,\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma}\big|_{\partial\Omega}<0,\frac{\partial v_0(x)}{\partial\gamma}\big|_{\partial\Omega}<0$. 其中 γ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

(H_3) $\Delta u_0^m+\int_\Omega e^{\alpha u_0+\beta v_0}\mathrm{d}x>0,\ \Delta v_0^n+\int_\Omega e^{pu_0+qv_0}\mathrm{d}x>0,\quad x\in\Omega.$

(H_4) $\Delta u_0^m<0,\Delta v_0^n<0,\quad x\in\Omega.$

给出一对满足条件 (H_1)-(H_4) 的初值函数 $u_0=k\varphi^{\frac{1}{m}}(x)>0,\ v_0=k\varphi^{\frac{1}{n}}(x)>0$, 其中 $k>0$ 常数， φ 是特征值问题 $-\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x),\quad x\in\Omega;\quad \varphi(x)=0,\quad x\in\partial\Omega$ 第一特征值对应的特征函数。容易验证， $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1),(H_2)$ 和 (H_4), 取 k 适当大，就可以保证 (H_3) 成立。本文主要结论如下：

定理 1 设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_2)$, 则

(1) 问题 (1.1) 存在唯一的局部古典正解 $(u(x,t),v(x,t))$;

(2) 当初值适当大时，问题 (1.1) 的古典解 (u,v) 在有限时刻爆破.

定理 2 设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_4)$, (u,v) 是问题 (1.1) 的古典解. 如果 u 与 v 在时刻 T^* 同时爆破，则

(1) $p\geq\alpha$ 与 $\beta\geq q$ 同时成立；或者 (2) $p<\alpha$ 与 $\beta<q$ 同时成立.

定理 3 在定理 2 的假设之下，下列极限式在 Ω 的任意紧子集上一致地成立.

(1) 如果 $(p-\alpha)(\beta-q)>0$, 则

$$\lim_{t\to T^*}u(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{\beta-q}{\beta p-\alpha q},$$

$$\lim_{t\to T^*}v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{p-\alpha}{\beta p-\alpha q};$$

(2) 如果 $p>\alpha$ 且 $\beta=q>0$, 则

$$\lim_{t\to T^*}u(x,t)\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\frac{1}{p-\alpha},$$

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{q};$$

(3) 如果 $p=\alpha>0$ 且 $\beta>q$, 则

$$\lim_{t\to T^*} u(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{\alpha},$$

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\frac{1}{\beta-q};$$

(4) 如果 $p=\alpha$ 且 $\beta=q$, 则

$$\lim_{t\to T^*} u(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta},$$

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{p+q}.$$

2 解的局部存在性及在有限时刻爆破

记 $Q_T=\Omega\times(0,T]$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T]$.

首先，我们需要给出如下比较原理：

引理 2.1 设 $(u(x,t),v(x,t))\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$, 满足

$$\begin{cases} u_t-d_1\Delta u\ge \displaystyle\sum_{j=1}^N b_{1j}u_{x_j}+c_{11}u+\int_\Omega(c_{12}u+c_{13}v)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q_T,\\ v_t-d_2\Delta v\ge \displaystyle\sum_{j=1}^N b_{2j}v_{x_j}+c_{21}v+\int_\Omega(c_{22}u+c_{23}v)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q_T,\\ u(x,t)\ge 0,\ v(x,t)\ge 0, & (x,t)\in S_T,\\ u(x,0)\ge 0,\ v(x,0)\ge 0, & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中 $c_{ij}(x,t)(i=1,2;j=1,2,3)$ 与 $b_{ij}(x,t)(i=1,2;j=1,2,\cdots,N)$ 分别是定义在 $\overline{Q}_T$ 上的连续有界函数，且在 Q_T 内，

$$c_{ij}(x,t)\ge 0,(i=1,2;j=2,3),\ d_i(x,t)\ge 0,(i=1,2).$$

则在 $\overline{Q_T}$ 上， $u(x,t),v(x,t)\ge 0$.

证明类似于文 [2] 中引理 2.2.1, 略.

为了证明问题 (1.1) 的局部可解性，我们考虑下列正则化问题：

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t}-\Delta u_\varepsilon^m=\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha u_\varepsilon+\beta v_\varepsilon}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ v_{\varepsilon t}-\Delta v_\varepsilon^n=\displaystyle\int_\Omega e^{pu_\varepsilon+qv_\varepsilon}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)=\varepsilon, & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ u_\varepsilon(x,0)=u_0(x)+\varepsilon,\ v_\varepsilon(x,0)=v_0(x)+\varepsilon, & x\in\overline{\Omega} \end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $0<\varepsilon<1$, 设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_2)$, 运用 Schauder 不动点定理，仿文 [3] 中定理 $A.4'$ 的证明方法，利用文 [6] 的引理 3.1, 以及文 [10] 与 [11] 中的相关估计式，可得：

存在 $T_\varepsilon^* \in (0,+\infty]$, 使得问题 (2.1) 在 $\overline{\Omega}\times[0,T_\varepsilon^*)$ 上有极大定义解 $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$, 且对某个 $\mu\in(0,1)$, 有 $u_\varepsilon,v_\varepsilon\in C(\overline{Q_T})\bigcap C^{2+\mu}(Q_T)$.

利用引理 2.1, 可以直接证明问题 (2.1) 的一个比较原理.

