2004,**24A**(2):135－143

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

脉冲摄动微分系统的有界性*

傅希林　王克宁　劳会学
(山东师范大学数学系　济南 250014)

摘要:通过利用变分 $Lyapunov$ 函数方法，该文主要研究了脉冲摄动微分系统关于两个测度的有界性. 与以前结果相比，不难发现变分 $Lyapunov$ 函数方法是 $Lyapunov$ 函数方法的推广.

关键词:变分 $Lyapunov$ 函数；比较定理；两个测度的有界性；摄动；脉冲.
MR(2000)主题分类:34K20　　**中图分类号**:O175.13　　**文献标识码**:A
文章编号:1003-3998(2004)02-135-09

1　引言

众所周知，脉冲摄动微分系统具有非常强的应用背景，一直以来都受到人们的广泛关注. 在研究脉冲摄动微分系统的稳定性质时，人们主要利用李雅普诺夫函数和参数变分公式这两种方法. 最近几年，文[1]将这两种研究摄动微分系统的重要方法结合起来，得到了一种新的方法一变分李雅普诺夫函数方法，它既保留了两种方法的优点，又克服了它们所存在的一些缺点. 利用这种方法，作者得到了一些好的结果. 另外，自然界中的许多现象可以用脉冲微分系统加以描述，因此脉冲微分系统的定性研究受到了高度重视，并取得了长足的进展(如文[2]). 但到目前为止，利用变分李雅普诺夫函数方法仅限于对无脉冲作用的摄动微分系统进行研究，而对于脉冲摄动微分系统这方面的研究所见不多. 本文研究了固定时刻带脉冲的摄动系统的有界性，通过引入一新的稳定性定义，即$(h_0, \tilde{h}_1)$-稳定性，我们获得了一些判定脉冲摄动微分系统关于两个测度有界性的比较结果. 为方便起见，我们首先给出了相关的概念和函数集合. 第三部分我们介绍了脉冲摄动微分系统的变分李雅普诺夫函数方法的思想，第四部分我们利用变分李雅普诺夫函数方法建立了一个新的比较定理，第五部分通过一个比较定理，我们获得了一些判定脉冲摄动微分系统关于两个测度有界性的准则. 最后通过一个例子说明了定理的应用.

2　预备知识

本文主要研究如下脉冲微分系统

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y' = F(t, y),\ t \neq \tau_k, \\ \Delta y = I_k(y),\ t = \tau_k, \\ y(t_0^+) = x_0,\ k = 1,2,\cdots, \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x' = f(t, x),\ t \neq \tau_k, \\ \Delta x = h_k(x),\ t = \tau_k, \\ x(t_0^+) = x_0,\ k = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

收稿日期:2001-09-14；修订日期:2002-09-23
* 基金项目:国家自然科学基金(10171057)和山东省自然科学基金(Z2000A02)资助

其中 $f(t, x)=F(t, x)+R(t, x)$, $h_k(x)=I_k(x)+Q_k(x)$, $R(t, x)$ 与 $Q_k(x)$ 均为摄动项, F, f, I_k, h_k满足一定的条件以保证系统(Ⅰ),(Ⅱ)的解整体存在唯一,并且对所有的 k, 当 $t\in(\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时,系统(Ⅰ),(Ⅱ)的解关于初值具有连续依赖性. 同时脉冲时刻满足: $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_k<\cdots$ 且当 $k\to\infty$时, $\tau_k\to\infty$. 设 $y(t)=y(t; t_0, x_0)$ 及 $x(t)=x(t; t_0, x_0)$ 分别为系统(Ⅰ),(Ⅱ)的任意解.

进一步我们假定如下条件

(A_1) F: $\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$, 对所有的 k, F 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k]\times\mathscr{R}^n$ 上连续, 并且在其上具有连续偏导数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$;

(A_2) 对每一个 $x\in\mathscr{R}^n$, $k=1, 2, \cdots$, 当$(t, y)\to(\tau_k^+, x)$时, F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$具有有限极限;

(A_3) I_k: $\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$ 连续可微;

(A_4) f: $\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$ 在 $(\tau_k, \tau_{k+1}]\times\mathscr{R}^n$ 上连续, 且对每一个 $x\in\mathscr{R}^n$, $k=1,2,\cdots$, 有 $\lim\limits_{(t, y)\to(\tau_k^+, x)} f(t,y)=f(\tau_k^+, x)$;

(A_5) 对每一个 $x\in R^n$, $k=1,2,\cdots$, 有 $\lim\limits_{(t, y)\to(\tau_k^+, x)} F(t, y)=F(\tau_k^+,x)$;

(A_6) h_k: $\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^n$ 连续.

