2009,**29A**(3):741–750

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆 *

[1] 刘晓冀　[2] 张仕光

([1] 广西民族大学数学与计算机科学学院　广西南宁 530006;
[2] 衡水学院数学与计算机科学系　河北衡水 053000)

摘要：该文中，$a: X \longrightarrow Y, w: Y \longrightarrow X$ 为加法范畴 $\pounds$ 中的态射，$k_1: K_1 \longrightarrow X$ 是 $(aw)^i$ 的核，$k_2: K_2 \longrightarrow Y$ 是 $(wa)^j$ 的核. 那么下列命题等价：(1) a 在 $\pounds$ 中有 w - 加权 Drazin 逆 $a_{d,w}$; (2)$\lambda_1: X \longrightarrow L_1$ 是 $(aw)^i$ 的上核，$k_1\lambda_1$ 和 $(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1$ 是可逆的; (3) $\lambda_2: Y \longrightarrow L_2$ 是 $(wa)^j$ 的上核，$k_2\lambda_2$ 和 $(wa)^{j+1}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2$ 是可逆的. 作者又研究了具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴中态射的 w - 加权 Drazin 逆的柱心幂零分解，证明了其存在性. 作者把具有核的态射的 Drazin 逆及其柱心幂零分解推广到具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆及其柱心幂零分解，并给出了表达式.

关键词：正合加法范畴；w - 加权 Drazin 逆；柱心幂零分解.

MR(2000) 主题分类: 15A09　**中图分类号**: O151.21　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-741-10

1　引言

文献 [2] 把矩阵的 Drazin 逆推广到具有核的态射的 Drazin 逆，文献 [3] 把矩阵的柱心幂零分解推广到具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴中态射的柱心幂零分解. 本文中，我们把具有核的态射的 Drazin 逆及其柱心幂零分解推广到具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆及其柱心幂零分解，并给出了表达式.

$\pounds$ 表示一个范畴，$A, B, C\cdots$ 为 $\pounds$ 的对象，$a, b, c\cdots$ 为 $\pounds$ 的态射. 其他相关的记号见文献 [1]. 本文中态射的合成顺序与文献 [2] 相同.

为了进一步讨论具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆及其柱心幂零分解，我们首先引进一些基本定义.

定义 1.1　设 $a: X \longrightarrow X$ 为具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴 $\pounds$ 中的态射，如果

$$\mathrm{Im}(a^{i+1}) = \mathrm{Im}(a^i), \tag{1}$$

那么使得 (1) 式成立的最小正整数 i, 被称为 a 的指标，用 $\mathrm{ind}(a)=i$ 表示. 若 a 是同构的，则 $\mathrm{ind}(a)=0$; 否则，若 a 不是同构的，则 $\mathrm{ind}(a)\geq 1$.

定义 1.2　设 $a: X \longrightarrow Y$, $w: Y \longrightarrow X$ 是加法范畴 $\pounds$ 中的态射，并且 $x: X \longrightarrow Y$ 满足

$$(aw)^{i+1}xw = (aw)^i, \tag{2}$$

收稿日期：2007-03-04; 修订日期：2009-01-08

E-mail: xiaojiliu72@yahoo.com.cn

* 基金项目：广西科学基金项目 (桂科青 0640016) 和广西民族大学重大科研项目联合资助

$$xwawx = x, \tag{3}$$

$$awx = xwa, \tag{4}$$

则称 x 为 a 的 w - 加权 Drazin 逆，并记为 $x = a_{d,w}$. 若 $i = 1$, 则称 a 的 w - 加权 Drazin 逆为 a 的 w - 加权群逆，并记为 $x = a_{\sharp,w}$. 并且若 $w = id_X$, $a : X \longrightarrow X$, 那么 $x = a_d$.

由定义 1.2, 我们有下面的重要性质.

命题 1.1 若 $a_{d,w}$ 存在，则一定唯一.

证 若对正整数 k_1 和 k_2, x_1 和 x_2 满足 (2)–(4) 式，令 $k = \max(k_1, k_2)$. 则

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1wawx_1 = x_1wawx_1wawx_1 = awx_1wawx_1wx_1 = awawx_1wx_1wx_1 \\
&= (aw)^2x_1(wx_1)^2 = \cdots = (aw)^kx_1(wx_1)^k = (aw)^{k+1}x_2wx_1(wx_1)^k \\
&= x_2(wa)^{k+1}wx_1(wx_1)^k = x_2(wa)^kwawx_1wx_1(wx_1)^{k-1} \\
&= x_2(wa)^kwx_1wawx_1(wx_1)^{k-1} = x_2(wa)^kwx_1(wx_1)^{k-1} \\
&= \cdots = x_2wawx_1.
\end{aligned}$$

类似地， $x_2 = (aw)^{k+1}x_2(wx_2)^{k+1}$.