引理 2.2 称 $(w(x,t),z(x,t))$ 为问题 (2.1) 的一个上解 (下解), 如果函数 $w(x,t),z(x,t)\in C(\overline{Q_T})\bigcap C^{2,1}(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} w_t \geq (\leq)\Delta w^m + \displaystyle\int_\Omega e^{\alpha w+\beta z}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ z_t \geq (\leq)\Delta z^n + \displaystyle\int_\Omega e^{pw+qz}\mathrm{d}x, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ w(x,t)\geq(\leq)\varepsilon,\ z(x,t)\geq(\leq)\varepsilon, & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ w(x,0)\geq(\leq)u_0(x)+\varepsilon,\ z(x,0)\geq(\leq)v_0(x)+\varepsilon, & x\in\overline{\Omega} \end{cases}$$

假设 $u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t)\in C(\overline{Q_T})\bigcap C^{2,1}(Q_T)$ 是问题 (2.1) 的解，则在 $\overline{Q_T}$ 上，有

$$w(x,t)\geq(\leq)u_\varepsilon(x,t),\ z(x,t)\geq(\leq)v_\varepsilon(x,t).$$

由引理 2.2, 易得问题 (2.1) 的解 $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ 为正，且 $u_\varepsilon(x,t)\geq\varepsilon,\ v_\varepsilon(x,t)\geq\varepsilon$. 此外，还可以证明：

引理 2.3 设 $(H_1)-(H_2)$ 成立， $1\geq\varepsilon_1\geq\varepsilon_2>0$, $(u_{\varepsilon_1},v_{\varepsilon_1})$ 与 $(u_{\varepsilon_2},v_{\varepsilon_2})$ 为问题 (2.1) 分别对应于 ε_1 和 ε_2 的古典解，则在 $\overline{\Omega}\times[0,T_{\varepsilon_1}^*)$ 上， $u_{\varepsilon_1}\geq u_{\varepsilon_2}, v_{\varepsilon_1}\geq v_{\varepsilon_2}$, 且 $T_{\varepsilon_1}^*\leq T_{\varepsilon_2}^*$.

由引理 2.3, $u_\varepsilon(x,t)$ 和 $v_\varepsilon(x,t)$ 关于 ε 单调不减，且

$$0\leq u_\varepsilon(x,t)\leq u_1(x,t),\ 0\leq v_\varepsilon(x,t)\leq v_1(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T_1^*). \tag{2.2}$$

故极限 $T^*=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}T_\varepsilon^*$ 和

$$u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to0^+}u_\varepsilon(x,t),\quad v(x,t)=\lim_{\varepsilon\to0^+}v_\varepsilon(x,t) \tag{2.3}$$

存在，且对任意的 $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T^*)$, 极限 (2.3) 逐点收敛.

设 λ_1 是下列特征值问题的第一特征值：

$$-\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x),\ x\in\Omega;\quad \varphi(x)=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{2.4}$$

与之对应的特征函数记为 $\varphi(x)$, 则 $\lambda_1>0$ 且在 Ω 内， $\varphi(x)>0$. 对 $\varphi(x)$ 单位化，使得 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\varphi(x)=1$.

为证明由 (2.3) 式所定义的 $(u(x,t),v(x,t))$ 是 (1.1) 的正古典解，还需要给出 $u_\varepsilon,v_\varepsilon$ 的一致正下界. 由条件 $(H_1)-(H_2)$ 知，存在正常数 k, 使得

$$u_0^m(x)\geq2k\varphi(x),\ v_0^n(x)\geq2k\varphi(x),\quad x\in\overline{\Omega}.$$

引理 2.4 设 $(H_1)-(H_2)$ 成立,

$$\rho=\max\left\{\lambda_1m(k+1)^{1-\frac{1}{m}},\lambda_1n(k+1)^{1-\frac{1}{n}}\right\},$$

则对于所有 $\varepsilon\in(0,1]$, (2.1) 的解 $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ 满足：在 $\overline{\Omega}\times[0,T_\varepsilon^*)$ 上

$$u_\varepsilon(x,t)\geq\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)\right]^{\frac{1}{m}},\quad v_\varepsilon(x,t)\geq\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

证 设 $\underline{u}_{\varepsilon}(x,t)=\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)+\frac{\varepsilon^m}{2}\right]^{\frac{1}{m}}, \underline{v}_{\varepsilon}(x,t)=\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)+\frac{\varepsilon^n}{2}\right]^{\frac{1}{n}}$. 将 $(\underline{u}_{\varepsilon},\underline{v}_{\varepsilon})$ 代入 (2.1), 得

$$
\begin{aligned}
&\underline{u}_{\varepsilon t}-\Delta\underline{u}_{\varepsilon}^{m}-\int_\Omega e^{\alpha\underline{u}_{\varepsilon}+\beta\underline{v}_{\varepsilon}}\mathrm{d}x\\
\le{}&\frac{1}{m}\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)+\frac{\varepsilon^m}{2}\right]^{\frac{1}{m}-1}\left(-\rho ke^{-\rho t}\varphi(x)\right)+\lambda_1 ke^{-\rho t}\varphi(x)\\
={}&-ke^{-\rho t}\varphi(x)\left[-\lambda_1+\frac{\rho}{m}\left(ke^{-\rho t}\varphi(x)+\frac{\varepsilon^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}-1}\right]\\
\le{}&-ke^{-\rho t}\varphi(x)\left[-\lambda_1+\frac{\rho}{m}(k+1)^{\frac{1}{m}-1}\right]\le 0,\qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T_\varepsilon^*).
\end{aligned}
$$

同理可证

$$\underline{v}_{\varepsilon t}-\Delta\underline{v}_{\varepsilon}^{n}-\int_\Omega e^{p\underline{u}_{\varepsilon}+q\underline{v}_{\varepsilon}}\mathrm{d}x\le 0,\qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T_\varepsilon^*).$$

注意到 $[a+b]^{\frac{1}{m}}\le[2\max(a,b)]^{\frac{1}{m}}\le(2a)^{\frac{1}{m}}+(2b)^{\frac{1}{m}}$, 所以

$$\underline{u}_{\varepsilon}(x,0)\le[2k\varphi(x)]^{\frac{1}{m}}+\varepsilon\le u_0(x)+\varepsilon,\ \ \underline{v}_{\varepsilon}(x,0)\le[2k\varphi(x)]^{\frac{1}{n}}+\varepsilon\le u_0(x)+\varepsilon,\quad x\in\overline{\Omega}.$$

