2009,**29A**(3):737–740

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

任意两个非交换元均生成 p^3 阶子群的有限 p - 群 *

张勤海　邓立军　徐明曜
(山西师范大学数学与计算机科学学院　山西临汾 041004)

摘要：该文分类了任意两个非交换元均生成 p^3 阶子群的有限 p - 群. 作为推论，完全解决了文献 [1] 中提出的第 237 个问题：对于所有的 $x, y \in G$, 研究满足条件 $|\langle x, y\rangle| \le p^3$ 的 p - 群 G.

关键词：p - 群；亚循环群；内交换群； 2 - 恩格尔条件.

MR(2000) 主题分类: 20D15　**中图分类号**: O152　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-737-04

1　引言

本文确定具有下列性质的非交换 p - 群 G.

性质 T_3: 对于所有的 $x, y \in G$, 只要 $[x, y] \ne 1$, 就有 $|\langle x, y\rangle| = p^3$.

为方便起见，这样的群称为 T_3 - 群. 本文使用的概念和符号见文献 [2]. 另外，我们用 C_n 表示 n 阶循环群， C_n^m 表示 m 个 n 阶循环群的直积，对于 p^3 阶非交换群， p 为奇数，我们用 M_{p^3} 和 N_{p^3} 分别表示亚循环的情形和非亚循环的情形. 群 G 称为子群 A 与 B 的中心积，若 $G = AB$ 且 $[A, B] = 1$, 用 $A * B$ 表示. $A^{(m)}$ 表示 m 个因子 A 的中心积.

2　预备知识

在本节中，我们将给出一些下面要用的概念和引理.

有限非交换 p - 群 G 称为超特殊 p - 群，如果 $G' = Z(G) = \Phi(G) = p$.

由文献 [3] 的第四章定理 4.18 及其证明，有

定理 2.1

(1)　超特殊 p - 群 G 是 $r \ge 1$ 个 p^3 阶非交换子群的中心积. 设 p 为奇数. 若 $\exp G = p$, 则 $G = N_{p^3}^{(r)}$; 若 $\exp G = p^2$, 则 $G = M_{p^3} * N_{p^3}^{(r-1)}$. 若 $p = 2$, 则 $\exp G = 4$ 且 $G = Q_8^{(r)}$ 或 $G = D_8 * Q_8^{(r-1)}$,

(2)　$Q_8 * Q_8 = D_8 * D_8$.

引理 2.2[3]　设 G 是 p - 群，其中 $|G'| = p$ 且 G/G' 是初等交换的，则 $G = E * A$, 其中 E 是超特殊 p - 群， A 是交换群. 若 A 不是初等交换的，则 $E \bigcap A = Z(E) = \mho_1(A)$.

收稿日期：2007-10-15; 修订日期：2008-12-10

E-mail: zhangqh@dns.sxnu.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (10671114) 、山西省自然科学基金 (2008012001) 和山西省回国留学人员基金 (晋出留管办字 [2007]13-56) 资助

3 T_3 - 群的分类

命题 3.1 设 G 是 T_3 - 群. 则 G 的幂零类 $c(G) \leq 3$. 若 $p \neq 3$, 则 $c(G) = 2$.

证 对任意的 $a, b \in G$, 若 $[a, b] \neq 1$, 则 $[a, b, b] = 1$. 因为 $|\langle x, y\rangle| \leq p^3$, 故 G 满足 2 - 恩格尔条件. 由文献 [2, III, Statz 6.5], 结论即推出. ▌

命题 3.2 设 G 是 T_3 - 群. 则

(1) $\exp G \leq p^2$,

(2) 对任意的 $a \in G$, 其中 $o(a) = p^2$, 则 $\langle a\rangle \lhd G$. 特别地, $a^p \in Z(G)$,

(3) 若 $o(a) = p^2$ 且 $a \notin Z(G)$, 则 $C_G(\langle a\rangle)$ 是 G 的极大子群.