由 $awx_2 = x_2wa$ 得 $awx_2w = x_2waw$, 故

$$x_2w = (aw)^{k+1}(x_2w)^{k+2} = (x_2w)^{k+2}(aw)^{k+1}.$$

且

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2wawx_1 = (x_2w)^{k+2}(aw)^{k+1}awx_1 = (x_2w)^{k+2}(aw)^{k+1}x_1wa \\
&= (x_2w)^{k+2}(aw)^ka = (x_2w)^{k+1}x_2(wa)^{k+1} = (x_2w)^kx_2wx_2wa(wa)^k \\
&= (x_2w)^kx_2wawx_2(wa)^k = (x_2w)^kx_2(wa)^k \\
&= \cdots = x_2wx_2wa = x_2wawx_2 = x_2.
\end{aligned}$$

∎

引理 1.1 设 $a : X \longrightarrow Y$, $w : Y \longrightarrow X$ 是加法范畴中的态射，那么下列命题等价

(1) $(wa)_d$ 存在;

(2) $(aw)_d$ 存在;

(3) $a_{d,w}$ 存在.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2) 令 $i = \mathrm{ind}(wa)$, 则 $(wa)_d$ 满足

$$(wa)^{i+1}(wa)_d = (wa)^i, [(wa)_d]^2wa = (wa)_d, (wa)_dwa = wa(wa)_d.$$

取 $x = a[(wa)_d]^2w$, 于是有

$$(aw)^{i+2}x = (aw)^{i+2}a[(wa)_d]^2w = a(wa)^{i+2}[(wa)_d]^2w = a(wa)^iw = (aw)^{i+1},$$

$$x^2aw = \{a[(wa)_d]^2w\}^2aw = a(wa)_d(wa)_dw = x,$$

$$xaw = a[(wa)_d]^2waw = awa[(wa)_d]^2w = awx,$$

从而得， $x = (aw)_d$ 和 $\mathrm{ind}(aw) \le i + 1$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 令 $y = [(aw)_d]^2a$, 则有

$$(aw)^{i+1}yw = (aw)^{i+1}[(aw)_d]^2aw = (aw)^i,$$

$$ywawy = [(aw)_d]^2awaw[(aw)_d]^2a = (aw)_d(aw)_da = y,$$

$$awy = aw[(aw)_d]^2a = [(aw)_d]^2awa = ywa,$$

于是可得， $y = a_{d,w}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 取 $z = wa_{d,w}$, 从而可得

$$\begin{aligned}(wa)^{i+2}wa_{d,w} &= (wa)^{i+1}wawa_{d,w} = (wa)^{i+1}wa_{d,w}wa \\ &= w(aw)^{i+1}a_{d,w}wa = w(aw)^ia = (wa)^{i+1},\end{aligned}$$

$$wa_{d,w}wa = wawa_{d,w},$$

$$wa_{d,w}wawa_{d,w} = wa_{d,w},$$

故， $z = (wa)_d$. ∎

引理 1.2 设 $a : X \longrightarrow Y$, $w : Y \longrightarrow X$ 是加法范畴中的态射. 若 $i = \mathrm{ind}(wa)$, 于是

(1) $(aw)_d = a[(wa)_d]^2w$, $\mathrm{ind}(aw) \le i + 1$;

(2) $w(aw)_d = (wa)_dw$, $(aw)_da = a(wa)_d$;

(3) $a_{d,w} = [(aw)_d]^2a = a[(wa)_d]^2$;

(4) $(aw)_d = a_{d,w}w$, $(wa)_d = wa_{d,w}$.

定义 1.3 在加法范畴 $\pounds$ 上的有限矩阵范畴 $M_\pounds$ 定义如下：对象为范畴 $\pounds$ 的有限序列 $(X_1, \cdots, X_m)$; 态射为带有 $a_{i,j} : X_i \longrightarrow Y_j$ 的有限矩阵 $(a_{i,j}) : (X_1, \cdots, X_m) \longrightarrow (Y_1, \cdots, Y_n)$; 对应方法为通常矩阵的加法和乘法.