对于 $(t,x)\in(\tau_{k-1},\tau_k]\times\mathscr{R}^n$, $k=1,2,\cdots$,我们引入变分李雅普诺夫函数 $V(s, y(t, s, x(s)))$ 及其 Dini 导数,

$$
\begin{aligned}
& D^+ V(t,s,x) \\
\equiv & D^+ V(s,y(t,s,x)) \\
\equiv & \limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(s+h,y(t,s+h,x+h\,f(s,x)))-V(s,y(t,s,x))],
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 $y(t; s, x)$ 是系统(Ⅰ)的满足 $y(s; s, x)=x$ 的任意解.

定义 2.1 设 V: $R_+\times R^n\to R_+$, 若 V 满足

(1) 对所有的 k, V 在 $(\tau_k, \tau_{k+1}]\times R^n$ 上连续且其一阶导数可积并对每一个 $x\in R^n$, $\lim\limits_{(t, y)\to(\tau_k^+, x)} V(t, y)=V(\tau_k^+, x)$ 存在; (2) V 关于 x 满足局部李普希兹条件. 则称 $V\in V_0{}'$.

定义 2.2 设 λ: $R_+\to R_+$ 是可测函数, 若 $\lambda(s)$ 满足 $\int_I\lambda(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\infty$, 则称 $\lambda(s)$ 是积分正的, 其中 $I=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]$, $\alpha_i<\beta_i<\alpha_{i+1}$ 且 $\beta_i-\alpha_i\geqslant\delta>0$.

为方便起见, 我们引入一个新的关于两个测度的有界性概念.

定义 2.3 设 $h_0, h_1, h\in\Gamma$, $y(t)=y(t; t_0, x_0)$ 是系统(Ⅰ)的任一解, 称系统(Ⅰ)为

(1) $(h_0, \tilde{h}_1)$-等度有界的, 若对任意 $\alpha>0$, $t_0\in R_+$, 都存在 $\beta=\beta(t_0, \alpha)>0$ 使得

$$
\text{当}\quad h_0(t_0^+, x_0)<\alpha \text{ 时, 有}\quad h_1(t_0^+, y(t))<\beta, \qquad t\geqslant t_0,
$$

(2) $(h_0, \tilde{h}_1)$-一致有界的, 若(1)中 β 的选取与 t_0无关;

(3) $(h_0, \tilde{h}_1)$-拟最终有界的, 若对任意的 $\alpha>0$, $t_0\in R_+$, 都存在 $N>0$ 及 $T=T(t_0, \alpha)>0$, 使得

$$
\text{当}\quad h_0(t_0^+, x_0)\leqslant\alpha \text{ 时, 有}\quad h_1(t_0^+, y(t))<N, \qquad t\geqslant t_0+T;
$$

(4) $(h_0, \tilde{h}_1)$-拟一致最终有界的, 若(3)中 T 的选取与 t_0无关;

(5) $(h_0, \tilde{h}_1)$-等度最终有界的, 若(1)与(3)同时成立;

(6) $(h_0, \tilde{h}_1)$-一致最终有界的，若 (2) 与 (4) 同时成立.

定义 2.4 设 $h_0, h_1, h \in \Gamma$，$x(t)=x(t;\ t_0,\ x_0)$ 是系统(Ⅱ)的任一解，若对任意 $\alpha>0$，$t_0 \in R_+$，都存在 $\beta=\beta(t_0,\ \alpha)>0$ 使得

$$\text{当}\quad h_0(t_0^+,\ x_0)<\alpha \quad \text{时，}\quad \text{有}\quad h(t,\ y(t))<\beta,\quad t\geqslant t_0;$$

则称系统(Ⅱ)是 (h_0, h)-等度有界的.

参阅文[3]，我们可以给出其它相应的 $(h_0,\ h)$-有界性定义，这里不再赘述.