证

(1) 因为 G 是非交换的, 则有一个不在 $Z(G)$ 中的 G 的最高阶元 a. 否则, 若 $a \in Z(G)$, 取一个非中心的元 b, 则 $ab \notin Z(G)$ 且 ab 有最高阶. 令 $b \in G$ 满足 $[a, b] \neq 1$. 设 $o(a) \geq p^3$. 则 $|\langle a, b\rangle| \geq p^4$. 矛盾,

(2) 对任意的 $b \in G$, 若 $[a, b] = 1$, 则 b 正规化 a. 若 $[a, b] \neq 1$, 因为 $\langle a, b\rangle$ 是 p^3 的非交换群, b 也正规化 a. 故 $\langle a\rangle \lhd G$,

(3) 由 N/C - 定理, $N_G(\langle a\rangle)/C_G(\langle a\rangle) = G/C_G(\langle a\rangle) \lesssim \mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$ 则 p 恰整除 $|\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)| = p(p-1)$. 结论由此推出. ▌

现在, 我们可分类 T_3 - 群. 以下依照 $\exp G = p$ 与 $\exp G = p^2$ 两种情况讨论.

定理 3.3 设 $\exp G = p$. 则 G 是 T_3 - 群当且仅当下列之一成立

(1) $p = 3$ 且 $c(G) \leq 3$,

(2) $p > 3$ 且 $c(G) = 2$.

证 若 $p = 2$, 则 $\exp G = 2$ 隐含着 G 是交换的. 矛盾. 故 $p > 2$. 由命题 3.1, 若 G 是 T_3 - 群, 则 (1) 或 (2) 成立. 反之, 若 (1) 或 (2) 成立, 我们将证明 G 是 T_3 - 群.

情形 1 取 $a, b \in G$ 满足 $[a, b] \neq 1$. 令 $H = \langle a, b\rangle$. 因为 $\exp G = p$, 则 G 是正则的. 由文献 [2, III, Statz 10.3b] 知, H' 是循环的. 这隐含着 $|H'| = 3$, 因而 $|H| = 3^3$. 即得所求结论.

情形 2 因为 $c(G) = 2$ 且 $\exp G = p$, 结论是明显的. ▌

以下我们假设 $\exp G = p^2$.

引理 3.4 p - 群 G 是 T_3 - 群当且仅当 $G \times C_p^n$ 是 T_3 - 群.

证 只需证充分性. 令 $H = G \times C_p^n$. 则 H 中任意两个非交换元具有形式: $x = ac_1, y = bc_2$, 其中 $a, b \in G$, $c_1, c_2 \in C_p^n$. 因为 $c_1, c_2 \in Z(H)$, 故 $[a, b] \neq 1$ 且 $|\langle a, b\rangle| \leq p^3$, 由此易得 $|\langle x, y\rangle| \leq p^3$. ▌

由此引理, 我们只需确定没有初等交换直因子的 T_3 - 群. 这样的 T_3 - 群称为基本的 T_3 - 群.

为方便起见, 我们再引入一个概念: 设 A 是交换群满足 $\exp A > 2$. 令 $\alpha: a \longrightarrow a^{-1}, \forall a \in A$ 是 A 的自同构. 则半直积 $A \rtimes \langle\alpha\rangle$ 称为具有核 A 的广义二面体群.

定理 3.5 设 $\exp G = p^2$. 则 G 是 T_3 - 群当且仅当下列之一成立

(1) $p = 2$: G 是具有核 $C_4^s (s \geq 1)$ 的广义二面体群, 或超特殊 p - 群 E, 或 $E * C_4$,

(2) $p \geq 3$: G 是指数为 p^2 的超特殊 p - 群 E, 或 $E * C_{p^2}$.

证 设 $p = 2$. 依照两种情况讨论

(i) 对 G 的任意两个非交换元 x, y 都有 $\langle x, y\rangle \cong D_8$.