此外，在 $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 上， $\underline{u}_{\varepsilon}(x,t)\le\varepsilon, \underline{v}_{\varepsilon}(x,t)\le\varepsilon$. 因此，由引理 2.2 知,

$$u_\varepsilon\ge\underline{u}_{\varepsilon}\ge\left[ke^{-\rho t}\varphi\right]^{\frac{1}{m}},\ \ v_\varepsilon\ge\underline{v}_{\varepsilon}\ge\left[ke^{-\rho t}\varphi\right]^{\frac{1}{n}},\forall\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T_\varepsilon^*).$$

联立 (2.2) 式可知，在 $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T_1^*)$ 上,

$$\left[ke^{-\rho t}\varphi(x)\right]^{\frac{1}{m}}\le u_\varepsilon(x,t)\le u_1(x,t),\ \ \left[ke^{-\rho t}\varphi(x)\right]^{\frac{1}{n}}\le v_\varepsilon(x,t)\le v_1(x,t).$$

定理 1 的证明 (1) 由标准的讨论方法 (见文 [4] 的引理 2.3, 或文 [5]) 推出，当 $\varepsilon\to 0$ 时，在 $C^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上， $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 一致收敛于 (u,v) , 且 (u,v) 在边界和 $t=0$ 处连续. 这说明由 (2.3) 式所定义的 (u,v) 为问题 (1.1) 在 $\Omega\times(0,T^*)$ 上的古典正解. 再由标准的方法可得解的唯一性 (见 [6]). 综上，定理 1 的结论 (1) 成立.

(2) 由 (2.3) 式与引理 2.4 知,

$$u(x,t),\ v(x,t)>0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),$$

其中 $T>0$ 是 (u,v) 的最大存在时间. 当 $\alpha>0$ 时，有

$$u_t-\Delta u^m\ge\int_\Omega e^{\alpha u}\mathrm{d}x,\ \ (x,t)\in\Omega\times(0,T).$$

类似于文 [7] 中定理 4.2 的分析，易明：当初值 $u_0(x)$ 适当大时，问题 (1.1) 的解 (u,v) 的分量 u 在有限时刻爆破.

同理可证，当 $q>0$ 时，对于大初值， (1.1) 的解在有限时刻爆破.

3 爆破模式

本节研究方程组 (1.1) 的解在区域内部的一致爆破速率. 为了书写方便，记

$$g_1(t)=\int_\Omega e^{\alpha u+\beta v}\mathrm{d}x,\ G_1(t)=\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s,\ g_2(t)=\int_\Omega e^{pu+qv}\mathrm{d}x,\ G_2(t)=\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s.\quad (3.1)$$

引理 3.1 设 $u_0(x), v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_4)$, (u,v) 是 (1.1) 在 $\overline{\Omega}\times(0,T^*)$ 上的解. 则

$$\Delta u^m(x,t)\le 0,\ \Delta v^n(x,t)\le 0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T^*).$$

此外，存在正常数 C_{0u} 和 C_{0v}, 使

$$u(x,t)\le C_{0u}+G_1(t),\ v(x,t)\le C_{0v}+G_2(t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T^*). \tag{3.2}$$

证 由条件 (H_3) 知，在 Ω 内，

$$\Delta u_0^m+\int_\Omega e^{\alpha u_0+\beta v_0}\mathrm{d}x>0,\quad \Delta v_0^n+\int_\Omega e^{pu_0+qv_0}\mathrm{d}x>0.$$

结合引理 2.1, 易知，当 ε 充分小时，在 $\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 内有 $u_{\varepsilon t},\ v_{\varepsilon t}\ge 0$.

设 $w=u_\varepsilon^m>\varepsilon^m,\ z=v_\varepsilon^n>\varepsilon^n$, 则由 (2.1) 式知,

$$\frac{1}{m}w^{\frac{1}{m}-1}w_t=\Delta w+\int_\Omega e^{\alpha w^{\frac{1}{m}}+\beta z^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}x,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T_\varepsilon^*).$$

所以

$$\begin{aligned}(\Delta w)_t&=mw^{1-\frac{1}{m}}\Delta(\Delta w)+2m\nabla(w^{1-\frac{1}{m}})\cdot\nabla(\Delta w)\\&\quad+m\Delta(w^{1-\frac{1}{m}})\Big(\Delta w+\int_\Omega e^{\alpha w^{\frac{1}{m}}+\beta z^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}x\Big)\\&=mu_\varepsilon^{m-1}\Delta(\Delta w)+2m(m-1)u_\varepsilon^{m-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla(\Delta w)\\&\quad+(m-1)u_\varepsilon^{-1}u_{\varepsilon t}\Delta w-m(m-1)u_\varepsilon^{m-3}u_{\varepsilon t}\big|\nabla u_\varepsilon\big|^2.\end{aligned}$$

因为在 $\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 内有 $u_\varepsilon>0, v_\varepsilon>0, u_{\varepsilon t}>0, v_{\varepsilon t}>0$, 且 $m>1$, 于是

$$\begin{aligned}&(\Delta w)_t-mu_\varepsilon^{m-1}\Delta(\Delta w)-2m(m-1)u_\varepsilon^{m-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla(\Delta w)\\&\le(m-1)u_\varepsilon^{-1}u_{\varepsilon t}\Delta w,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T_\varepsilon^*).\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.1) 知，当 $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 时， $u_{\varepsilon t}(x,t)=v_{\varepsilon t}(x,t)=0$. 所以

$$\Delta w=-\int_\Omega e^{\alpha u_\varepsilon+\beta v_\varepsilon}\mathrm{d}x<0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T_\varepsilon^*).$$

由条件 (H_4) 推出，在 Ω 内,

$$\Delta w(x,0)=\Delta(u_0+\varepsilon)^m\to\Delta u_0^m\quad(\varepsilon\to 0^+).$$

因而 ε 充分小时，在 Ω 内有 $\Delta w(x,0)<0$. 于是由最大值原理知，在 $\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 内有 $\Delta w(x,t)<0$, 即 $\Delta u_\varepsilon^m(x,t)<0$. 因此在 $\Omega\times(0,T_\varepsilon^*)$ 内， $\Delta u^m(x,t)\le 0$. 类似可得：在 $\Omega\times(0,T^*)$ 内， $\Delta v^n(x,t)\le 0$.