定义 2.5 若对任意 $\alpha>0$，都存在 $\beta=\beta(t_0,\ \alpha)>0$ 使得

$$\text{当}\quad 0\leqslant u_0<\alpha \quad \text{时，}\quad \text{有}\quad \| u_0(t;\ t_0,\ u_0)\| \leqslant \beta,\quad t\geqslant t_0,$$

则称系统(Ⅳ)是等度有界的，其中 $u(t,\ t,\ t_0,\ u_0)$ 为系统(Ⅳ)

$$(\text{Ⅳ})\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=g(t,\ s,\ x), & s\neq\tau_k,\\ u(\tau_k^+)=\Psi_k(u(\tau_k)), & s=\tau_k,\\ u(t_0^+)=u_0\geqslant 0, & k=1,2,\cdots\end{cases}$$

的在 $[t_0,\ t]$ 上的任意解，且 $u_0(t;\ t_0,\ u_0)\equiv u(t,\ t,\ t_0,\ x_0)$. 若 β 与 t_0 无关，则称系统(Ⅳ)是一致有界的.

我们也可给出系统(Ⅳ)的其它有界性概念.

下面我们定义如下函数集合

$$\Gamma=\{h: R_+\times R^n\to R_+,\ h(t,\ x)\ \text{在}\ (\tau_{k-1},\ \tau_k]\times R^n\ \text{上连续，}$$
$$\text{并对每一个}\ x\in R^n,\ k=1,2,\cdots,$$
$$\lim_{(t,\ y)\to(\tau_k^+,x)} h(t,\ y)=h(\tau_k^+,x)\ \text{存在且}\ \inf_{(t,\ x)} h(t,x)=0\};$$
$$\mathscr{K}=\{a\in C[R_+,\ R_+],\ a(0)=0\ \text{且}\ a(u)\ \text{关于}\ u\ \text{严格递增}\};$$
$$\mathscr{KR}=\{a\in C[R_+,\ R_+],\ a(u)\ \text{关于}\ u\ \text{严格递增，且}\ \lim_{u\to\infty}a(u)=\infty\}.$$

在给出主要结果之前，先给出下述引理.

引理 2.1(见文[4]) 假设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立，设 $y(t)=y(t;\ t_0,\ x_0)$ 是系统(Ⅰ)的定义在 $[t_0,\infty)$ 上的任意解，则有

(1) $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t;\ t_0,\ x_0)$存在且是初值问题

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}Z'=F_y(t,\ y(t;\ t_0,\ x_0))Z, & t\neq\tau_k,\\ \Delta Z=\dfrac{\partial I_k}{\partial y}(y(\tau_k))Z, & t=\tau_k,\\ Z(t_0^+)=I, & k=1,2,\cdots\end{cases}$$

的解，并使得 $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t_0;\ t_0,\ x_0)$ 为单位矩阵；

(2) $\dfrac{\partial y}{\partial t_0}(t;\ t_0,\ x_0)$ 存在且是(Ⅲ)的解并满足

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}(t;\ t_0,\ x_0)=-\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;\ t_0,\ x_0)F(t_0,\ x_0),\quad t\geqslant t_0.$$

在本文中，我们始终假设 $F(t,\ 0)\equiv 0$，$f(t,\ 0)\equiv 0$，$I_k(0)\equiv 0$ 及 $h_k(0)\equiv 0$，以保证系统(Ⅰ)，(Ⅱ)有零解. 这样，我们只需讨论系统(Ⅰ)，(Ⅱ)零解的有关性质.

3 脉冲摄动微分系统的变分李雅普诺夫函数思想

在这一部分中，我们将引入脉冲摄动微分系统的变分李雅普诺夫函数思想. 对所有的

k，当 $s\in(\tau_k, \tau_{k+1}]$时，在引理 2.1 的条件下，$\dfrac{\partial y(t;s, x(s))}{\partial t_0}$，$\dfrac{\partial y(t; s, x(s))}{\partial x_0}$存在并连续.

（Ⅰ）若令 $P(s)=y(t; s, x(s))$，$t_0\leqslant s\leqslant t$.

