2005,**25A**(6):777－783

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

具有可变脉冲点的脉冲微分方程的稳定性*

张瑜　王春燕　孙继涛

(同济大学应用数学系　上海 200092)

摘要:该文考虑具有可变脉冲点的脉冲微分方程零解的稳定性。通过利用 Lyapunov 函数以及 Razumikhin 技巧,可以得到关于具有可变脉冲点的脉冲微分方程零解的一致稳定和一致渐近稳定的充分条件。

关键词:脉冲微分方程;一致稳定;一致渐近稳定;Lyapunov 函数;Razumikhin 技巧。

MR(2000)主题分类:34A37;34D20;34K20　**中图分类号**:O175.13　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)06-777-07

1　引言

微分方程定性理论的一个主要问题就是找到方程解的一致稳定性条件。近年来,关于脉冲微分方程的稳定性的研究以及将这些结果应用到混沌系统的部分论文有[1－10]。这里也有考虑更一般的具有定脉冲点的脉冲泛函微分方程的论文[5],以及研究具有可变时滞的脉冲微分方程的论文[10]。在本篇论文中,我们主要考虑具有可变脉冲点的脉冲微分方程的解的一致稳定性和一致渐近稳定性,通过 Lyapunov 函数以及 Razumikhin 技巧的应用,我们可以得到关于这类方程的解的稳定性的一些结果。

2　基本的记号和定义

我们考虑下面的具有可变脉冲点的脉冲微分方程:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)),\quad t \geqslant t_0, t \neq \tau_k(x(t)), \tag{1}$$

$$x(t) = x(t^-) + I_k(x(t^-)),\quad t = \tau_k(x(t)),\ k = 1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中 $x\in R^n$,$f:[0,\infty)\times R^n\to R^n$,$I_k:R^n\to R^n$,$k=0,1,2,\cdots$,$t\geqslant t_0>0$,$\tau_k:R^n\to[0,\infty)$,$Z^+$是所有正整数的集合。对于所有的 $x\in R^n$,令 $\tau_0(x)=t_0$。对于给定的 $\sigma\geqslant t_0$ 和 φ: $R^n\to R^n$ 关于(1)－(2)式的初始值问题是指满足(1)－(2)式,并且具有初始值 $x(\sigma)=\varphi$。

我们用 $x(t;t_0,\varphi)$来表示初始值问题(1)－(2)的通过(t_0,φ)的解,用 $J(t_0,\varphi)$来表示 $x(t;t_0,\varphi)$存在的最大区间。

我们应该注意到对于具有可变脉冲点的脉冲微分方程,所谓的解的"击打"现象是可能发生的。“击打”现象是指积分曲线$(t,x(t;t_0,\varphi))$与同一个超平面相交几次或者无穷多次

收稿日期:2003-11-14; 修订日期:2004-10-10

E-mail:sunjt@sh163.net

* 基金项目:国家自然科学基金(60474008)和上海市自然科学基金(03ZR14095)资助

的现象。我们将考虑解的“击打”现象不存在的(1)－(2)式类型的问题。

我们引入下面的条件

H1) $f\in C([0,\infty)\times R^n,R^n)$。

H2) 函数 $I_k:R^n\to R^n,k=0,1,2,\cdots$ 满足对于任意的 $H=$常数>0,存在一个 $\rho>0$,使得由 $x\in S(\rho)=\{x\in R^n:\|x\|<\rho\}$ 可得 $x+I_k(x)\in S(H),k\in Z^+$。

H3) $t=\tau_k(x)\in(R^n,(0,\infty)),k=1,2,\cdots$,满足对于所有的 $x\in R^n$, $0<\tau_1(x)<\tau_2(x)<\cdots<\tau_k(x)<\cdots$,并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k(x)=\infty$ 在 $x\in R^n$ 上是一致的。