在 $(0,t)$ 上积分 (1.1) 中的方程，得

$$u(x,t)=u_0+\int_0^t\Delta u^m(x,s)\mathrm{d}s+G_1(t)\le C_{0u}+G_1(t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T^*).$$

类似可得

$$v(x,t)\le C_{0v}+G_2(t),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T^*),$$

其中 $C_{0u}=\max\limits_{x\in\Omega}u_0(x),C_{0v}=\max\limits_{x\in\Omega}v_0(x)$.

引理 3.2 设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_4)$,(u,v) 是 (1.1) 在 $\overline{\Omega}\times(0,T^*)$ 上的正古典解，记 $K_\rho=\{y\in\Omega:dist(y,\partial\Omega)\geq\rho>0\}$, 则存在 $C>0$, 使得在 $K_\rho\times(0,T^*)$ 上，有

$$u(x,t)\geq G_1(t)-\frac{C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big),\quad v(x,t)\geq G_2(t)-\frac{C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\Big).\quad(3.3)$$

证 定义

$$z(x,t)=G_1(t)-u(x,t),\ \beta(t)=\int_\Omega z(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T^*)\qquad(3.4)$$

其中 $\phi(x)$ 是问题 (2.4) 的第一特征值 λ_1 所对应的特征函数，且 $\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x=1$. 由 (3.4), (1.1) 式和 Green 公式得

$$\begin{aligned}\beta'(t)&=\int_\Omega(g_1(t)-u_t(x,t))\phi(x)\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\Delta u^m(x,t))\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\lambda_1\int_\Omega\phi(x)u^m(x,t))\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega\phi(x)\left(G_1(t)-z(x,t)\right)^m\mathrm{d}x\\&\leq\lambda_1\cdot2^{m-1}\int_\Omega\phi(x)\left[G_1^m(t)+(z^-(x,t))^m\right]\mathrm{d}x\\&=\lambda_1\cdot2^{m-1}\left[G_1^m(t)+\int_\Omega\phi(x)(z^-(x,t))^m\mathrm{d}x\right],\quad t\in(0,T^*),\end{aligned}\qquad(3.5)$$

其中 $z^-(x,t)=\max\{-z,0\}$. 所以由 (3.2) 知，对 $t\in(0,T^*)$, 有

$$z(x,t)=G_1(t)-u(x,t)\geq-C_{0u},\qquad\inf_\Omega z(x,t)\geq-C_{0u}.\qquad(3.6)$$

这说明 $z^-(x,t)\leq C_{0u}$, $(x,t)\in\Omega\times(0,T^*)$. 再由 (3.5) 式得

$$\beta'(t)\leq C_1G_1^m(t)+C_2,\qquad t\in(0,T^*),$$

其中 $C_1=\lambda_1\cdot2^{m-1},\ \ C_2=\lambda_1\cdot2^{m-1}C_{0u}^m$. 在 $(0,t)$ 上积分上式，得

$$\beta(t)\leq C_3\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big),\quad t\in(0,T^*).$$

联立 (3.6) 式，有

$$\int_\Omega\big|z(x,t)\big|\phi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega z\phi+2\int_\Omega z^-\phi\leq\beta(t)+2C_{0u}\leq C_4\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big).$$

因为在 $\Omega\times(0,T^*)$ 内， $-\Delta z(x,t)=\Delta u(x,t)\leq0$, 再由文 [1] 引理 4.5, 得

$$\sup_{x\in K_\rho}z(x,t)\leq\frac{C_5}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big),\quad t\in(0,T^*)$$

即存在 $C>0$, 使得在 $K_\rho\times(0,T^*)$ 上，有

$$u(x,t)\geq G_1(t)-\frac{C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big).$$

同理可证

$$v(x,t)\geq G_2(t)-\frac{C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\Big).$$

引理 3.3 设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件 $(H_1)-(H_4)$, (u,v) 是 (1.1) 在 $\overline{\Omega}\times(0,T^*)$ 上的古典解，则

(1) $\lim\limits_{t\to T^*}\max\limits_{x\in\Omega}u(x,t)=\infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to T^*}G_1(t)=\infty$, 此时，在 Ω 的任意紧子集内一致地有

$$\lim_{t\to T^*}\frac{u(x,t)}{G_1(t)}=\lim_{t\to T^*}\frac{\big\|u(t)\big\|_\infty}{G_1(t)}=1. \tag{3.7}$$

(2) $\lim\limits_{t\to T^*}\max\limits_{x\in\Omega}v(x,t)=\infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to T^*}G_2(t)=\infty$, 此时，在 Ω 的任意紧子集内一致地有

$$\lim_{t\to T^*}\frac{v(x,t)}{G_2(t)}=\lim_{t\to T^*}\frac{\big\|v(t)\big\|_\infty}{G_2(t)}=1. \tag{3.8}$$

证 在 (1.1) 的方程的两端同乘以 $\phi(x)$, 然后在 Ω 上积分，得

$$\int_\Omega\phi(x)u_t(x,t)\mathrm{d}x=-\lambda_1\int_\Omega\phi(x)u^m(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega e^{\alpha u(x,t)+\beta v(x,t)}\mathrm{d}x,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T^*),$$