对所有的 k，当 $s\in(\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时，$P(s)$ 左连续，此时

$$P'(s)=\frac{\partial y(t; s,x(s))}{\partial t_0}+\frac{\partial y(t; s, x(s))}{\partial x_0}f(s, x)\triangleq G(t, s, x). \tag{3.1}$$

两边对 s 从 t_0 到 t 积分，得 $\int_{t_0}^t P'(s)\mathrm{d}s=\int_{t_0}^t G(t, s, x)\mathrm{d}s$，而同时有

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t P'(s)\mathrm{d}s&=\int_{t_0}^{\tau_1} P'(s)\mathrm{d}s+\int_{\tau_1}^{\tau_2} P'(s)\mathrm{d}s+\cdots+\int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} P'(s)\mathrm{d}s+\int_{\tau_n}^t P'(s)\mathrm{d}s\\&=P(\tau_1)-P(t_0)+P(\tau_2)-P(\tau_1^+)\\&\quad+\cdots+P(\tau_n)-P(\tau_{n-1}^+)+P(t)-P(\tau_n^+)\\&=P(t)-P(t_0)-\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k),\end{aligned}$$

从而得 $P(t)=P(t_0)+\int_{t_0}^t G(t, s,x)\mathrm{d}s+\sum\limits_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k)$，由 $P(s)$的取法知，

$$x(t)=y(t)+\int_{t_0}^t G(t, s, x)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k). \tag{3.2}$$

（Ⅱ）若令 $P(s)=\|y(t; s, x(s))\|^2$，$t_0\leqslant s\leqslant t$.

对所有的 k，当 $s\in(\tau_k, \tau_{k+1}]$时有 $P'(s)=2y(t; s, x(s))\,G(t, s, x)$. 两边对 s 从 t_0 到 t 积分，同样可得

$$P(t)=P(t_0)+\int_{t_0}^t 2y(t; s, x(s))\,G(t, s, x)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k),$$

即
$$\|x(t)\|^2=\|y(t)\|^2+\int_{t_0}^t 2y(t;s, x(s))\,G(t, s, x)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k). \tag{3.3}$$

（Ⅲ）不失一般性，令

$$P(s)=V(s, y(t; s, x(s))),\quad t_0\leqslant s\leqslant t,$$

其中 $V: R_+\times R^n\to R_+$，对所有的 k，V 在 $(\tau_k, \tau_{k+1}]\times R^n$上连续且其一阶导数可积. 并对每一个 $x\in R^n$，存在 $\lim\limits_{(t, y)\to(\tau_k^+, x)} V(t, y)=V(\tau_k^+, x)$.

类似前面的讨论，同样有

$$V(t, x(t))=V(t_0, y(t))+\int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}(s, y(t; s,x(s)))\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta V(\tau_k), \tag{3.4}$$

其中 $s\in(\tau_k, \tau_{k+1}]$，$k=1,2,\cdots$.

进一步由引理 2.1 知，$\dfrac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0, x_0)$，$\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$ 是系统（Ⅲ）的解且满足

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)\,F(t_0, x_0)\equiv 0,\quad t\geqslant t_0. \tag{3.5}$$

由(3.1)～(3.2)及(3.4)知，

$$\begin{aligned}x(t)&=y(t)+\int_{t_0}^t G(t, s, x)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k)\\&=y(t)+\int_{t_0}^t\Big[\frac{\partial y}{\partial t_0}(t; s,x(s))+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t; s, x(s))\,F(s, x(s))\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;\ s,\ x(s))\ R(s,\ x(s))]\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k)$$

$$=y(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;\ s,x(s))\ R(s,\ x(s))\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k). \tag{3.6}$$

由(3.6)知，要估计 $\|x(t)\|$，将必须估计 $\left\|\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;\ s,\ x(s))\right\|$，$\|R(s,\ x(s))\|$ 及 $\Delta P(\tau_k)$，这便影响了摄动项的一些性质. 但若利用 (3.3),(3.5) 就有

$$\|x(t)\|^2=\|y(t)\|^2+\int_{t_0}^{t}2y(t;s,x(s))\frac{\partial y}{\partial x_0}(t;s,x(s))\ R(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{t_0<\tau_k<t}\Delta P(\tau_k),$$

从而克服了这一缺点.

4 一个新的比较结果

这一部分我们将利用变分李雅普诺夫函数方法建立一个新的比较定理.