H4) $J(t_0,\varphi)=[t_0,\infty)$。

H5) 关于初始值问题(1)－(2)的每一个积分曲线当 $t>t_0$ 时与每一个超平面 $\tau_k,k=1,2,\cdots$ 相交不超过一次。

我们将假设(1)－(2)式的积分曲线 $(t,x(t;t_0,\varphi))$ 与超平面 $\sigma_k,k=1,2,\cdots$ 相交于 t_k,其中 $t_1<t_2<\cdots$,也就是说 $(t,x(t;t_0,\varphi))\in\sigma_k$。由条件 H3 我们可得 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$。

令
$$R^+=[0,\infty);$$
$$G_k=\{(t,x)\in[t_0,\infty)\times S(\rho),t_{k-1}<t<t_k\},\quad k\in Z^+$$
和
$$K=\{w\in C(R^+,R^+):\text{递增并且 } w(0)=0\}。$$

定义 1[5] 如果下面的条件满足,那么称函数 $V:[t_0,\infty)\times S(\rho)$ 是属于 v_0 函数类的

a) 函数 V 在每一个集合 G_k 上是连续的,并且对于所有的 $t\geqslant t_0,V(t,0)\equiv0$;

b) $V(t,x)$ 在 $x\in S(\rho)$ 上满足局部 Lipschitz 条件;

c) 对每一个 $k=1,2,\cdots$,下面的式子成立
$$V(t_k^-,x)=\lim_{G_k\ni(t,y)\to(t_k,x)}V(t,y),\quad V(t_k^+,x)=\lim_{G_{k+1}\ni(t,y)\to(t_k,x)}V(t,y)$$
并且满足 $V(t_k^+,x)=V(t_k,x)$。

定义 2[4] 方程(1)－(2)的零解被称为是

(a) 一致稳定的,如果对于任意的 $\sigma\geqslant t_0$ 和 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 满足当 $\|\varphi\|<\delta$ 时,有 $\|x(t;\sigma,\varphi)\|<\varepsilon,t\geqslant\sigma$ 成立。

(b) 一致渐近稳定的,如果它是一致稳定的,并且存在一个 $\delta>0$ 满足对于任意的 $\varepsilon>0$,存在一个 $T=T(\varepsilon)>0$ 使得由 $\sigma\geqslant t_0$ 和 $\|\varphi\|<\delta$ 可以得到 $\|x(t;\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$, 当 $t\geqslant\sigma+T$ 时成立。

3 主要结果

在这一部分中,我们假设下面的条件总是满足的

1) 条件 H1－H5 成立;

2) $f:R^+\times R^n\to R^n$,对于所有的 $t\in R^+,f(t,0)=0$ 成立。存在一个常数 $L>0$ 使得对于 $t\in R^+,x,y\in R^n$,式 $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|$ 成立;

3) $I_k:R^n\to R^n$ 满足 $I_k(0)=0$;

4) $\rho\in(0,H)$,若 $x\in R^n$,那么 $x+I_k(x)\in R^n$;

5) $\tau_k:R^n\to R^+$,且对于所有的 $x\in R^n,t_0=\tau_0(x)<\tau_1(x)<\tau_2(x)<\cdots$,和 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k(x)=\infty$ 成立;我们有下面的结果

定理 1 如果存在 $V\in v_0,\alpha,\beta\in K$ 使得下面的条件满足

1) 对于所有的$(t,x)\in R^{+}\times R^{n}$,有 $\alpha(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\beta(\|x\|)$成立;

2) 对于$(t,x)\in R^{+}\times R^{n}$ 有$\dot{V}(t,x)\leqslant 0$,并且对于所有的 $k\in Z^{+}$ 和 $t=\tau_k(x)$,有 $V(t,x+I_k(x))\leqslant(1+b_k)V(t,x)$,其中 $b_k\geqslant 0$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k<\infty$。

那么(1)-(2)式的零解是一致稳定的。

证 不失一般性,我们假设 $t_0<t_1$。

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k<\infty,b_k\geqslant 0$,我们可得$\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+b_k)=M$ 且 $1\leqslant M<\infty$。令 $\sigma\geqslant t_0$。对于给定的 $\varepsilon>0$,由函数 α,β 的性质,我们可以选择一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 满足 $M\beta(\delta)<\alpha(\varepsilon)$。