由假设, 取 G 的子群 $\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^{-1}\rangle \cong D_8$. 再由命题 3.2(2) 知, $C_G(a)$ 是 G 的极大子群, 因而 $G = C_G(a) \rtimes \langle b\rangle$.

首先我们断言: $C_G(a)$ 交换且 $\exp Z(G) = 2$.

设 $\exp Z(G) = 2$ 不交换．则它有子群 $\langle c,d\rangle \cong D_8$ 且 $o(c)=4, o(d)=2$．由此可得 $o(ad)=4$ 且 $[ad,c]\neq 1$. 因为 D_8 只有一个 4 阶子群，故 $\langle ad,c\rangle \ncong D_8$. 矛盾.

设 $\exp Z(G) > 2$. 令 $g \in Z(G)$ 且 $o(g)=4$. 则 $[a,gb]\neq 1$, 因而 $\langle a,gb\rangle \cong D_8$. 但 $\langle a,gb\rangle$ 的 4 阶子群不是一个．矛盾.

其次，因为 $C_G(a)$ 交换且 $\exp G = 2^2$, 我们可设 $C_G(a) = H\times K$, 其中 $H=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$, $K=\langle c_1\rangle\times\langle c_2\rangle\times\cdots\times\langle c_t\rangle$, $o(a_i)=4$, $o(c_j)=2$, $i\geq 1$, $j\geq 0$. 我们断言：对任意的 c_j 都有 $[b,c_j]=1$. 否则，$\langle b,c_j\rangle\cong D_8$. 令 $c_j=hb$. 则 $o(h)=4$ 且 $[h,b]=h^2$. 另一方面，$1=[c_j,a]=[hb,a]=[h,a]^b[b,a]$ 隐含着 $[h,a]\neq 1$. 由此可得 $\langle h,a\rangle\ncong D_8$. 矛盾．于是 $K\leq Z(G)$ 且 $G=(H\rtimes\langle b\rangle)\times K$. 因为我们假设 G 是基本的，故 $K=1$ 且 $G=H\rtimes\langle b\rangle$.

考虑 b 在 H 上的作用. 设 $h\in H$ 且 $o(h)=4$. 因为 $\exp Z(G)=2$, 故 $h\notin Z(G)$ 且 $h^b\neq h$. 又 $\langle h\rangle \lhd G$ 且 $o(b)=2$, 我们有 $h^b=h^{-1}$. 由此可得 G 是具有核 H 的广义二面体群.

反之，上述确定的群是 T_3 - 群. 事实上，令 $x,y\in G$ 且 $[x,y]\neq 1$. 则 x 和 y 中的一个，比如说，y 不在 H 中，则 $o(y)=2$. 若 $x\in H$, 则 $\langle x,y\rangle\cong D_8$. 若 $x\notin H$, 则 $xy\in H$ 且 $o(xy)=4$. 这是因为若 $o(xy)=2$, 则 $xy\in C_G(y)$. 与 $[x,y]\neq 1$ 矛盾．这再一次推出 $\langle x,y\rangle\cong D_8$. 故 G 是 T_3 - 群.

(ii) G 至少有一个子群 $Q=\langle a,b\rangle\cong Q_8$.

首先我们断言：$\mho_1(G)=G'$ 且是 2 阶的．否则，对 G 的任意 4 阶元 g, 设 $g^2\neq a^2=b^2$. 则 $|\langle g,a\rangle|>8$, 因而 $[g,a]=1$. 类似地，$[g,b]=1$. 令 $H=\langle ga,b\rangle$. 因为 $(ga)^2=g^2a^2\neq b^2$, 故 $|H|>8$. 这矛盾与 $[ga,b]\neq 1$. 于是 $|\mho_1(G)|=2$. 另一方面，注意到 $G'=\langle [x,y]\mid x,y\in G\rangle$. 若 $[x.y]\neq 1$, 则 $\langle x,y\rangle\cong D_8$ 或 Q_8. 在任何情况下，$[x,y]\in\mho_1(\langle x,y\rangle)\leq\mho_1(G)$. 于是断言成立．由此可得：$G/G'$ 是初等交换的.