定理 4.1 设 $V: R_+\times R^n\to R_+^N$，$V\in V_0'$ 且对每一个 (t,s)，$\|y(t,\ s,\ x)\|$ 关于 x 满足局部李普希兹条件，又

$$\begin{cases}D^+V(s,\ y(t,\ s,\ x))\leqslant g(t,\ s,\ V(s,y(t,\ s,\ x))), & s\neq\tau_k,\\ V(s,\ y(t,\ s,\ x+h_k(x)))\leqslant \Psi_k(V(s,\ y(t,\ s,\ x))), & s=\tau_k,\ k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

其中 $g: R_+^2\times R_+^N\to R^N$ 在 $(\tau_k,\ \tau_{k+1}]$，$k=1,2,\cdots$，上关于 s 连续，且对每一个 $t\in R_+$，$u\in R_+^N$，对所有的 k 都有 $\lim\limits_{(t,s,\ w)\to(t,\ \tau_k^+,\ u)} g(t,\ s,\ w)=g(t,\ \tau_k^+,\ u)$ 成立，并且 $g(t,\ s,\ u)$ 关于 u 拟单调不减，$\Psi_k: R_+^N\to R_+^N$ 不减. 设 $r(t,\ s,\ t_0,\ u_0)$ 是系统（Ⅳ）定义在 $(t_0,\ t]$ 上的最大解，则当 $V(t_0,\ y(t;\ t_0,\ x_0))\leqslant u_0$ 时，有

$$V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0))\leqslant r_0(t;\ t_0,\ u_0),\quad t\geqslant t_0, \tag{4.1}$$

$r_0(t;\ t_0,\ u_0)\equiv r(t,\ t,\ t_0,\ u_0)$，$y(t;\ t_0,\ x_0)$ 及 $x(t;\ t_0,\ x_0)$分别是系统(Ⅰ),(Ⅱ)的解.

证 设 $y(t)=y(t;\ s,\ x(s))$ 是系统(Ⅰ)的在 $(t_0,\ t]$ 上的以 $(s,\ x(s))$ 为初始值的任一解，并有 $V(t_0,\ y(t;\ t_0,\ x_0))\leqslant u_0$. 令 $m(t,\ s)=V(s,\ y(t,\ s,\ x))$. 从而对所有的 k，当 $s\neq\tau_k$时，对充分小的 $h>0$，有

$$\begin{aligned}&m(t,\ s+h)-m(t,\ s)\\ =&V(s+h,\ y(t,\ s+h,\ x(s+h)))-V(s,\ y(t,\ s,\ x(s)))\\ =&V(s+h,\ y(t,\ s+h,\ x(s+h)))-V(s+h,\ y(t,\ s+h,\ x+hf(s,\ x(s))))\\ &+V(s+h,\ y(t,\ s+h,\ x+hf(s,\ x(s))))-V(s,\ y(t,\ s,\ x(s))).\end{aligned}$$

由于对每一个 $(t,\ s)$，$V(t,\ x)$ 及 $\|y(t,\ s,\ x)\|$ 关于 x 满足局部李普希兹条件，从而有

$$D^+m(t,\ s)\leqslant g(t,\ s,\ m(t,\ s)),\ s\neq\tau_k,\ t_0\leqslant s\leqslant t. \tag{4.2}$$

而另一方面，当 $s=\tau_k$时，

$$\begin{aligned}m(t,\ \tau_k^+)&=V(\tau_k^+,\ y(t;\ \tau_k^+,\ x(\tau_k^+)))\\ &=V(\tau_k^+,\ y(t;\ \tau_k^+,\ x(\tau_k)+h_k(x(\tau_k))))\\ &=\Psi_k(m(t,\ \tau_k)).\end{aligned}$$

因此当 $s\in[t_0,\ \tau_1]$ 时，由比较定理(见文[5]中 Th1.7.1)知，

$$m(t,\ s)\leqslant r(t,\ s,\ t_0,\ u_0),\quad s\leqslant t.$$

由于 Ψ_k不减且 $m(t,\ \tau_1)\leqslant r(t,\ \tau_1,\ t_0,\ u_0)$，从而有

$$m(t,\tau_1^+)\leqslant\Psi_1(m(t,\tau_1))\leqslant\Psi_1(r(t,\tau_1,t_0,u_0))=r(t,\tau_1^+,t_0,u_0). \tag{4.3}$$

因此当 $s\in(\tau_1,\tau_2]$ 时，由（4.2）～（4.3）及比较定理（见文[5]中 Th1.7.1)知，

$$m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0),\quad s\leqslant t.$$

以此类推，可得结果 $m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0)$，$t_0\leqslant s\leqslant t$. 特别地，当 $s=t$ 时，有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant r_0(t;t_0,u_0),\quad t\geqslant t_0.$$ ▌

推论 4.1 在定理 4.1 中，若 $N=1$，$g(t,s,u)\equiv 0$，$u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$且