2 具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆

在本节，我们主要考察具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆，把具有核的态射的 Drazin 逆推广到了具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆，得到了加法范畴 $\pounds$ 中具有核的态射的 w - 加权 Drazin 逆的一些重要结果.

定理 2.1 设 $a : X \longrightarrow Y$, $w : Y \longrightarrow X$ 为加法范畴 $\pounds$ 中的态射，对正整数 i, j, 假设 $k_1 : K_1 \longrightarrow X$ 是 $(aw)^i : X \longrightarrow X$ 的核， $k_2 : K_2 \longrightarrow Y$ 是 $(wa)^j : Y \longrightarrow Y$ 的核. 那么下列命题等价

(1) a 在 $\pounds$ 中有 w - 加权 Drazin 逆 $a_{d,w}$;

(2) $\lambda_1 : X \longrightarrow L_1$ 是 $(aw)^i$ 的上核, $k_1\lambda_1 : K_1 \longrightarrow L_1$ 和 $(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1 : X \longrightarrow X$ 可逆;

(3) $\lambda_2 : Y \longrightarrow L_2$ 是 $(wa)^j$ 的上核, $k_2\lambda_2 : K_2 \longrightarrow L_2$ 和 $(wa)^{j+1}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2 : Y \longrightarrow Y$ 可逆.

此时， $\gamma_1 = \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}$ 是 $(aw)^i$ 的上核， $\gamma_2 = \lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}$ 是 $(wa)^j$ 的上核，并且 $awa_{d,w}w + \gamma_1k_1 = 1_X$, $wawa_{d,w} + \gamma_2k_2 = 1_Y$,

$$a_{d,w} = [(aw)^{i+1} + \gamma_1k_1]^{-1}(aw)^i = (aw)^i[(aw)^{i+1} + \gamma_1k_1]^{-1}, \tag{5}$$

$$a_{d,w} = (wa)^j[(wa)^{j+1} + \gamma_2k_2]^{-1} = [(wa)^{j+1} + \gamma_2k_2]^{-1}(wa)^j. \tag{6}$$

证 (1) $\Longrightarrow$ (2) 假设 $a_{d,w}$ 存在. 由引理 1.1 知 $(aw)_d$ 存在，再由文献 [2, 定理 2] 知， λ_1 是 $(aw)^i$ 的上核， $k_1\lambda_1$ 和 $(aw)^{i+1} + \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1$ 是可逆的.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $\lambda_1: X \longrightarrow L_1$ 是 $(aw)^i$ 的上核， $k_1\lambda_1: K_1 \longrightarrow L_1$ 和 $(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1: X \longrightarrow X$ 是可逆的，从而得

$$[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1](aw)^i=(aw)^{2i+1}=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1].$$

故

$$\begin{aligned}(aw)^i &= [(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^{2i+1}\\ &= (aw)^{2i+1}[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}\\ &= [(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^{2i+1}[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}\\ &= [(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^i.\end{aligned}$$

由文献 [2, 定理 2] 知

$$(aw)_d=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1},$$

再由引理 1.2 得

$$\begin{aligned}a_{d,w} &= [(aw)_d]^2a=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}a\\ &= [(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^{2i+1}\\ &= [(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^i=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\gamma_1k_1]^{-1}.\end{aligned}$$

此时， $\gamma_1=\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}$ 是 $(aw)^i$ 的上核， $awa_{d,w}w+\gamma_1k_1=1_X$, 并且

$$a_{d,w}=[(aw)^{i+1}+\gamma_1k_1]^{-1}(aw)^i=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\gamma_1k_1]^{-1}.$$

类似地,我们可得 (1) $\Longleftrightarrow$ (3). 此时, $\gamma_2=\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}$ 是 $(wa)^j$ 的上核, $wawa_{d,w}+\gamma_2k_2=1_Y$, 并且

$$a_{d,w}=(wa)^j[(wa)^{j+1}+\gamma_2k_2]^{-1}=[(wa)^{j+1}+\gamma_2k_2]^{-1}(wa)^j.$$ ▍

由定理 2.1, 我们可得到下面的推论.

