2005,**25A**(7):952–955

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

两个空间之间复合映射的不动点集和 Reidemeister 数 *

夏大峰　江波
(南京信息工程大学数学系　南京 210044)

摘要：设 X,Y 为拓扑空间， $f:X\to Y, g:Y\to X$. 该文证明了下列结论：对每一自然数 n, (1) $f(\mathrm{Fix}((g\circ f)^n))=\mathrm{Fix}((f\circ g)^n), g(\mathrm{Fix}((f\circ g)^n))=\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$, 且 $\#\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)=\#\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$; (2) $R((g\circ f)^n)=R((f\circ g)^n)$.

关键词：自映射；不动点集；不动点类； Reidemeister 数；拓扑熵.

MR(2000) 主题分类: 54E　**中图分类号**: O177.91　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2005)07-952-04

不动点类理论是拓扑学中研究的重要内容，尤其是 Nielsen 数与 Reidemeister 数，其应用相当广泛. 例如，动力系统中拓扑熵的下界估计方面，已取得了许多很好的结果 [1,2,3]. 但 Nielsen 数和 Reidemeister 数的计算不仅要受到空间限制，而且计算也比较复杂. 如果拓扑空间上自映射的 Nielsen 数、 Reidemeister 数、渐进 Nielsen 数、渐进 Reidemeister 数等的计算很困难，甚至根本无法计算，可以考虑转换到某个比较好的空间上的自映射，使其计算或估计比较容易地进行. 本文对此问题进行了研究.

注　本文提到的拓扑空间之间的映射都是指连续映射.

设 A 为一集合，集合 A 中元素的个数我们记为 $\#A$.

设 f 是拓扑空间 X 上的一个自映射，它的所有不动点构成的集合记为 $\mathrm{Fix}(f).x_1,x_2\in\mathrm{Fix}(f)$, 我们说 x_1 与 x_2 有关系 "$\sim$" 当且仅当 X 上存在一条连接 x_1 与 x_2 的道路 $C:[0,1]\to X$, 使 $C(0)=x_1, C(1)=x_2$, 且 $f\circ C$ 与 C 相对于 x_1 与 x_2 是同伦的 ($f\circ C$ 与 C 相对于不动点 x_1 、 x_2 是同伦的，通常记为 $f\circ C\simeq C\mathrm{rel}\{x_1,x_2\}$). 显然 "$\sim$" 是 $\mathrm{Fix}(f)$ 中的一个等价关系. $x\in\mathrm{Fix}(f)$, 记 $[x]=\{y|y\sim x, y\in\mathrm{Fix}(f)\}$. $[x]$ 称为 $\mathrm{Fix}(f)$ 的等价类. 于是， $\mathrm{Fix}(f)$ 被分解为互不相交的一些等价类之并，每一等价类称为 f 的不动点类，不动点类的个数称为 f 的 Reidemeister 数，记为 $R(f)$, 即 $R(f):=\#\mathrm{Fix}(f)/\sim=\#\{[x]|x\in\mathrm{Fix}(f)\}$.

特别地，当 X 满足指数性质 (如紧致连通的多面体) 时， f 的每一不动点类的指数有意义 [4], 其不动点类的指数不为零时，称之为 f 的本质不动点类. f 的本质不动点类的个数称为 f 的 Nielsen 数，记为 $N(f)$. 显然有 $R(f)\geq N(f)$, 且 $N(f)$ 是同伦不变量. $f,g:X\to Y$ 同伦记为 $f\sim g$.

紧致度量空间 X 上自映射 f 的拓扑熵 $h(f)$ 的定义可参见文 [2] ；渐进 Reidemeister 数 $R^\infty(f)$ 和渐进 Nielsen 数可参见文 [2, 3], 在此略叙.

定理 1　设 X,Y 为拓扑空间， $f:X\to Y, g:Y\to X$. 则对每一自然数 n, 都有

收稿日期：2002-11-29; 修订日期：2003-12-18
E-mail: xiadafeng@niust.edu.cn
* 基金项目：南京气象学院科研基金资助

(1) $\#\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)=\#\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$, 且 $f(\mathrm{Fix}((g\circ f)^n))=\mathrm{Fix}((f\circ g)^n), g(\mathrm{Fix}((f\circ g)^n))=\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$; (2) $R((g\circ f)^n)=R((f\circ g)^n)$.