其中 $\phi(x)$ 是问题 (2.4) 的第一特征值 λ_1 所对应的特征函数，满足：在 Ω 内有 $\phi(x)>0$, 且 $\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x=1$. 从 0 到 t 积分可知，对 $t\in(0,T^*)$, 有

$$\begin{aligned}G_1(t)&=-\int_\Omega\phi(x)u_0(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi(x)u(x,t)\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\\G_2(t)&=-\int_\Omega\phi(x)v_0(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi(x)v(x,t)\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^t\int_\Omega\phi(x)v^n(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.9}$$

(1) 设 $\lim\limits_{t\to T^*}G_1(t)=\infty$, 则由 (3.9) 知，

$$\lim_{t\to T^*}\left[\int_\Omega\phi(x)u(x,t)\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]=\infty,$$

于是

$$\lim_{t\to T^*}\int_\Omega\phi(x)u(x,t)\mathrm{d}x=\infty\quad\text{或}\quad\lim_{t\to T^*}\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\infty.$$

故 $\lim\limits_{t\to T^*}\max\limits_{x\in\Omega}u(x,t)=+\infty$, 即 $u(x,t)$ 在时刻 T^* 爆破.

反过来，设 $\lim\limits_{t\to T^*}\max\limits_{x\in\Omega}u(x,t)=+\infty$. 则由 (3.2) 式知，为证 $\lim\limits_{t\to T^*}G_1(t)=+\infty$, 只要说明 (3.7) 成立. 为证 (3.7), 先证

$$G_1(t)\sim\int_\Omega\phi(x)u(x,t)\mathrm{d}x,\qquad t\to T^*. \tag{3.10}$$

在 (3.9) 式中， $\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$ 在 $(0,T^*)$ 内单调不减，因此，如果在 $(0,T^*)$ 内有 $\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s<\infty$, 则由 (3.9) 知，(3.10) 成立；如果 $\lim\limits_{t\to T^8}\int_0^t\int_\Omega\phi(x)u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=$

∞, 注意到

$$G_1(t) = \int_0^t \int_\Omega e^{\alpha u(x,s)+\beta v(x,s)} \mathrm{d}x\mathrm{d}s \ge \int_0^t \int_\Omega e^{\alpha u(x,s)} \mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\ge \frac{1}{(2m)!} \int_0^t \int_\Omega [\alpha u(x,s)]^{2m} \mathrm{d}x\mathrm{d}s \ge c_0 \left[\int_0^t \int_\Omega u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]^2,$$

其中 c_0 正常数，那么就有

$$\lim_{t\to T^*} \frac{\int_0^t \int_\Omega \phi(x) u^m(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s}{G_1(t)} = 0.$$

于是由 (3.9) 知，此时 (3.10) 也成立．所以利用 (3.10) 式，仿上述证明，可得

$$\lim_{t\to T^*} \frac{\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s}{G_1(t)} = \lim_{t\to T^*} \frac{\int_0^t \left(\int_\Omega \phi(x)u(x,s)\mathrm{d}s\right)^m \mathrm{d}s}{\int_0^t \int_\Omega e^{\alpha u(x,s)+\beta v(x,s)}\mathrm{d}x\mathrm{d}s} = 0. \tag{3.11}$$

由引理 3.1 与引理 3.2, 得

$$G_1(t) - \frac{C}{\rho^{N+1}}\Big(1 + \int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big) \le u(x,t) \le C_{0u} + G_1(t).$$

于是

$$\lim_{t\to T^*} \frac{u(x,t)}{G_1(t)} = \lim_{t\to T^*} \frac{\|u(t)\|_\infty}{G_1(t)} = 1.$$

类似可证结论 (2).

定义 设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是 $[0,T^*)$ 上的实值函数，如果 $\exists K^* \ge k > 0$ 和 $t_0 < T^*$, 使得 $\forall\, t \in [t_0,T^*)$, 有 $kf(t) \le g(t) \le K^* f(t)$, 则称当 $t\to T^*$ 时，函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 对等，记为

$$f(t) \simeq g(t) \quad (t\to T^*).$$

有时，我们用 $f(t)\sim g(t)$ 来表示 $\lim\limits_{t\to T^*} f(t)/g(t) = 1$.

显然，对等关系有下列性质：

1. 设 f 与 g 是非负函数，如果 $f\simeq g$, 常数 $\mu\in\mathbf{R}$, 则 $f^\mu \simeq g^\mu$;
2. 若 $f\simeq g$, 且 $g\simeq h$, 则 $f\simeq h$;
3. 设 f,g,φ 与 ψ 是非负函数，如果 $f\simeq g$, $\varphi\simeq\psi$, 则 $\varphi f\simeq \psi g$;
4. 若 $\lim\limits_{t\to T^*} f(t)/g(t) = C > 0$, 则 $f\simeq g \ \ (t\to T^*)$;
5. 若 $f\simeq g \ \ (t\to T^*)$, 则存在 $A\in[0,T^*)$, 使 $\int_A^t f \simeq \int_A^t g, \ \ t\to T^*$;
6. 假设 $t\to T^*$ 时， $f\to\infty,\ g\to\infty$ 或 $f\to 0^+,\ g\to 0^+$. 如果 $f\simeq g\ (t\to T^*)$, 则

$$\ln f \sim \ln g \ \ (t\to T^*), \qquad 即 \ \ \lim_{t\to T^*} \frac{\ln f}{\ln g} = 1.$$

引理 3.4 设 $(H_1)-(H_4)$ 成立，(u,v) 是 (1.1) 在 $\overline{\Omega}\times(0,T^*)$ 上的古典解．若 u 与 v 在时刻 T^* 同时爆破，则

$$G_1'(t) = g_1(t) \simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}, \ \ G_2'(t) = g_2(t) \simeq e^{qG_2(t)+pG_1(t)}, \qquad t\to T^*.$$