推论 2.1 设 $a: X \longrightarrow Y$, $w: Y \longrightarrow X$ 是加法范畴 $\pounds$ 中的态射，假设 $k_1: K_1 \longrightarrow X$ 是 $aw: X \longrightarrow X$ 的核， $k_2: K_2 \longrightarrow Y$ 是 $wa: Y \longrightarrow Y$ 的核．则下列命题等价

(1) 在 $\pounds$ 上 a 有 w - 加权群逆 $a_{\sharp,w}$;

(2) $\lambda_1: X \longrightarrow L_1$ 是 aw 的上核， $k_1\lambda_1: K_1 \longrightarrow L_1$ 和 $aw+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1: X \longrightarrow X$ 可逆;

(3) $\lambda_2: Y \longrightarrow L_2$ 是 wa 的上核， $k_2\lambda_2: K_2 \longrightarrow L_2$ 和 $wa+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2: Y \longrightarrow Y$ 可逆.

此时，$\gamma_1=\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}$ 是 aw 的上核，$\gamma_2=\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}$ 是 wa 的上核，$awa_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1=1_X$, $wawa_{\sharp,w}+\gamma_2k_2=1_Y$, 而且

$$a_{\sharp,w}=[aw+\gamma_1k_1]^{-2}aw=aw[aw+\gamma_1k_1]^{-2}. \tag{7}$$

$$a_{\sharp,w}=wa[wa+\gamma_2k_2]^{-2}=[wa+\gamma_2k_2]^{-2}wa. \tag{7$'$}$$

证 由定理 2.1 得，当 $i=j=1$ 时， (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3). 此时， $\gamma_1=\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}$ 是 aw 的上核， $\gamma_2=\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}$ 是 wa 的上核，而且 $awa_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1=1_X$, $wawa_{\sharp,w}+\gamma_2k_2=1_Y$, $a_{\sharp,w}=[(aw)^2+\gamma_1k_1]^{-1}aw=aw[(aw)^2+\gamma_1k_1]^{-1}=wa[(wa)^2+\gamma_2k_2]^{-1}=[(wa)^2+\gamma_2k_2]^{-1}wa$.

因 $(aw+\gamma_1k_1)(a_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1)=awa_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1=1_X$, $(a_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1)(aw+\gamma_1k_1)=1_X$, 故 $aw+\gamma_1k_1$ 是可逆的, 且 $(aw+\gamma_1k_1)^{-1}=a_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1$. 又因 $[(aw)^2+\gamma_1k_1]^{-1}=(a_{\sharp,w}w)^2+\gamma_1k_1$, $(a_{\sharp,w}w+\gamma_1k_1)^2=(a_{\sharp,w}w)^2+\gamma_1k_1$, 从而可得 $[(aw)^2+\gamma_1k_1]^{-1}=[aw+\gamma_1k_1]^{-2}$, 即得

$$a_{\sharp,w}=[aw+\gamma_1k_1]^{-2}aw=aw[aw+\gamma_1k_1]^{-2}.$$

类似地可得 $wa+\gamma_2k_2$ 是可逆的, 且 $(wa+\gamma_2k_2)^{-1}=wa_{\sharp,w}+\gamma_2k_2$. 又因 $[(wa)^2+\gamma_2k_2]^{-1}=(wa_{\sharp,w})^2+\gamma_2k_2$, $(wa_{\sharp,w}+\gamma_2k_2)^2=(wa_{\sharp,w})^2+\gamma_2k_2$, 从而可得 $[(wa)^2+\gamma_2k_2]^{-1}=[wa+\gamma_2k_2]^{-2}$, 即得

$$a_{\sharp,w}=wa[wa+\gamma_2k_2]^{-2}=[wa+\gamma_2k_2]^{-2}wa. \qquad \blacksquare$$

注 当 $a:X\longrightarrow X$, $w=id_X$ 时, 可得文献 [2] 的相应结论.

定理 2.2 设 $a:X\longrightarrow Y$, $w:Y\longrightarrow X$ 是加法范畴 $\pounds$ 中的态射. 假设 $k_1:K_1\longrightarrow X$, $\lambda_1:X\longrightarrow L_1$ 分别是 $aw:X\longrightarrow X$ 的核和上核; $k_2:K_2\longrightarrow Y$, $\lambda_2:Y\longrightarrow L_2$ 分别是 $wa:Y\longrightarrow Y$ 的核和上核. a 在 $\pounds$ 中有 w - 加权群逆 $a_{\sharp,w}$ 存在当且仅当 $m=\begin{bmatrix} waw & \lambda_2 \\ k_1 & 0\end{bmatrix}:(Y,K_1)\longrightarrow(X,L_2)$ 在 $M_\pounds$ 中可逆, 且

$$m^{-1}=\begin{bmatrix} a_{\sharp,w} & \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1} \\ (k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & 0\end{bmatrix}:(X,L_2)\longrightarrow(Y,K_1). \tag{8}$$

