2005,**25A**(2):277—280

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

气体动力学压差方程一类波的相互作用*

杨柳　盛万成

(上海大学数学系　上海 200444)

摘要:该文利用一个分析不等式,得到了气体动力学压差方程前向激波追赶前向激波相互作用的结果为后向激波与前向激波相离:$\vec{S}\vec{S}\to\overleftarrow{S}\vec{S}$.

关键词:气体动力学压差方程;激波;相互作用;分析不等式.

MR(2000)主题分类:35L65;76N10　　**中图分类号**:O175.27;O354.5　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)02-277-04

1　引言

气体动力学中可压流的 Euler 方程为下列守恒律系统[2,3,7,8]

$$\begin{cases}\rho_t+\nabla\cdot(\rho U)=0,\\ (\rho U)_t+\nabla\cdot(\rho U\otimes U)+\nabla p=0,\\ (\rho(e+\frac{1}{2}U^2))_t+\nabla\cdot(\rho U(h+\frac{1}{2}U^2))=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

这里$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$,$U=(u,v,w)$、$p$、和 ρ 分别表示速度、压力和密度,都是(t,x,y,z)的未知函数,e 和 h 分别表示内能和焓,对多方气体有如下形式

$$e=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho},\quad h=e+\frac{p}{\rho},$$

其中 $\gamma>1$ 为常数. Euler 方程(1.1)有两个简化模型[1,3,4,6],若在质量守恒律和动量守恒律中忽略压差效应,我们可得输运方程[3,4,5,6]

$$\begin{cases}\rho_t+\nabla\cdot(\rho U)=0,\\ (\rho U)_t+\nabla\cdot(\rho U\otimes U)=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

若仅考虑压差效应,我们可得压差方程[3,4]

$$\begin{cases}(\rho U)_t+\nabla p=0,\\ (\rho(e+\frac{1}{2}U^2))_t+\nabla\cdot(Up)=0,\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 $\rho\geqslant 0$ 为常数. 本文我们考察一维压差方程

收稿日期:2003-09-01

E-mail:mawcsheng@staff.shu.edu.cn

* 基金项目:国家自然科学基金(10271072)资助

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0, \\ (p + \frac{1}{2}u^2)_t + (up)_x = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

在文[4]中，我们得到了压差方程的基础波为

1）前向(后向)中心波$\overleftrightarrow{R}$

$$\overleftrightarrow{R}\begin{cases} x = \pm\sqrt{p}t, \\ du = \pm 2d\sqrt{p}, \\ p_l < p_r \quad (p_l > p_r), \end{cases} \tag{1.5}$$

这里下标 l,r 指波的左右两边的状态；

2）前向(后向)激波$\overleftrightarrow{S}$

$$\overleftrightarrow{S}:\begin{cases} x = \pm\sqrt{p}t, \\ [u] = \pm\frac{1}{\sqrt{p}}[p], \\ p_l > p_r \quad (p_l < p_r). \end{cases} \tag{1.6}$$

2 激波的相互作用

讨论两个前向激波的相互作用，即激波追赶激波：$\vec{S}\vec{S}$. 考察压差方程(1.1)的初值问题

$$(u,p)|_{t=0} = \begin{cases} (u_l,p_l), & x < x_1, \\ (u_m,p_m), & x_1 < x < x_2, \\ (u_r,p_r), & x > x_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

则在(t,x)-平面上 $t=0$ 附近有两个前向激波 $\vec{S}^{(1)}$，$\vec{S}^{(2)}$. 由稳定性条件，得

$$\sqrt{\frac{p_m+p_r}{2}} < \sqrt{p_m} < \sqrt{\frac{p_l+p_m}{2}},$$

即前向激波 $\vec{S}^{(1)}$ 的传播速度比另一前向激波 $\vec{S}^{(2)}$ 的传播速度快. 这就意味着 $\vec{S}^{(1)}$ 在有限时间内会赶上 $\vec{S}^{(2)}$ 并且形成一个新的 Riemann 问题(如图 2.1). ⓡ在两图中分别指状态(u_r,p_r)和点(u_r,p_r)等等.

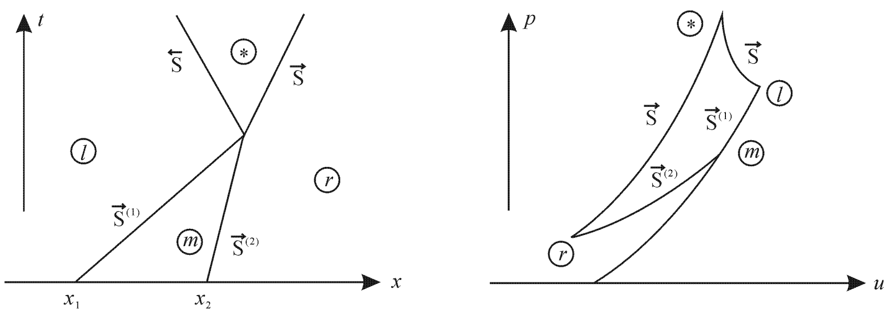

图 2.1

我们可以证明ⓡ$\in$Ⅳⓛ(状态(u_r,p_r)落在状态(u_l,p_l)第四类区域中，即这两个状态可通过 $\overleftarrow{S}\vec{S}$ 相连). 事实上，ⓜ$\in\vec{S}$(ⓛ)(状态(u_m,p_m)通过前向激波 $\vec{S}$ 与状态(u_l,p_l)相连)，