证 (1) 对任意的 $x\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$, 可验证 $y:=f(x)\in\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$. 事实上

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)^n(y)&=\overbrace{(f\circ g)\circ(f\circ g)\circ\cdots\circ(f\circ g)}^{n\text{个}}(f(x))\\
&=f\circ\overbrace{(g\circ f)\circ(g\circ f)\circ\cdots\circ(g\circ f)}^{n\text{个}}(x)=f((g\circ f)^n(x))=f(x)=y.
\end{aligned}
$$

于是有： $f(\mathrm{Fix}((g\circ f)^n))\subset\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$.

$x_1,x_2\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$, 且 $x_1\neq x_2$, 令 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$, 由上述验证知 $y_1,y_2\in\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$. 下证 $y_1\neq y_2$.

事实上，假设 $y_1=y_2$, 即 $(f\circ g)^n(y_1)=y_1=y_2=(f\circ g)^n(y_2)$. 于是： $g\circ f(x_1)=g(y_1)=g(y_2)=g\circ f(x_2)$,

$$
\begin{aligned}
x_1&=(g\circ f)^n(x_1)=(g\circ f)^{n-1}((g\circ f)(x_1))=(g\circ f)^{n-1}(g(y_1))\\
&=(g\circ f)^{n-1}(g(y_2))=(g\circ f)^{n-1}((g\circ f)(x_2))=(g\circ f)^n(x_2)=x_2,
\end{aligned}
$$

与 $x_1\neq x_2$ 矛盾．所以 $y_1\neq y_2$. 故 $f|_{\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)}:\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)\to\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$ 是单射．再证 $f|_{\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)}$ 是满射．事实上，对任意的 $y\in\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$, 令 $x=(g\circ(f\circ g)^{n-1})(y)$.

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)^n(x)&=(g\circ f)^n(g\circ(f\circ g)^{n-1}(y))=(g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ f)(g\circ(f\circ g)^{n-1}(y))\\
&=(g\circ(f\circ g)^{n-1})((f\circ g)^n(y))=(g\circ(f\circ g)^{n-1})(y)=x.
\end{aligned}
$$

所以 $x\in\mathrm{Fix}(g\circ f)^n)$, 且 $f(x)=f(g\circ(f\circ g)^{n-1}(y))=(f\circ g)^n(y)=y$. 这就证明了 $f|_{\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)}$ 又是满射．由此可得： $\#\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)=\#\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$, 且 $f(\mathrm{Fix}((g\circ f)^n))=\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$. 同理可证 $g(\mathrm{Fix}((f\circ g)^n))=\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$.

(2) 设 $x_1,x_2\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$, 即 $(g\circ f)^n(x_1)=x_1,(g\circ f)^n(x_2)=x_2$, 且 $x_1\sim x_2$, 则存在 X 中一条连接 x_1 与 x_2 的道路 C, 使 $(g\circ f)^n\circ C\simeq C\mathrm{rel}\{x_1,x_2\}$.

令 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$, 由 (1) 知： $y_1,y_2\in\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$. 由于 $f\circ C$ 是 Y 中的一条道路，且 $f\circ C(0)=f(x_1)=y_1,f\circ C(1)=f(x_2)=y_2$, 所以 $f\circ C$ 是 Y 中连接 y_1 与 y_2 的一条道路.

$$
(f\circ g)^n\circ(f\circ C)=f\circ\overbrace{(g\circ f)\circ\cdots\circ(g\circ f)}^{n\text{个}}\circ C=f\circ((g\circ f)^n\circ C)\sim f\circ C.
$$

所以

$$
(f\circ g)^n\circ(f\circ C)\simeq f\circ C\mathrm{rel}\{y_1,y_2\}.
$$

由此可得： $x_1,x_2\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)$ 且 $x_1\sim x_2$, 则一定有 $f(x_1)\sim f(x_2)$. 这样可以定义一个映射 $F:\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)/\sim\,\longrightarrow\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)/\sim$ 为

$$
[x]\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)/\sim, F([x])=[f(x)].
$$

下证 F 是单射，事实上，设 $[x_1],[x_2]\in\mathrm{Fix}((g\circ f)^n)/\sim$, 且 $[x_1]\neq[x_2]$. 假设 $[f(x_1)]=[(f(x_2)]$, 令 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$, 由 (1) 知： $y_1,y_2\in\mathrm{Fix}((f\circ g)^n)$. 又由 $[y_1]=[y_2]$ 知：存

在 Y 中连接 y_1 与 y_2 的一条道路 α, 使得

$$(f\circ g)^n\circ\alpha\simeq\alpha\mathrm{rel}\{y_1,y_2\},$$
$$(g\circ(f\circ g)^{n-1})(\alpha(0))=g((f\circ g)^{n-1}(y_1))=(g\circ(f\circ g)^{n-1})(f(x_1))=(g\circ f)^n(x_1)=x_1.$$