令 $x(t;\sigma,\varphi)=x(t)$是(1)-(2)式经过(σ,φ)的解,其中$\|\varphi\|<\delta$。我们将证明下面的式子

$$\|x(t)\|<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma$$

是成立的。

令 $\sigma\in[t_{k-1},t_k)$ 其中 $k\in Z^{+}$。我们可以证明

$$V(t,x(t))\leqslant\beta(\delta),\quad \sigma\leqslant t<t_k. \tag{3}$$

显然,$V(\sigma,x(\sigma))=V(\sigma,\varphi)\leqslant\beta(\|\varphi\|)\leqslant\beta(\delta)$ 。假设(3)式不成立,那么存在一个 $\hat{t}\in(\sigma,t_k)$ 满足

$$V(\hat{t},x(\hat{t}))>\beta(\delta)\geqslant V(\sigma,x(\sigma)).$$

这就意味着这里有一个 $\check{t}\in(\sigma,\hat{t}]$满足

$$\dot{V}(\check{t},x(\check{t}))>0. \tag{4}$$

由条件 2)我们有$\dot{V}(\check{t},x(\check{t}))\leqslant 0$ 这与(4)式矛盾,因此(3)式成立。

由条件 2) 我们还有

$$V(t_k,x(t_k))=V(t_k,x(t_k^-)+I_k(x(t_k^-)))\leqslant(1+b_k)V(t_k^-,x(t_k^-))\leqslant(1+b_k)\beta(\delta).$$

因此

$$V(t,x(t))\leqslant(1+b_k)\beta(\delta),\quad \sigma\leqslant t\leqslant t_k. \tag{5}$$

下面我们证明下式成立

$$V(t,x(t))\leqslant(1+b_k)\beta(\delta),\quad t_k\leqslant t<t_{k+1}. \tag{6}$$

如果该式不成立,那么存在一个 $\hat{s}\in(t_k,t_{k+1})$ 满足

$$V(\hat{s},x(\hat{s}))>(1+b_k)\beta(\delta)\geqslant V(t_k,x(t_k)).$$

这就意味着这里有一个 $\check{s}\in(t_k,\hat{s}]$满足

$$\dot{V}(\check{s},x(\check{s}))>0. \tag{7}$$

由条件 2)我们有$\dot{V}(\check{s},x(\check{s}))\leqslant 0$ 这与(7)式矛盾,因此(6)式成立。

由条件 2)我们还可以得到

$$V(t_{k+1},x(t_{k+1}))\leqslant(1+b_{k+1})V(t_{k+1}^-,x(t_{k+1}^-))\leqslant(1+b_{k+1})(1+b_k)\beta(\delta).$$

因此

$$V(t,x(t))\leqslant(1+b_{k+1})(1+b_k)\beta(\delta),\quad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}. \tag{8}$$

通过推导,我们可以证明,一般的,对任意的 $m=0,1,2,\cdots$有下式成立

$$V(t,x(t))\leqslant(1+b_{k+m+1})\cdots(1+b_k)\beta(\delta),\quad t_{k+m}\leqslant t\leqslant t_{k+m+1}.$$

该式结合(3)式我们可得

$$V(t,x(t))\leqslant M\beta(\delta),\quad t\geqslant\sigma.$$

因此，由条件 1）

$$\alpha(\|x\|) \leqslant V(t,x(t)) \leqslant M\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon), \quad t \geqslant \sigma.$$

可得 $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant \sigma$。

证毕。 ▌

定理 2 如果存在 $V \in v_0, \alpha, \beta \in K$，函数 $W(s) \in C(R^+, R^+)$，$W(0)=0$，$w(s)>0$ 使得下面的条件满足

1）对于 $(t,x) \in R^+ \times R^n$，有 $\alpha(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \beta(\|x\|)$ 成立；

2）对于所有的 $k \in Z^+$ 和 $t=\tau_k(x)$，有 $V(t,x+I_k(x)) \leqslant (1+b_k)V(t,x)$ 成立，其中 $b_k \geqslant 0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$；