证 若 a 在 $\pounds$ 中有 w - 加权群逆 $a_{\sharp,w}$, 由推论 2.1 知, $k_1\lambda_1$, $k_2\lambda_2$ 是可逆的. 令

$$x=\begin{bmatrix} a_{\sharp,w} & \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1} \\ (k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & 0\end{bmatrix},$$

通过直接计算得

$$mx=\begin{bmatrix} wawa_{\sharp,w}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1} \\ k_1a_{\sharp,w} & k_1\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\end{bmatrix},$$

由 k_1, λ_1 分别是 aw 的核和上核以及推论 2.1 得

$$waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}=0,\quad k_1a_{\sharp,w}=0,\quad wawa_{\sharp,w}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2=1_Y,\quad k_1\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}=1_{K_1}.$$

故 $mx=\begin{bmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_{K_1}\end{bmatrix}$, 通过类似的方式可得 $xm=\begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 1_{L_2}\end{bmatrix}$. 从而得 m 在 $M_\pounds$ 中可逆, 且 $m^{-1}=x$.

反之, 若 m 可逆, 设 $m^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} waw\alpha+\lambda_2\gamma & waw\beta+\lambda_2\delta \\ k_1\alpha & k_1\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_{K_1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \alpha waw+\beta k_1 & \alpha\lambda_2 \\ \gamma waw+\delta k_1 & \gamma\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 1_{L_2}\end{bmatrix}.$$

因 $\alpha waw+\beta k_1=1_X$, $k_1\alpha=0$, 从而得 $\alpha wawa\alpha=\alpha$; 又因 k_1 是 aw 的核, λ_2 是 wa 的上核, 以及 $\alpha waw+\beta k_1=1_X$, $wawa\alpha+\lambda_2\gamma=1_Y$, 从而得 $\alpha wawaw=aw$, $wawaw\alpha=wa$, 故 $\alpha wawawa\alpha=aw\alpha$, $\alpha wawawa\alpha=\alpha wa$, 即 $aw\alpha=\alpha wa$; 而 $(aw)^2\alpha w=aw\alpha waw=\alpha wawaw=aw$, 从而可得 $\alpha=a_{\sharp,w}$. 再由推论 2.1 知, $k_1\lambda_1$, $k_2\lambda_2$ 是可逆的. 经直接计算可得 $\beta=\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}$, $\gamma=(k_2\lambda_2)^{-1}k_2$. 由 $\gamma\lambda_2=1_{L_2}$, $waw\beta+\lambda_2\delta=0$ 以及 k_2 是 wa 的核可得 $\delta=-\gamma waw\beta=-(k_2\lambda_2)^{-1}k_2waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}=0$, 即

$$m^{-1}=\begin{bmatrix} a_{\sharp,w} & \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\\ (k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & 0\end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

定理 2.3 设 $a:X\longrightarrow Y$, $w:Y\longrightarrow X$ 是加法范畴 $\pounds$ 中的态射. 对正整数 i,j, 假设 $k_1:K_1\longrightarrow X$, $\lambda_1:X\longrightarrow L_1$ 分别是 $(aw)^i:X\longrightarrow X$ 的核和上核; $k_2:K_2\longrightarrow Y$, $\lambda_2:Y\longrightarrow L_2$ 分别是 $(wa)^j:Y\longrightarrow Y$ 的核和上核. 若 a 在 $\pounds$ 上有 w - 加权 Drazin 逆 $a_{d,w}$, 则 $m=\begin{bmatrix} waw & \lambda_2\\ k_1 & 0\end{bmatrix}:(Y,K_1)\longrightarrow(X,L_2)$ 在 $M_\pounds$ 中可逆, 且

$$m^{-1}=\begin{bmatrix} a_{d,w} & \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\\ (k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & -(k_2\lambda_2)^{-1}k_2waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\end{bmatrix}:(X,L_2)\longrightarrow(Y,K_1). \tag{9}$$

证 若 a 在 $\pounds$ 中有 w - 加权 Drazin 逆 $a_{d,w}$, 由定理 2.1 知, $k_1\lambda_1$, $k_2\lambda_2$ 是可逆的. 令

$$y=\begin{bmatrix} a_{d,w} & \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\\ (k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & -(k_2\lambda_2)^{-1}k_2waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\end{bmatrix},$$