证 由引理 3.1 知，在 $\Omega\times(0,T^*)$ 上有

$$0\le e^{\alpha u+\beta v}\le e^{\alpha[C+G_1(t)]+\beta[C+G_2(t)]}=e^{(\alpha+\beta)C}e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}.$$

在 Ω 上积分上式，得

$$g_1(t)=\int_\Omega e^{\alpha u+\beta v}\mathrm{d}x\le e^{(\alpha+\beta)C}\big|\Omega\big|e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}.$$

取 $K^*=\big|\Omega\big|\max\left\{e^{(\alpha+\beta)C},e^{(p+q)C}\right\}>0$, 则

$$G_1'=g_1(t)=\int_\Omega e^{\alpha u+\beta v}\mathrm{d}x\le K^*e^{aG_1(t)+\beta G_2(t)},\qquad\forall\ t\in(0,T^*).\tag{3.12}$$

同理可得

$$G_2'(t)=g_2(t)=\int_\Omega e^{pu+qv}\mathrm{d}x\le K^*e^{pG_1(t)+qG_2(t)},\qquad\forall\ t\in(0,T^*).$$

另一方面，由引理 3.2 知， $\forall(x,t)\in k_\rho\times(0,T^*)$, 有

$$e^{\alpha u+\beta v}\ge e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)-\frac{\alpha C}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{\beta C}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\right)},$$

$$e^{pu+qv}\ge e^{pG_1(t)+qG_2(t)-\frac{pC}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{qC}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\right)}.$$

上式左端在 Ω 上积分，右端在 k_ρ 上积分，得

$$g_1(t)\ge\big|k_\rho\big|e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)-\frac{\alpha C}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{\beta C}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\right)}.\tag{3.13}$$

同理

$$g_2(t)\ge\big|k_\rho\big|e^{pG_1(t)+qG_2(t)-\frac{pC}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{qC}{\rho^{N+1}}\left(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\right)}.\tag{3.14}$$

由定义 1, 结合 (3.12) 与 (3.13) 式，要证 $G_1'(t)=g_1(t)\simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}$, 只要证

$$\int_0^t G_1^m(t)\mathrm{d}s\le C,\quad \int_0^t G_2^n(t)\mathrm{d}s\le C,\qquad t\in(0,T^*).\tag{3.15}$$

由 (3.11) 式知，必存在 $t_1\in(0,T^*)$, 使得 $\forall t\in[t_1,T^*)$, 有

$$\begin{aligned}&\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)-\frac{\alpha C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{\beta C}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\Big)\\ \ge{}&\frac12[\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)],\\ &pG_1(t)+qG_2(t)-\frac{pC}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{qC}{\rho^{N+1}}\Big(1+\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s\Big)\\ \ge{}&\frac12[pG_1(t)+qG_2(t)].\end{aligned}$$

再利用 (3.13) 式，得

$$G_1'(t)=g_1(t)\ge\big|k_\rho\big|e^{\frac12[\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)]}\ge\big|k_\rho\big|e^{\frac{\alpha G_1(t)}{2}},\quad\forall t\in[t_1,T^*).$$

同理

$$G_2'(t)=g_2(t)\geq \big|k_\rho\big|e^{\frac{1}{2}[pG_1(t)+qG_2(t)]}\geq \big|k_\rho\big|e^{\frac{qG_1(t)}{2}},\quad \forall t\in[t_1,T^*).$$

积分上式，得

$$G_1(t)\leq \frac{2}{\alpha}\big|\ln(T^*-t)\big|-\frac{2}{\alpha}\ln\frac{\alpha\big|k_\rho\big|}{2}\leq c\big|\ln(T^*-t)\big|,\quad \forall\, t\in[t_1,T^*).$$

$$G_2(t)\leq \frac{2}{q}\big|\ln(T^*-t)\big|-\frac{2}{q}\ln\frac{q\big|k_\rho\big|}{2}\leq c\big|\ln(T^*-t)\big|,\quad \forall\, t\in[t_1,T^*).$$

由于

$$\int_{t_1}^{T^*}G_1^m(s)\mathrm{d}s\leq c\int_0^{T^*}\big|\ln(T^*-s)\big|^m\mathrm{d}s=-c\int_{\ln T^*}^{-\infty}\big|y\big|^m e^y dy=c\int_{-\infty}^{\ln T^*}\big|y\big|^m e^y\mathrm{d}y<\infty,$$

因此

$$\int_0^t G_1^m(s)\mathrm{d}s\leq \int_0^{t_1}G_1^m(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{T^*}G_1^m(s)\mathrm{d}s<\infty.$$

类似可得 $\int_0^t G_2^n(s)\mathrm{d}s<\infty$. 因此， (3.15) 式成立. 利用定义 1, 结合 (3.12) 与 (3.13) 式，可得

$$G_1'(t)=g_1(t)\simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}.$$

同理可证：当 $t\to T^*$ 时,

$$G_2'(t)=g_2(t)\simeq e^{qG_2(t)+pG_1(t)}.$$

定理 2 的证明 由引理 3.4 知，当 $t\to T^*$ 时,

$$G_1'(t)\simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)},\qquad G_2'(t)\simeq e^{qG_2(t)+pG_1(t)},$$

因此

$$\frac{G_1'(t)}{G_2'(t)}\simeq\frac{e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}}{e^{qG_2(t)+pG_1(t)}},\qquad t\to T^*. \tag{3.16}$$