3）存在一个 $s \geqslant 0$ 时连续非减的函数 $p(s)$，并且该函数满足当 $s \geqslant 0$ 时，$p(s) > Ms$（其中 $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$）。对于所有的（1）－（2）式的解 $x(t)$ 满足当 $V(t,x(t)) \leqslant p(V(t,x(t)))$ 时，有 $\dot{V}(t,x(t)) \leqslant -W(\|x(t)\|)$ 成立，其中 $(t,x) \in R^+ \times R^n$。

那么（1）－（2）式的零解是一致渐近稳定的。

证 由于 $b_k \geqslant 0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$，我们可得 $1 \leqslant M < \infty$。显然，定理 2 的条件暗含着定理 1 的条件成立，因此对于给定的 $q>0$，我们可以找到一个 $\delta>0$ 使得 $M\beta(\delta)=\alpha(q)$，并且当 $\|\varphi\| < \delta$ 时，对于任意的 $t \geqslant \sigma$，有 $\|x(t;\sigma,\varphi)\| \leqslant q$ 成立，并且

$$V(t,x(t)) \leqslant M\beta(\delta), \quad t \geqslant \sigma. \tag{9}$$

现在令 $\varepsilon>0$ 为给定的，我们可以假定 ε 足够小，满足 $\varepsilon<q$。那么，这里存在一个 $d=d(\varepsilon)>0$ 满足当 $M^{-1}\alpha(\varepsilon) \leqslant s \leqslant M\beta(\delta)$ 时，$p(s)-Ms>d$ 成立。令 $N=N(\varepsilon)>0$ 是满足 $M\beta(\delta) \leqslant M^{-1}(\alpha(\varepsilon)+Nd)$ 的最小正整数。令 $x(t)=x(t;\sigma,\varphi)$ 以及

$$\gamma = \inf_{\beta^{-1}(M^{-1}(\alpha(\varepsilon))) \leqslant s \leqslant q} W(s), \quad h = \frac{M\beta(\delta)(1+\overline{M})}{\gamma}.$$

其中 $\overline{M} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$。

令 $T=T(\varepsilon)=(2N-1)h$，我们将证明

$$V(t,x(t)) \leqslant \alpha(\varepsilon), \quad t \geqslant \sigma+T. \tag{10}$$

为了证明该式，首先我们证明

$$V(t,x(t)) \leqslant \alpha(\varepsilon)+(N-1)d, \quad t \geqslant \sigma+h. \tag{11}$$

假设对于所有的 $t \in J_1=[\sigma,\sigma+h]$，有下式成立

$$V(t,x(t)) > M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d].$$

那么对于 $t \in J_1$，我们有 $M^{-1}\alpha(\varepsilon) < V(t,x) \leqslant M\beta(\delta)$，因此由条件 1）及以上的证明可得

$$\beta^{-1}(M^{-1}(\alpha(\varepsilon))) < \|x(t)\| \leqslant \alpha^{-1}(M\beta(\delta)) = q,$$

$$\begin{aligned} p(V(t,x(t))) &> MV(t,x(t))+d \geqslant M^{-1}(\alpha(\varepsilon)+Nd) \\ &\geqslant M\beta(\delta) \geqslant V(t,x(t)). \end{aligned}$$

由条件 3），对 $t \in J_1$ 我们有下式成立

$$\dot{V}(t,x(t)) \leqslant -W(\|x(t)\|) \leqslant -\gamma.$$

因此对于 $t \in J_1$ 有

$$V(t,x(t)) \leqslant V(\sigma,x(\sigma)) - \gamma(t-\sigma) + \sum_{\sigma \leqslant t_j \leqslant t}[V(t_j,x(t_j)) - V(t_j^-,x(t_j^-))]$$

$$\leqslant M\beta(\delta)-\gamma(t-\sigma)+\sum_{j=1}^{\infty}b_jV(t_j^-,x(t_j^-))$$
$$\leqslant M\beta(\delta)+M\beta(\delta)\overline{M}-\gamma(t-\sigma).$$