(1) 对所有的 k，$\Psi_k(u)=u$，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t;t_0,x_0)),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.4}$$

特别地取 $V(t,x)=\|x\|$，则由（4.4）得

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leqslant\|y(t;t_0,x_0)\|,\quad t\geqslant t_0.$$

(2) $\Psi_k(u)=d_ku$，$d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k,\quad t\geqslant t_0.$$

推论 4.2 在定理 4.1 中，若 $N=1$，$g(t,s,u)\equiv-\alpha u$，$u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$ 且 $\Psi_k(u)=d_ku$，$d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[-\alpha(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0. \tag{4.5}$$

特别地取 $V(t,x(t))=\|x\|$，则（4.5）可写为

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leqslant\|y(t;t_0,x_0)\|\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k e^{-\alpha(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0.$$

由上式可以看出，摄动项的出现，有时会改变解的一些性质.

推论 4.3 在定理 4.1 中，若 $N=1$，$g(t,s,u)=\lambda'(s)u$，$u_0=V(t_0,y(t;t_0,x_0))$ 且 $\Psi_k(u)=d_ku$，$d_k\geqslant 0$ 对所有的 k 均成立，则有

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[\lambda(t)-\lambda(t_0)],\quad t\geqslant t_0.$$

推论 4.4 在定理 4.1 中，若对所有的 k，有 $F(t,y)\equiv 0$，$I_k(y)=y$，则 $V(t_0,x_0)\leqslant u_0$ 意味着 $V(t,x(t;t_0,x_0))\leqslant r(t;t_0,u_0)$，$t\geqslant t_0$.

事实上，此时 $y(t;t_0,x_0)\equiv x_0$. 更进一步（2.1）化为

$$D^+V(s,x)\equiv\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(s+h,x+hf(s,x))-V(s,x)].$$

从而说明本文的比较定理是文［4］中比较定理的推广.

5 主要结果

本部分在已知系统（Ⅰ）具有某种有界性质的前提下，给出了脉冲摄动微分系统（Ⅱ）具有相应的有界性质的判别准则.

定理 5.1 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) $V\in V_0'$，且对每一个 (t,s)，$\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部李普希兹条件；

(2) $D^+V(t,s,x)\leqslant 0$，$t_0\leqslant s\leqslant t$；

(3) $V(\tau_k^+,x+h_k(x))\leqslant V(\tau_k,x)$，$k=1,2,\cdots$；

(4) 存在函数 $b\in\mathscr{K}R$，使得当 $(t,x)\in R_+\times R^n$ 时有 $b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))$；

(5) 存在函数 $a\in\mathscr{K}$，使得当 $(t,x)\in R_+\times R^n$ 时有 $V(t,x(t))\leqslant a(h_1(t,x(t)))$.

则由系统（Ⅰ）的 $(h_0,\tilde{h}_1)$-有界性质可推知系统（Ⅱ）的 (h_0,h)-有界性质.

证 仅证当系统（Ⅰ）为 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界时，系统（Ⅱ）为 (h_0,h)-等度有界.

由系统（Ⅰ）的 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界性知，对任意的 $\alpha>0$，存在 $\beta_1=\beta_1(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时有

$$h_1(t_0^+,\ y(t))<\beta_1,\quad t\geqslant t_0. \tag{5.1}$$

由条件(4)，选取 $\beta=\beta(t_0,\alpha)>0$ 使得 $b(\beta)>a(\beta_1)$.

下证当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时，$h(t,x(t))<\beta$，$t\geqslant t_0$.

由条件(2)～(3)及推论 4.1(1)知，$V(t,x(t))\leqslant V(t_0,y(t))$. 进一步结合(5.1)式，得

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(t_0,y(t))\leqslant a(h_1(t_0,y(t)))<a(\beta_1)<b(\beta)\ .$$

因而有 $h(t,x(t))<\beta$，$t\geqslant t_0$. 即系统（Ⅱ）为 (h_0,h)-等度有界.

关于系统（Ⅱ）的其它(h_0,h)-有界性质的证明可类似给出. ▍

定理 5.2 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) 定理 5.1 中的条件(1)，(3)～(5) 成立；

(2) $D^+V(t,s,x)\leqslant g(t,s,V(s,y(t,s,x)))$，$t_0\leqslant s\leqslant t$，其中 $g\in C[R_+^3,R]$；

(3) 系统（Ⅰ）为 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界的，

则由系统（Ⅳ）的等度有界性能推知系统(Ⅱ)的(h_0,h)-等度有界性.