(3.16) 式的两端同乘以 $e^{(p-\alpha)G_1(t)}G_2'(t)$, 并积分，得

$$\int_{t_0}^t e^{(\beta-q)G_2(s)}G_2'(s)\mathrm{d}s\simeq\int_{t_0}^t e^{(p-\alpha)G_1(s)}G_1'(s)\mathrm{d}s,\qquad t\to T^*. \tag{3.17}$$

(1) 当 $p\geq\alpha$ 时，假设 $\beta<q$, 则由 (3.17) 式得

$$\frac{1}{\beta-q}e^{(\beta-q)G_2(s)}\Big|_{t_0}^t\simeq\begin{cases}\dfrac{1}{p-\alpha}e^{(p-\alpha)G_1(s)}\Big|_{t_0}^t, & p>\alpha,\\ G_1(s)\big|_{t_0}^t, & p=\alpha.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{t\to T^*}G_1(t)=\lim\limits_{t\to T^*}G_2(t)=\infty$, 因此若在上式中令 $t\to T^*$, 则可导出矛盾. 所以， $\beta\geq q$. 类似地可证：当 $\beta\geq q$ 时， $p\geq\alpha$.

由结论 (1) 即可推出结论 (2). 证毕.

为了给出定理 3 的证明，先证明一个引理

引理 3.5 在定理 2 的假设之下

(1) 若 $(p-\alpha)(\beta-q)>0$, 则 $e^{(p-\alpha)G_1(t)}\simeq e^{(\beta-q)G_2(t)}$;

(2) 若 $p>\alpha$ 且 $\beta=q$, 则 $e^{(p-\alpha)G_1(t)}\simeq G_2(t)$;

(3) 若 $p=\alpha$ 且 $\beta>q$, 则 $G_1(t)\simeq e^{(\beta-q)G_2(t)}$;

(4) 若 $p=\alpha$ 且 $\beta=q$, 则 $G_1(t)=G_2(t)$.

证 根据 (3.17) 式，经直接计算知，若 $\beta>q$, 则

$$\frac{1}{\beta-q}e^{(\beta-q)G_2(s)}\Big|_{t_0}^{t}\simeq\begin{cases}\dfrac{1}{p-\alpha}e^{(p-\alpha)G_1(s)}\Big|_{t_0}^{t}, & p>\alpha,\\ G_1(s)\big|_{t_0}^{t}, & p=\alpha.\end{cases}\tag{3.18}$$

若 $\beta=q$, 则

$$p>\alpha\text{ 时},\quad G_2(s)\big|_{t_0}^{t}\simeq\frac{1}{p-\alpha}e^{(p-\alpha)G_1(s)}\Big|_{t_0}^{t};\qquad p=\alpha\text{ 时},\quad G_2(s)\big|_{t_0}^{t}\simeq G_1(s)\big|_{t_0}^{t}.$$

注意到 $\lim\limits_{t\to T^*}G_1(t)=\lim\limits_{t\to T^*}G_2(t)=\infty$, 于是

$$p>\alpha\text{ 时},\quad \frac{1}{p-\alpha}e^{(p-\alpha)G_1(s)}\Big|_{t_0}^{t}\simeq e^{(p-\alpha)G_1(t)};\qquad p=\alpha\text{ 时},\quad G_1(s)\big|_{t_0}^{t}\simeq G_1(t);$$

$$\beta>q\text{ 时},\quad \frac{1}{\beta-q}e^{(\beta-q)G_2(s)}\Big|_{t_0}^{t}\simeq e^{(\beta-q)G_2(t)};\qquad \beta=q\text{ 时},\quad G_2(s)\big|_{t_0}^{t}\simeq G_2(t);$$

因此引理的结论 (2)–(3) 成立.

如果 $p=\alpha$ 且 $\beta=q$, 则 $G_1'(t)=G_2'(t)$. 积分得 $G_1(t)=G_2(t)$. 所以，结论 (4) 亦成立.

当 $p<\alpha$ 且 $\beta<q$ 时， (3.16) 式的两端同乘以 $e^{(p-\alpha)G_1(t)}G_2'(t)$ 后，再积分，得

$$\int_t^{T^*}e^{(\beta-q)G_2(t)}G_2'(s)\mathrm{d}s\simeq\int_t^{T^*}e^{(p-\alpha)G_1'(t)}G_1(s)\mathrm{d}s,\quad t\to T^*,$$

即

$$\frac{1}{\beta-q}e^{(\beta-q)G_2(t)}\simeq\frac{1}{\alpha-p}e^{(p-\alpha)G_1(t)}.$$

因此，联立 (3.18) 与 (3.19) 知，引理的结论 (1) 成立．证毕.

定理 3 的证明 (1) 如果 $(p-\alpha)(\beta-q)>0$, 则由引理 3.4 与引理 3.5(1) 知,

$$G_1'(t)\simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}=e^{\alpha G_1(t)}\big[e^{(\beta-q)G_2(t)}\big]^{\frac{\beta}{\beta-q}}\simeq e^{\left(\alpha+\frac{\beta(p-\alpha)}{\beta-q}\right)G_1(t)}=e^{\frac{\beta p-\alpha q}{\beta-q}G_1(t)}.$$

两端同乘以 $e^{-\frac{\beta p-\alpha q}{\beta-q}G_1(t)}$, 并积分，得

$$T^*-t\simeq\frac{\beta-q}{\beta p-\alpha q}e^{-\frac{\beta p-\alpha q}{\beta-q}G_1(t)}\simeq e^{-\frac{\beta p-\alpha q}{\beta-q}G_1(t)}.$$

从而当 $t\to T^*$ 时， $-\frac{\beta p-\alpha q}{\beta-q}G_1(t)\sim\ln(T^*-t)$. 所以

$$\lim_{t\to T}G_1(t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=(\beta-q)/(\beta p-\alpha q).$$

再运用引理 3.3(1), 即可推出，在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*}u(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{\beta-q}{\beta p-\alpha q}.$$