通过直接计算, 可得

$$my=\begin{bmatrix} wawa_{d,w}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2 & waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}-\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\\ k_1a_{d,w} & k_1\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\end{bmatrix}.$$

由定理 2.1, 易得

$$wawa_{d,w}+\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2=1_Y,\quad k_1a_{d,w}=0,\quad k_1\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}=1_{K_1},$$

同时

$$\begin{aligned}-\lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}&=(wawa_{d,w}-1_Y)waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}\\ &=wawa_{d,w}waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}-waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}.\end{aligned}$$

最后, 我们可以得到

$$wawa_{d,w}waw\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}=wawawa_{d,w}w\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1},$$

$$\begin{aligned}a_{d,w}w\lambda_1&=(aw)^i[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}aw\lambda_1\\ &=[(aw)^{i+1}+\lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1]^{-1}(aw)^{i+1}\lambda_1\\ &=0,\end{aligned}$$

故

$$my = \begin{bmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_{K_1} \end{bmatrix}.$$

通过类似的方式可得

$$ym = \begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 1_{L_2} \end{bmatrix},$$

从而得 m 在 $M_{\pounds}$ 中可逆，且 $m^{-1} = y$. ∎

公开问题 在定理 2.3 中，假设 $m = \begin{bmatrix} waw & \lambda_2 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆， $a_{d,w}$ 是否存在？这值得我们进一步研究.

3 态射的 w - 加权 Drazin 逆的柱心幂零分解

在本节，我们讨论在具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴 $\pounds$ 中态射的 w - 加权 Drazin 逆的柱心幂零分解，证明了其存在性，并得到了态射的 w - 加权 Drazin 逆的柱心幂零分解的一系列结果.

引理 3.1[3] 如果 $f : X \longrightarrow X$ 是具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴 $\pounds$ 中的态射，那么 $\mathrm{Im}(f^{i+1}) = \mathrm{Im}(f^i)$ 当且仅当 $f^{i+1}x = f^i$ 和 $xf^{i+1} = f^i$ 都有解.

定理 3.1 设 $a : X \longrightarrow Y$, $w : Y \longrightarrow X$ 是具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴 $\pounds$ 中的态射，$i = \mathrm{ind}(aw) = \mathrm{ind}(wa)$. 则我们有

$$a = t\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} s^{-1}, \qquad w = s\begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix} t^{-1}, \tag{10}$$

$$a_{d,w} = t\begin{bmatrix} (w_{11}a_{11}w_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1}, \tag{11}$$

其中 s, t, a_{11}, w_{11} 是可逆态射， a_{22}, w_{22} 是幂零指数为 i 的幂零态射.

证 由文献 [3] 得， aw, wa 分别有柱心幂零分解

$$aw = t\begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} t^{-1}, \qquad wa = s\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} s^{-1},$$

其中 t, s, h_1, g_1 是可逆态射， h_2, g_2 是幂零态射.
a 和 w 分块如下

$$a = t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} s^{-1}, \qquad w = s\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} t^{-1},$$

容易验证

$$(aw)^i a = t\begin{bmatrix} h_1^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} s^{-1} = t\begin{bmatrix} h_1^i a_{11} & h_1^i a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

类似地，我们有

$$a(wa)^i = t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1} = t\begin{bmatrix} a_{11}g_1^i & 0 \\ a_{21}g_1^i & 0 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

由 $(aw)^i a = a(wa)^i$ 得

$$h_1^i a_{12} = 0 \quad 和 \quad a_{21}g_1^i = 0.$$

即

$$a_{12} = 0 \quad 和 \quad a_{21} = 0.$$

经过简单的计算，可以得到

$$wa = s\begin{bmatrix} w_{11}a_{11} & w_{12}a_{22} \\ w_{21}a_{11} & w_{22}a_{22} \end{bmatrix} s^{-1} = s\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} s^{-1},$$

$$aw = t\begin{bmatrix} a_{11}w_{11} & a_{11}w_{12} \\ a_{22}w_{21} & a_{22}w_{22} \end{bmatrix} t^{-1} = t\begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} t^{-1}.$$

从而可以推出

$$a_{11}w_{11} = h_1 \text{ 是可逆的,} \quad w_{11}a_{11} = g_1 \text{ 是可逆的.}$$

即 a_{11} 和 w_{11} 是可逆的. 从 $a_{11}w_{12} = 0$ 和 $w_{21}a_{11} = 0$ 中，可得， $w_{21} = w_{12} = 0$. 最后，由文献 [3] 得

$$(aw)_d = t\begin{bmatrix} h_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^{-1}, \qquad (wa)_d = s\begin{bmatrix} g_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