证 由于系统（Ⅰ）是 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界的，则对任意的 $\alpha>0$，存在 $\beta_1=\beta_1(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $h_0(t_0^+,x_0)\leqslant\alpha$ 时有 $h_1(t_0^+,y(t))\leqslant\beta_1$，$t\geqslant t_0$.

记 $\beta_2=\max\limits_{h_1(t_0^+,y(t))\leqslant\beta_1}V(t_0,y)>0$. 由条件 (1)及(Ⅳ)的等度有界性知，存在 $\beta=\beta(t_0,\alpha)>0$ 使得当 $0\leqslant u_0\leqslant\beta_2$ 时，有

$$\|u(t;t_0,u_0)\|\leqslant b(\beta),\quad t\geqslant t_0. \tag{5.2}$$

记 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ ，$y(t)=y(t;,t_0,x_0)$，则由条件(1)～(2)及定理 4.1 知，

$$V(t,x(t))\leqslant r_0(t;t_0,V(t_0,y(t))),\quad t\geqslant t_0,$$

其中 $r(t,s,t_0,u_0)$ 是系统（Ⅳ）在 $(t_0,t]$ 上的最大解，$r_0(t;t_0,u_0)\equiv r(t,t,t_0,u_0)$ 且 $u_0=V(t_0,y(t))<\beta_2$. 从而由条件 (1) 及式 (5.2) 得，

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))\leqslant r_0(t;t_0,V(t_0,y(t)))<b(\beta),\quad t\geqslant t_0.$$

即 $h(t,x(t))<\beta$，$t\geqslant t_0$. 因而系统（Ⅱ）的解是 (h_0,h)-等度有界的. ▍

定理 5.3 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) $V\in V_0'$,并对每一个 (t,s)，$\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部李普希兹条件；

(2) 存在函数 $b\in\mathscr{K}R$，使得

$$b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t)),\quad (t,x)\in R_+\times R^n;$$

(3)存在函数 $a\in\mathscr{K}$，使得

$$V(t,x(t))\leqslant a(h_1(t,x(t))),\quad (t,x)\in R_+\times R^n;$$

(4)存在一有界可微函数 $M(s)$,使得 $M'(s)=m(s)$ 且

$$D^+V(t,s,x)\leqslant m(s)V(t,s,x),\quad t\neq\tau_k,\quad t\leqslant s\leqslant t_0;$$

(5) $V(\tau_k^+,x+h_k(x))\leqslant d_kV(\tau_k,x)$，其中 $d_k>0$ 对所有的 k 成立且 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}d_k$ 收敛.

则由系统（Ⅰ）的$(h_0,\tilde{h}_1)$-有界性质可以推知系统（Ⅱ）的(h_0,h)-有界性质.

证 我们只需证明在系统(Ⅰ)为 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界的条件下，系统(Ⅱ)是 (h_0,h)-等度有界的. 系统(Ⅱ)的其它(h_0,h)-有界性质可类似得到.

由于系统(Ⅰ)是 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界的，则对任意的 $\alpha>0$，$t_0\in R_+$ 都存在 $\beta_1=\beta_1(t_0,\alpha)>0$，使得当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时有

$$h_1(t_0^+,y(t))<\beta_1,\quad t\geqslant t_0. \tag{5.3}$$

又因为 $M(t)$ 为一有界函数，从而存在常数 $K>0$ 使得

$$\|M(t)\|<K,\quad t\geqslant t_0. \tag{5.4}$$

又由 $d_k>0$ 对所有的 k 成立，且 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}d_k$ 收敛，则存在 $N>0$ 使得

$$\prod_{k=1}^{\infty}d_k\leqslant N. \tag{5.5}$$

从而对上述的 $\alpha>0$，$t_0\in R_+$，取 $\beta=\beta(t_0,\alpha)$ 使得

$$b(\beta)\geqslant a(\beta_1)N\exp(K-M(t_0)).$$

下面证明当 $h_0(t_0^+,x_0)<\alpha$ 时，有 $h(t,x(t))<\beta$，$t\geqslant t_0$. 由条件(4)～(5)及推论 4.3 知，

$$V(t,x(t))\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[M(t)-M(0)],\quad t\geqslant t_0. \tag{5.6}$$

进一步由条件(2)～(3)及式(5.3)～(5.6)知，

$$\begin{aligned}b(h(t,x(t)))&\leqslant V(t,x(t))\\&\leqslant[V(t_0,y(t;t_0,x_0))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[M(t)-M(0)]\\&<[a(h_1(t_0,y(t))\prod_{t_0<\tau_k<t}d_k]\exp[M(t)-M(0)]\\&<a(\beta_1)N\exp(K-M(t_0))\\&\leqslant b(\beta).\end{aligned}$$

从而有 $h(t,x(t))<\beta$，$t\geqslant t_0$. ▌

类似定理 5.3 的证明，我们可以得到下面的定理.