这就意味着

$$V(\sigma+h,x(\sigma+h))\leqslant M\beta(\delta)(1+\overline{M})-\gamma\frac{M\beta(\delta)(1+\overline{M})}{\gamma}=0,$$

与假设矛盾,因此存在一个 $\hat{t}\in J_1$ 满足

$$V(\hat{t},x(\hat{t}))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d]. \tag{12}$$

令 $m=\min\{k\in Z^+:t_k>\hat{t}\}$。我们将证明

$$V(t,x(t))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d],\quad \hat{t}\leqslant t\leqslant t_m. \tag{13}$$

如果(13)式不成立,那么存在一个 $r_1\in(\hat{t},t_m)$满足

$$V(r_1,x(r_1))>M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d]\geqslant V(\hat{t},x(\hat{t})).$$

同时这里也存在一个 $r_2\in(\hat{t},r_1]$满足$\dot{V}(r_2,x(r_2))>0$ 并且

$$V(t,x(t))\leqslant V(r_2,x(r_2)),\quad \hat{t}\leqslant t\leqslant r_2,$$
$$M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d]\leqslant V(r_2,x(r_2)).$$

由该式及(9)式可得 $M^{-1}\alpha(\varepsilon)\leqslant V(r_2,x(r_2))\leqslant M\beta(\delta)$。

对于 $\sigma\leqslant s\leqslant\hat{t}$ 注意到

$$\begin{aligned}V(s,x(s))&\leqslant M\beta(\delta)\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+Nd]\\&\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d]+d\\&\leqslant V(r_2,x(r_2))+d<p(V(r_2,x(r_2))).\end{aligned}$$

因此我们有

$$V(r_2,x(r_2))<p(V(r_2,x(r_2))).$$

由条件 3)我们可得$\dot{V}(r_2,x(r_2))\leqslant 0$,这是一个矛盾,因此(13)式成立。由(13)式和条件 2)我们有

$$\begin{aligned}V(t_m,x(t_m))&=V(t_m,x(t_m^-)+I_k(x(t_m^-)))\\&\leqslant(1+b_m)V(t_m^-,x(t_m^-))\\&\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d](1+b_m).\end{aligned}$$

因此

$$V(t,x(t))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d](1+b_m),\quad \hat{t}\leqslant t\leqslant t_m.$$

同样的,我们可证得

$$V(t,x(t))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d](1+b_m)(1+b_{m+1}),\quad t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1}.$$

通过推导,我们可以证明,一般的对 $i=0,1,2,\cdots$有

$$V(t,x(t))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-1)d](1+b_m)\cdots(1+b_{m+i+1}),\quad t_{m+i}\leqslant t\leqslant t_{m+i+1}.$$

因此对 $t\geqslant\hat{t}$ 有 $V(t,x(t))\leqslant\alpha(\varepsilon)+(N-1)d$ 成立,因此(11)式成立。

下面,我们证明

$$V(t,x(t))\leqslant\alpha(\varepsilon)+(N-2)d,\quad t\geqslant\sigma+3h.$$

假设对于所有的 $t\in J_2=[\sigma+2h,\sigma+3h]$,有下式成立

$$V(t,x(t))>M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-2)d].$$

那么对于 $t\in J_2$,由(11)式我们有

$$p(V(t,x(t)))>MV(t,x(t,x(t)))+d$$

$$
\begin{aligned}
&> MM^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-2)d]+d \\
&\geqslant V(t,x(t)).
\end{aligned}
$$

对 $t\in J_2$ 由条件 3)我们有

$$\dot{V}(t,x(t))\leqslant -W(\|x(t)\|)\leqslant -\gamma.$$

因此对 $t\in J_2$ 有下式成立

$$
\begin{aligned}
V(t,x(t)) &\leqslant V(\sigma+2h,x(\sigma+2h))-\gamma(t-\sigma-2h) \\
&\quad+\sum_{\sigma+2h\leqslant t_j\leqslant t}[V(t_j,x(t_j))-V(t_j^-,x(t_j^-))] \\
&\leqslant M\beta(\delta)-\gamma(t-\sigma-2h)+\sum_{j=1}^{\infty}b_jV(t_j^-,x(t_j^-)) \\
&\leqslant M\beta(\delta)+M\beta(\delta)\overline{M}-\gamma(t-\sigma-2h).
\end{aligned}
$$