同样可验证： $(g\circ(f\circ g)^{n-1})(\alpha(1))=x_2$.
所以， $g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ\alpha$ 是 X 中连接 x_1 与 x_2 的道路．又

$$(g\circ f)^n\circ(g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ\alpha)=(g\circ(f\circ g)^{n-1})\circ((f\circ g)^n\circ\alpha)\sim g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ\alpha,$$

故

$$(g\circ f)^{(n)}\circ(g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ\alpha)\simeq g\circ(f\circ g)^{n-1}\circ\alpha\mathrm{rel}\{x_1,x_2\}.$$

由此可得 $x_1\sim x_2$, 即 $[x_1]=[x_2]$, 矛盾.
所以 F 是单射，从而有 $R((g\circ f)^n)\leq R((f\circ g)^n)$. 同理可证： $R((f\circ g)^n)\leq R((g\circ f)^n)$.
所以有： $R((g\circ f)^n)=R((f\circ g)^n)$. ▌

推论 1 令 $D^n=\{x\in R^n|\|x\|\leq 1\}$. 设 F 为拓扑空间 X 上的自映射．如果存在映射 $f:X\to D^n, g:D^n\to X$, 使 $F=g\circ f$, 则 F 至少有一个不动点.

特别地，如果 $F(X)$ 或 X 同胚于 D^n, 则 F 至少有一个不动点.

证 根据 Brower 不动点定理 [6], $f\circ g:D^n\to D^n$ 必有不动点，于是由定理 1(1) 知：$g\circ f=F$ 至少有一个不动点.

特别地，如果 $F(X)$ 同胚于 D^n, 设 $h:F(X)\to D^n$ 为同胚映射，令 $f=h\circ F:X\to D^n, g=h^{-1}:D^n\to X$, 则 $g\circ f=F$. 所以，根据上述结论知： F 至少有一个不动点．如果 X 同胚于 D^n, 可类似的证明至少有一个不动点. ▌

根据文 [2] 中的主要定理及本文定理 1, 我们有下列推论 2.

推论 2 设 X,Y 为紧致度量空间， $f:X\to Y, g:Y\to X$, 则

$$\min\{h(g\circ f),h(f\circ g)\}\geq\log R^{\infty}(g\circ f)=\log R^{\infty}(f\circ g).$$

定理 1 说明，当某个空间自映射的 Reidemeister 数不易计算，但可以转移到特殊空间上的自映射，使其 Reidemeister 数比较容易计算，从而得到原空间上的 Reidemeister 数，然后根据推论 2, 就可以得到原空间自映射的拓扑熵下界的估计.

例 1 设 F 是紧致流形 M 上的自映射，且 $F(M)$ 是连通的一维微分流形，由于 $F(M)$ 是紧致的，由文 [6] 中 199 页的定理 1.7 知： $F(M)$ 或者微分同胚于 $[0,1]$, 或者微分同胚于 S^1 单位圆.

若 $F(M)$ 微分同胚于 $[0,1]$, 由推论 1,F 至少有一个不动点．设 $H:F(M)\to[0,1]$ 为同胚映射，令 $f=H\circ F:M\to[0,1], g=H^{-1}:[0,1]\to M$, 则 $g\circ f=F:M\to M, f\circ g=H\circ F\circ H^{-1}:[0,1]\to[0,1]$. 于是由推论 2 有： $h(F)\geq\log R^{\infty}(f\circ g)\geq\log N^{\infty}(f\circ g)$.

若 $F(M)$ 微分同胚于 S^1, 设 $H:F(M)\to S^1$ 是同胚映射，令 $f=H\circ F:M\to S^1, g=H^{-1}:S^1\to F(M)$, 则 $g\circ f=F:M\to M, f\circ g=H\circ F\circ H^{-1}:S^1\to S^1$. 记 $f\circ g=H\circ F\circ H^{-1}$ 的映射度为 $\deg(H\circ F\circ H^{-1})$. 当 $|\deg(H\circ F\circ H^{-1})|\geq 2$ 时，由文 [3] 的推论 3 和本文的推论 2 得： $h(F)\geq\log R^{\infty}(H\circ F\circ H^{-1})\geq\log|\deg(H\circ F\circ H^{-1})|$. 特别地，当 $H\circ F\circ H^{-1}:S^1\to S^1$ 是单调的或是扩张映射 [3,8] 时， $R^{\infty}(F)=R^{\infty}(H\circ F\circ H^{-1})=|\deg(H\circ F\circ H^{-1})|$, 此时，$F$ 的拓扑熵 $h(F)\geq\log|\deg(H\circ F\circ H^{-1})|$. 如果 $M=S^1$, 取 H 为 S^1 上的恒等映射，则上面的讨论就是文 [3] 中的推论 3 和推论 4.