同理可证：在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{p-\alpha}{\beta p-\alpha q}.$$

(2) 如果 $p>\alpha$ 且 $\beta=q>0$, 则由引理 3.4 与引理 3.5(2) 知,

$$G_2'(t)\simeq e^{pG_1(t)+qG_2(t)}=e^{qG_2(t)}\big[e^{(p-\alpha)G_1(t)}\big]^{\frac{p}{p-\alpha}}\simeq e^{qG_2(t)}[G_2(t)]^{\frac{p}{p-\alpha}}.$$

两端同乘以 $e^{-qG_2(t)}[G_2(t)]^{-\frac{p}{p-\alpha}}$ 并积分，得

$$\int_t^{T^*}e^{-qG_2(\tau)}[G_2(\tau)]^{-\frac{p}{p-\alpha}}G_2'(\tau)\mathrm{d}\tau\simeq T^*-t.$$

容易验证：

$$\int_t^{T^*}e^{-qG_2(\tau)}[G_2(\tau)]^{-\frac{p}{p-\alpha}}G_2'(\tau)\mathrm{d}\tau\sim\frac{1}{q}e^{-qG_2(t)}[G_2(t)]^{-\frac{p}{p-\alpha}},\qquad t\to T^*.$$

因而

$$T^*-t\simeq\frac{1}{q}e^{-qG_2(t)}[G_2(t)]^{-\frac{p}{p-\alpha}}\simeq e^{-qG_2(t)}[G_2(t)]^{-\frac{p}{p-\alpha}},\qquad t\to T^*.$$

于是 $\ln(T^*-t)\sim -qG_2(t)-\frac{p}{p-\alpha}\ln G_2(t)\sim -qG_2(t)$. 所以 $G_2(t)\sim\frac{1}{q}\big|\ln(T^*-t)\big|$, 即 $\lim\limits_{t\to T^*}G_2(t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{q}$. 再运用引理 3.3(2), 即可推出：在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=1/q.$$

另一方面，利用引理 3.5(2) 与 (3.20) 式，得

$$e^{(p-\alpha)G_1(t)}\simeq G_2(t)\sim\frac{1}{q}\big|\ln(T^*-t)\big|\simeq\big|\ln(T^*-t)\big|,$$

即 $(p-\alpha)G_1(t)\simeq\ln\big|\ln(T^*-t)\big|$. 因此由引理 3.3(1) 知，在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*} u(x,t)\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\left(\ln\big|\ln(T^*-t)\big|\right)^{-1}=\frac{1}{p-\alpha}.$$

(3) 当 $p=\alpha>0$ 且 $\beta>q$ 时，类似于结论 (2) 的证明可知，结论 (3) 成立.

(4) 如果 $p=\alpha$ 且 $\beta=q$, 由引理 3.4 与引理 3.5(4) 知,

$$G_1'(t)\simeq e^{\alpha G_1(t)+\beta G_2(t)}=e^{(\alpha+\beta)G_1(t)}.$$

两端同乘以 $e^{-(\alpha+\beta)G_1(t)}$ 并积分，得

$$T^*-t\simeq\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)G_1(t)}\simeq e^{-(\alpha+\beta)G_1(t)}.$$

从而当 $t\to T^*$ 时， $-(\alpha+\beta)G_1(t)\sim\ln(T^*-t)$, 所以 $\lim\limits_{t\to T}G_1(t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta}$. 再运用引理 3.3(1), 即可推出：在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*} u(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|u(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

同理可证：在 Ω 的任意紧子集上一致地成立

$$\lim_{t\to T^*} v(x,t)\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\lim_{t\to T^*}\big\|v(x,t)\big\|_\infty\big|\ln(T^*-t)\big|^{-1}=\frac{1}{p+q}.$$

参 考 文 献

[1] Souplet Ph. Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with non-local nonlinear source. J Diff Eqns, 1999, **153**: 374–406

[2] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992

[3] Souplet Ph. Blow up in non-local reaction-diffusion equations. SIAM Y Math Anal, 1998, **29**: 1301–1334

[4] Friedman A, Mcleod J B. Blow-up of solutions of non-linear degenerate parabolic equations. Arch Rat Mech Anal, 1986, **96**: 55–80

[5] Duan Z W, Deng W B, Xie C H. Uniform blow-up profile for a degenerate parabolic system with nonlocal source. Computers and Mathematics with Applications, 2004, **47**: 977–995

[6] Anderson J R. Local existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations. Comm Partial Differential Equations, 1991, **16**: 105–143

[7] Chadam J M, Pierce A, Yin H M. The blow-up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions. J Math Anal Appl, 1992, **169**: 313–328

[8] Li F C, Chen Y P, Xie C H. Asymptotic behavior of solution for nonlocal reaction-diffusion system. Acta Mathematica Scientia, 2003, **23B**(2): 261–273

[9] Jiang L J, Li H L. Uniform blow-up profiles and boundary layer for a parabolic system with nonlocal sources. Mathematical and Computer Modelling, 2007, **45**: 814–824

[10] Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, 1964

[11] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. American Math Society, Providence, RI, 1968

Uniform Blow-up Properties for a Degenerate Parabolic System with Nonlocal Sources

Jiang Liangjun

(*Department of Mathematics, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing 210017*)

Li Huiling

(*Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210018*)

Abstract: This paper deals with the blow-up properties of positive solutions to degenerate parabolic systems with nonlocal sources, subject to null Dirichlet boundary conditions. Under appropriate hypotheses, we establish the local existence of the solution and the finite time blow-up. Moreover, we obtain a necessary condition for which the two components of the solution blow up simultaneously, and then establish the uniform blow-up profiles in the interior.

Key words: Degenerate parabolic systems; Nonlocal sources; Uniform blow-up profiles; Simultaneous blow-up.

MR(2000) Subject Classification: 35K15; 35K65