再由引理 1.2 可得

$$a_{d,w} = t\begin{bmatrix} h_1^{-2}a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1} = t\begin{bmatrix} a_{11}g_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

即 $h_1^{-2}a_{11} = a_{11}g_1^{-2}$. 总之

$$a = t\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} s^{-1}, \qquad w = s\begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix} t^{-1},$$

$$a_{d,w} = t\begin{bmatrix} (w_{11}a_{11}w_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^{-1}.$$

∎

定理 3.2 设 $a: X \longrightarrow Y$, $w: Y \longrightarrow X$ 是具有 $\{1\}$ - 逆的正合加法范畴 $\mathcal{L}$ 中的态射，而且 $i = \mathrm{ind}(aw) = \mathrm{ind}(wa) > 0$. 则存在分解 $aw = \alpha_1 + \beta_1$, $wa = \alpha_2 + \beta_2$, $waw = \alpha + \beta$, 其中 $\alpha_1, \beta_1 : X \longrightarrow X$, $\alpha_2, \beta_2 : Y \longrightarrow Y$, $\alpha, \beta : Y \longrightarrow X$, 而且 $\alpha_1\beta_1 = \beta_1\alpha_1 = 0$, $\alpha_2\beta_2 = \beta_2\alpha_2 = 0$, $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$, $\mathrm{ind}(\alpha_1) \le 1$, $\mathrm{ind}(\alpha_2) \le 1$, $\alpha_1 = [(aw)_d]_\sharp$, $\alpha_2 = [(wa)_d]_\sharp$. 如果 $i > 0$, 则 β_1, β_2 是幂零指数为 $\mathrm{ind}(\beta_1) = \mathrm{ind}(\beta_2) = i$ 的幂零态射.

证 因 $i=\mathrm{ind}(aw)=\mathrm{ind}(wa)>0$, 由 (10) 式可得

$$a=t\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}s^{-1},\qquad w=s\begin{bmatrix}w_{11}&0\\0&w_{22}\end{bmatrix}t^{-1},$$

$$aw=t\begin{bmatrix}a_{11}w_{11}&0\\0&a_{22}w_{22}\end{bmatrix}t^{-1},\qquad wa=s\begin{bmatrix}w_{11}a_{11}&0\\0&w_{22}a_{22}\end{bmatrix}s^{-1},$$

$$waw=s\begin{bmatrix}w_{11}a_{11}w_{11}&0\\0&w_{22}a_{22}w_{22}\end{bmatrix}t^{-1}.$$

其中 s, t, a_{11}, w_{11} 是可逆态射， $a_{22}w_{22}$, $w_{22}a_{22}$ 是幂零指数为 i 的幂零态射．由文献 [3] 得

$$(aw)_d=t\begin{bmatrix}(a_{11}w_{11})^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}t^{-1},\quad (wa)_d=s\begin{bmatrix}(w_{11}a_{11})^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}s^{-1}.$$

令

$$\alpha_1=t\begin{bmatrix}a_{11}w_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}t^{-1},\quad \beta_1=t\begin{bmatrix}0&0\\0&a_{22}w_{22}\end{bmatrix}t^{-1},$$

$$\alpha_2=s\begin{bmatrix}w_{11}a_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}s^{-1},\quad \beta_2=s\begin{bmatrix}0&0\\0&w_{22}a_{22}\end{bmatrix}s^{-1},$$

$$\alpha=s\begin{bmatrix}w_{11}a_{11}w_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}t^{-1},\quad \beta=s\begin{bmatrix}0&0\\0&w_{22}a_{22}w_{22}\end{bmatrix}t^{-1}.$$

那么 $aw=\alpha_1+\beta_1$, $wa=\alpha_2+\beta_2$, $waw=\alpha+\beta$, 而且 $\alpha_1,\beta_1:X\longrightarrow X$, $\alpha_2,\beta_2:Y\longrightarrow Y$, $\alpha,\beta:Y\longrightarrow X$, $\alpha_1\beta_1=\beta_1\alpha_1=0$, $\alpha_2\beta_2=\beta_2\alpha_2=0$, $\alpha\beta=\beta\alpha=0$.