例 2 设 X 为拓扑空间， $F: X \to X. y, x \in X$, 我们说 x 与 y 有关系 “$\sim$” 当且仅当 $F(x)=F(y)$. 易验证： “$\sim$” 是 X 中的一个等价关系.

令 $[x]=\{y \in X | F(y)=F(x)$, 即 $x \sim y, y \in X\}$, 那么 $X/\sim=\{[x] | x \in X\}$ 为拓扑空间 X 的商空间，其中商映射 $p: X \to X/\sim, p(x)=[x], x \in X$.

定义映射 $\pi: X/\sim \to X$ 为：对任意的 $[x] \in X/\sim, \pi([x])=F(x)$. 显然，这个定义是有意义的，于是有 $\pi \circ p=F: X \to X$. 这样就把 X 上自映射 F 的不动点问题转化为 $X/\sim$ 为上自映射 $p \circ \pi: X/\sim \to X/\sim$ 的不动点问题.

如果存在拓扑空间 Y(如 Y 为紧致连通的多面体等), 以及映射 $f: X/\sim \to Y, g: Y \to X/\sim$, 使得 $g \circ f=p \circ \pi$. 这样 F 的不动点问题又可以转化为 $f \circ g: Y \to Y$ 的不动点问题. 特别地，当 Y 同胚于 R^n 中的紧致凸集时，则 F 至少有一个不动点.

类似于定理 1 的证明，我们有下列结论.

定理 2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为拓扑空间， $f_1: X_1 \to X_2, f_2: X_2 \to X_3, \cdots, f_{m-1}: X_{m-1} \to X_m, f_m: X_m \to X_1$. 令

$$g_i=f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_m \circ \cdots \circ f_i: X_i \to X_i (i=2,3, \cdots, m),$$

$$g_1=f_m \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1: X_1 \to X_1,$$

则有下列结论：对任意的自然数 n, 有

(1) $f_i(\mathrm{Fix}(g_i^n))=\mathrm{Fix}(g_{i+1}^n), i=1,2, \cdots, m-1, f_m(\mathrm{Fix}(g_m^n))=\mathrm{Fix}(g_1^n)$, 且 $\#\mathrm{Fix}(g_1^n)=\#\mathrm{Fix}(g_2^n)=\cdots=\#\mathrm{Fix}(g_m^n)$; (2) $R(g_1^n)=R(g_2^n)=\cdots=R(g_m^n)$.

参 考 文 献

[1] Ivanov N V. Entropy and the Nielsen number. Soviet MathDokl, 1982, **26**: 63–66
[2] 夏大峰. 拓扑熵的一个下界估计. 数学进展， 1996, **25**(3): 222–225
[3] 夏大峰，徐森林. 维环面上坐标自映射下拓扑熵的一个下界. 数学物理学报， 2000, **20**(1): 36–40
[4] Jiang B. Lectures on Nielsen fixed point theory. Contemp Math Amer Math SocProvidence, 1983, **14**
[5] 江泽涵. 不动点类理论. 北京：科学出版社， 1982
[6] 张筑生. 微分拓扑新讲. 北京：北京大学出版社， 2000. 195–206
[7] 刘旺金. S^1 上扩张映射的拓扑熵. 科学通报， 1983, **4**: 202–203
[8] 何连发，王在洪. 圆周上单调映射的拓扑熵. 数学评论与研究， 1996, **16**(3): 379–382

Set of Fixed Points and Reidemeister Number of Compound Mapping between Tow Spaces

Xia Dafeng Jiang Bo
(*Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044*)

Abstract: Let X, Y be topological spaces, $f: X \to Y, g: Y \to X$. In this paper, follow conclutions are obtained

(1) $f(\mathrm{Fix}((g \circ f)^n))=\mathrm{Fix}((f \circ g)^n), g(\mathrm{Fix}((f \circ g)^n))=\mathrm{Fix}((g \circ f)^n)$ and $\#\mathrm{Fix}((g \circ f)^n)=\#\mathrm{Fix}((f \circ g)^n)$； (2) $R((g \circ f)^n)=R((f \circ g)^n)$.

where n is a natural number.

Key words: Self-maps; Set of fixed points; Fixed point class; Reidemeister number; Topological entropy.

MR(2000) Subject Classification: 54E