定理 5.4 设 $h_0,h_1,h\in\Gamma$ 且

(1) 定理 5.3 的条件(1)～(3)及(5)成立；

(2) 存在 $\alpha\geqslant 0$ 使得

$$D^+V(t,s,x)\leqslant-\alpha V(t,s,x),\quad t\neq\tau_k,\quad t\leqslant s\leqslant t_0.$$

则由系统(Ⅰ)的 $(h_0,\tilde{h}_1)$-有界性质可以推知系统(Ⅱ)的 (h_0,h)-有界性质.

下面我们通过一个例子来说明定理的应用.

例子 考虑如下系统

$$(\text{Ⅶ})\begin{cases}y'=-1-y^2,\quad t\neq\dfrac{k\pi}{4},\\ \Delta y=1,\quad t=\dfrac{k\pi}{4},\\ y(0^+)=0,\quad k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

$$(\text{Ⅷ})\begin{cases}x'=-1-x^2+\dfrac{x+6t(1+x^2)}{3(1+t^2)},\quad t\neq\dfrac{k\pi}{4},\\ \Delta x=\beta_kx=1+\beta_kx-1,\quad t=\dfrac{k\pi}{4},\\ x(0^+)=0,\quad k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

其中 β_k 满足 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\beta_k)^2$ 收敛.

取 $h_0=h_1=h=\|x\|$，易知系统（Ⅶ）是 $(h_0,\tilde{h}_1)$-等度有界的.

取 $V(t,x)=x^2$，则有

$$D^+V(t,x)=2x\cdot x'=2x\cdot\left[-1-x^2+\frac{x+6t(1+x^2)}{3(1+t^2)}\right]$$
$$\leqslant 2\|x\|\cdot\left\|-1-x^2+\frac{x+3(1+t^2)(1+x^2)}{3(1+t^2)}\right\|$$
$$=\frac{2x^2}{3(1+t^2)}\leqslant\frac{1}{1+t^2}V(t,x),$$
$$V(\tau_k^+,x+h_k(x))=(x+\beta_k x)^2=(1+\beta_k)^2x^2=(1+\beta_k)^2V(\tau_k,x).$$

即存在有界可微函数 $M(t)=\arctan t$ 及数列 $d_k=(1+\beta_k)^2$，使得系统（Ⅶ），系统（Ⅷ）及 V 函数满足定理 5.3 的所有条件，从而由定理 5.3 知，系统（Ⅷ）是 (h_0,h)-等度有界的.

参 考 文 献

[1] Lakshmikantham V, Liu X, Leela S. Variational Lyapunov method and stability theory. Mathematical Problem in Engineering, 1998, **3**: 555－571

[2] Fu X, Zhang L. On boundedness of solutions of impulsive integro-differential systems with fixed moments of impulsive effects. Acta Mathmatica Scientia, 1997, **17**(2): 219－229

[3] Lakshmikantham V, Liu X. Stability Analysis inTerms of Two Measures. Singapore: World Scientific, 1993

[4] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989

[5] Lakshmikantham V, Leela S. Differential and Integral Inequalities. New York: Academic Press, 1969

The Boundedness of Perturbed Systems with Impulsive Effects

Fu Xilin　Wang Kening　Lao Huixue

(*Department of Mathematics*, *Shandong Normal University*, *Jinan* 250014)

Abstract: This paper, by variational Lyapunov method, has studied boundedness in terms of two measures of perturbed systems with impulsive effects. Compared to the former results obtained by Lyapunov method, it is not difficult to find that variational Lyapunov method is an extension of Lyapunov method.

Key words: Variational Lyapunov function; Comparison theorem; Boundedness in terms of two measures; Perturbation; Impulse.

MR(2000) Subject Classification: 34K20