因为 $\alpha_1^2(aw)_d=(aw)_d\alpha_1=\alpha_1$, 由引理 3.1 我们有，$\mathrm{Im}(\alpha_1)^2=\mathrm{Im}\alpha_1$, 从而得 $\mathrm{ind}(\alpha_1)\le 1$. 类似地可以得到 $\mathrm{ind}(\alpha_2)\le 1$.

又因 $\alpha_1(aw)_d\alpha_1=\alpha_1$, $(aw)_d\alpha_1(aw)_d=(aw)_d$, $(aw)_d\alpha_1=\alpha_1(aw)_d$, 故， $\alpha_1=[(aw)_d]_\sharp$. 类似地我们有， $\alpha_2=[(wa)_d]_\sharp$.

又因 $\beta_1^n=t\begin{bmatrix}0&0\\0&(a_{22}w_{22})^n\end{bmatrix}t^{-1}$, $a_{22}w_{22}$ 是幂零指数为 i 的幂零态射，从而得 β_1 是幂零指数为 $\mathrm{ind}(\beta_1)=i$ 的幂零态射．类似地可以得到 β_2 是幂零指数为 $\mathrm{ind}(\beta_2)=i$ 的幂零态射. 证毕. ▌

参 考 文 献

[1] Wang G R, Wei Y M, Qiao S Z. Generalized Inverse: Theory and Computation. Beijing, New York: Science Press, 2004

[2] Robinson D W, Puystjens R. Generalized inverses of morphisms with kernels. Linear Algebra and its Applications, 1987, **96**: 65–86

[3] 李桃生，朱萍，曹永知．态射的柱心 - 幂零分解．数学学报， 2001, **44**(2): 221–226

[4] 江声远．态射的 Drazin 逆．数学学报， 1996, **39**(6): 801–813

[5] 江声远，刘晓冀．具有泛分解的态射的广义逆．数学学报， 1999, **42**(2): 233–240

[6] 刘晓冀，刘三阳，王志坚．预加法范畴中态射的广义逆．数学物理学报， 2005, **25A**(1): 103–109

[7] 朱萍，曹永知．态射的加权 Moore-Penrose 逆．数学物理学报， 2001, **21A**(1): 36–42

[8] Chen J L, Wei Y M. On Characterizations of Drazin inverse. Northeast Math, 2006, **22**(1): 15–20

[9] Wei Y M. A characterization for the W-weighted Drazin inverse and a Cramer rule for the W-weighted Drazin inverse solution. Applied Mathematics Computation, 2002, **125**: 303–310

[10] Wei Y M. Integral representation of the W-weighted Drazin inverse. Applied Mathematics Computation, 2003, **144**: 3–10

[11] Freyd P. Abelian Categories. New York: Academic Press, 1965

The w-weighted Drazin Inverse of Morphisms with Kernels

[1]Liu Xiaoji [2]Zhang Shiguang

([1]*College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Guangxi Nanning 530006;*

[2]*Department of Mathematics and Information, Hengshui University, Hebei Hengshui 053000*)

Abstract: Let $a: X \longrightarrow Y$, $w: Y \longrightarrow X$ be morphisms in an additive category, $k_1 : K_1 \longrightarrow X$ be a kernel of $(aw)^i$, $k_2 : K_2 \longrightarrow Y$ be a kernel of $(wa)^j$. Then the following propositions are equivalent: (1) a has a w -weighted Drazin inverse $a_{d,w}$ in $\pounds$; (2) $\lambda_1 : X \longrightarrow L_1$ is cokernel of $(aw)^i$, $k_1\lambda_1$ and $(aw)^{i+1} + \lambda_1(k_1\lambda_1)^{-1}k_1$ are invertible; (3) $\lambda_2 : Y \longrightarrow L_2$ is cokernel of $(wa)^j$, $k_2\lambda_2$ and $(wa)^{j+1} + \lambda_2(k_2\lambda_2)^{-1}k_2$ are invertible. And the Core-Nilpotent decomposition of w-weighted Drazin inverse of morphisms in the exact additive category $\pounds$ with $\{1\}$-inverse is studied, the existence for the Core-Nilpotent decomposition of w-weighted Drazin inverse of morphisms is proved. The extension of Drazin inverse of morphisms with kernels and its Core-Nilpotent decomposition are introduced and representations for its w-weighted Drazin inverse and Core-Nilpotent decomposition are derived.

Key words: Exact additive category; w-weighted Drazin inverse; Core-nilpotent decomposition.

MR(2000) Subject Classification: 15A09