令 $t=\sigma+3h$ 可得

$$V(\sigma+3h,x(\sigma+3h))\leqslant M\beta(\delta)(1+\overline{M})-\gamma\frac{M\beta(\delta)(1+\overline{M})}{\gamma}=0,$$

与假设矛盾,因此存在一个 $\bar{t}\in J_2$ 满足

$$V(\bar{t},x(\bar{t}))\leqslant M^{-1}[\alpha(\varepsilon)+(N-2)d].$$

类似的我们可以证明

$$V(t,x(t))\leqslant \alpha(\varepsilon)+(N-2)d,\quad t\geqslant \bar{t}.$$

因此

$$V(t,x(t))\leqslant \alpha(\varepsilon)+(N-2)d,\quad t\geqslant \sigma+3h.$$

通过推导,我们可以证明,一般的有

$$V(t,x(t))\leqslant \alpha(\varepsilon)+(N-i)d,\quad t\geqslant \sigma+(2i-1)h,i=1,2,\cdots,N.$$

因此,当取 $i=N$,我们可得

$$V(t,x(t))\leqslant \alpha(\varepsilon),\quad t\geqslant \sigma+(2N-1)h.$$

因此(10)式成立。由(10)式及条件 1)我们可得

$$\|x(t)\|\leqslant \varepsilon,\quad t\geqslant \sigma+T.$$

证毕。 ∎

4 结论

在本文中,通过利用 Lyapunov 函数和 Razumikhin 技巧,我们得到了在不定时间有脉冲作用的脉冲微分方程零解的稳定性的一些判别定理。我们可以看到,脉冲对系统的稳定性所起的作用。

参 考 文 献

[1] Bainov D, Kolev D, Nakagawa K. Solutions with polynomial growth to an impulsive parabolic model. Pan American Mathematical, 2000, **10**(1):47—57

[2] Sun Jitao, Zhang Yinping, Wang Lei, Wu Qidi. Impulsive robust control of uncertain Lur'e systems. Phys Letters A, 2002, **304**: 130—135

[3] Lakshmikantham V, Bainov D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989

[4] Yang Tao. Impulsive Systems and Control: Theory and Applications. New York: Nova Science Publishers. Inc Huntington, 2001

[5] Shen J H. Razumikhin techniques in impulsive functional differential equations. Nonlinear Analysis,1999, **36**: 119—130

[6] Sun Jitao, Zhang Yinping, Wu Qidi. Less conservative conditions for asymptotic stability of impulsive control systems. IEEE Trans Automatic Control, 2003, **48**(5): 829—831

[7] Soliman A A. Stability Criteria of Perturbed Impulsive Differential Systems. Applied Mathematics and Computation, 2003, **134**: 445—457

[8] Sun Jitao, Zhang Yinping. Impulsive control of a nuclear spin generator. J of Computational and Applied Mathematics,2003, **157**(1): 235—242

[9] Soliman A A. On Stability of Impulsive Differential Systems. Applied Mathematics and Computation, 2002, **133**: 105—117

[10] Zhang Yu, Sun Jitao. Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay. Applied Mathematics and Computation, 2004, **154**: 279—288

Stability of Impulsive Differential Equations with Impulses at Variable Times

Zhang Yu Wang Chunyan Sun Jitao

(*Depertment of Applied Mathematics*, *Tongji University*, *Shanghai* 200092)

Abstract: This paper considers stability of the zero solution of impulsive differential equations with impulses at variable times. By means of Lyapunov functions and Razumikhin techniques, some sufficient conditions of uniform stability and uniform asymptotic stability for differential equation with impulses at variable times are obtained.

Key words: Impulsive differential equation; Uniform stability; Uniform asymptotic stability; Lyapunov function; Razumikhin technique.

MR(2000) Subject Classification: 34A37;34D20;34K20