且Ⓡ$\in\overrightarrow{S}$(ⓜ),即

$$u_m-u_l=\sqrt{\frac{2}{p_m+p_l}}(p_m-p_l)\quad(p_m<p_l),$$

$$u_r-u_m=\sqrt{\frac{2}{p_r+p_m}}(p_r-p_m)\quad(p_r<p_m).$$

则,我们有

$$u_r-u_l=\sqrt{\frac{2}{p_m+p_l}}(p_m-p_l)+\sqrt{\frac{2}{p_r+p_m}}(p_r-p_m).$$

接下来,我们证明

$$\sqrt{\frac{2}{p_m+p_l}}(p_m-p_l)+\sqrt{\frac{2}{p_r+p_m}}(p_r-p_m)<\sqrt{\frac{2}{p_r+p_l}}(p_r-p_l).\tag{2.2}$$

引理 1 设 $0\leqslant x<y<1$, 则

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}-\frac{1-y}{\sqrt{1+y}}<\frac{y-x}{\sqrt{y+x}}.\tag{2.3}$$

证 令

$$f(x,y)=\frac{y-x}{\sqrt{y+x}}-\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}+\frac{1-y}{\sqrt{1+y}},$$

则对 $0<y<1$, 有 $f(y,y)=0$, $f(0,y)>0$ 且

$$f_x{}'(x,y)=-\frac{3y+x}{2(y+x)^{3/2}}+\frac{3+x}{2(1+x)^{3/2}}.$$

记

$$g(x,y)=\frac{3y+x}{2(y+x)^{3/2}},$$

我们可以得到

$$g_y{}'(x,y)=-\frac{3(y-x)}{4(y+x)^{5/2}}<0,\quad 0\leqslant x<y\leqslant 1.$$

这样对 $0\leqslant x<y<1$,有 $f_x{}'(x,y)<0$. 于是(2.3)式为真. 引理证毕. ▎

令 $x=p_r/p_l$, $y=p_m/p_l$, 由引理立即可得(2.2)式.

此结果表明一个前向激波追赶上另一前向激波,将穿透后继续向前,且反射出一个后向激波,即存在唯一状态(u_*,p_*)通过 $\overrightarrow{S}\overrightarrow{S}$ 和 $\overleftarrow{S}\overleftarrow{S}$ 连接状态(u_l,p_l)和状态(u_r,p_r)(如图 2.1),表示如下

$$\overrightarrow{S}\overrightarrow{S}\rightarrow\overleftarrow{S}\overleftarrow{S}.$$

参 考 文 献

[1] Agarwal R K, Halt D W. A modified CUSP scheme in wave/particle split form for unstructured grid Euler flow. Frontiers of Computational Fluid Dynamics, David A. In:Caughey, Mohamed M Hafez, eds. Singapore:World Scientific Publishing Company, 1994. 155-163

[2] Chang T, Hsiao L. The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 41. New York: Longman Scientific & Technical, 1989

[3] Li J, Zhang T, Yang S. The two-dimensional Riemann problem in gas dynamics. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 98. New York: Longman Scientific and Technical, 1998

[4] Sheng W C. The initial value problems for the pressure difference equations in gas dynamics. preprint, 2002

[5] Sheng W C. Delta waves as distribution solutions of the 2-D transportation equations in gas dynamics. Applied Functional Analysis, 1997, **3**: 161－168

[6] Sheng W C, Zhang T. The Riemann problem for the transportation equations in gas dynamics. Memoirs of AMS, 1999, **137**(654)

[7] Smoller J A. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1982

[8] Zhang T, Zheng Y. Conjecture on structure of solution of Riemann problem for 2-D gas dynamic systems. SIAM J Math Anal, 1990, **21**(3): 493－630

The Interaction of Shock Waves of Pressure Difference Equations in Gas Dynamics

Yang Liu　Sheng Wancheng

(*Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444)

Abstract: By using an inequality, the authors obtain the result of the interaction of two forward shock waves is that one backward shock wave and forward shock wave deviate from each other: $\overrightarrow{S}\overrightarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\overrightarrow{S}$.

Key words: Pressure difference equations; Shock waves; Interaction; Inequality.

MR(2000) Subject Classification: 35L65; 76N10