由引理 2, $G=E*A$, 其中 E 是超特殊群，A 是交换的. 若 A 是初等交换的, 则 $A\leq Z(G)$. 因为我们假设 G 是基本的，故 $A\leq E$, 因而 $G=E$. 若 A 不初等交换的且 G 是基本的，由引理 2.2 知，$\mho_1(A)=E\bigcap A=Z(E)$. 由此可得 $A\cong C_4$. 故 $G=E*C_4$.

为了结束 (1) 的证明，我们需要证明 E 和 $E*C_4$ 是 T_3 - 群．明显地，超特殊群 E 是 T_3 - 群．假设 $G=E*C_4$. 令 $a,b\in G$ 且 $[a,b]\neq 1$. 再令 $a=a_1c^i$ 且 $b=b_1c^j$. 其中 $a_1,b_1\in E$, $c\in Z(G)$ 且 $i,j=\pm1$. 则 $[a_1,b_1]\neq 1$. 易验证，若 $\langle a_1,b_1\rangle\cong Q_8$, 则 $\langle a,b\rangle\cong D_8$. 若 $\langle a_1,b_1\rangle\cong D_8$, 则 $\langle a,b\rangle\cong D_8$ 或 Q_8. 结论得证.

假设 $p\geq 3$. 因为 $\exp \mathrm{G}=p^2$, G 有子群与 M_{p^3} 同构．注意到 M_{p^3} 可以由两个 p^2 阶元生成且这两个元的 p 次方相等．与 $p=2$ 的情形 (ii) 的论证类似，我们也可得 $\mho_1(G)=G'$ 且是 2 阶的 (计算细节省略).

由引理 2.2 及与 (1)(ii) 相同的论证可得：$G=E$ 或 $G=E*C_{p^2}$. 反之，若 $G=E$ 或 $G=E*C_{p^2}$, 易验证 G 是 T_3 - 群．验证留给读者. ∎

总结以上的论述，我们有

定理 3.6 设 G 是 T_3 - 群．则 G 是定理 3.3 中的群或是一个初等交换 p - 群与定理 3.5 中的任一个群的直积.

作为定理 3.6 的直接推论，我们完全解决了 Y. Berkovich 在文献 [1] 中提出的问题 237

对于所有的 $x,y\in G$, 研究满足条件 $|\langle x,y\rangle|\leq p^3$ 的 p - 群 G.

定理 3.7 设 G 是 p - 群. G 满足条件：对于所有的 $x,y\in G$, $|\langle x,y\rangle|\leq p^3$. 则 G 是下列群之一

(1) 交换群 C_{p^3}, $C_{p^2}\times C_p^n$ 或 C_p^n, n 为正整数,

(2) 定理 3.3 中的群,

(3) 一个初等交换 p - 群与定理 3.5 中的任一个群的直积，但对于定理 3.5(1) 中的广义二面体群， $s=1$.

参 考 文 献

[1] Berkovich Y, Janko Z. Groups of Prime Power Order, Part 3. Berlin: Walter de Gruyter, 2004

[2] Huppert B. Endliche Gruppen I. New York: Springer-Verlag, 1967

[3] Daniel Gorenstein. Finite Groups. New York: Chelesa Publishing Company, 1980

Finite p-groups in which any Two Noncommutative Elements Generate a Subgroup of Order p^3

Zhang Qinghai Den Lijun Xu Mingyao

(*School of Mathematical and Computer Science of Shanxi Normal University, Shanxi Linfen 041004*)

Abstract: In this note we classify finite p-groups in which any two noncommutative elements generate a subgroup of order p^3. As a consequence, we solve the research problem No. 237 in [1]: Study the p-groups G such that $|\langle x, y\rangle| \leq p^3$ for all $x, y \in G$.

Key words: p-groups; Metacyclic groups; Minimal non-abelian groups; 2-Engle condition.

MR(2000) Subject Classification: 20D15