2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

各向异性泛函与各向异性方程解的局部有界性 *

[1,2] 高红亚 [1] 王红敏 [3] 褚玉明

([1] 河北大学数学与计算机学院 保定 071002; [2] 河北省数学研究中心 石家庄 050016;
[3] 湖州师范学院理学院 湖州 313000)

摘要: 证明了各向异性泛函

$$I(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)\mathrm{d}x,\quad u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega),$$

的极小点与各向异性方程

$$\mathrm{div}\ \mathcal{A}(x,u,Du)=0,\quad u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega),$$

弱解的局部有界性, 这可认为是经典结果的推广.

关键词: 局部有界性; 各向异性泛函; 各向异性方程.

MR(2000) 主题分类: 35J50; 35J60 **中图分类号**: O175.23 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1 引言与预备引理

设 Ω 为 R^N, $N\geq 2$ 中的有界开集, $q_i>1$, $i=1,\cdots,N$. 记

$$q=\max_{1\leq i\leq N}q_i,\quad p=\min_{1\leq i\leq N}q_i,\quad \overline{q}:\frac{1}{\overline{q}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\frac{1}{q_i},\quad \overline{q}^*=\begin{cases}\dfrac{N\overline{q}}{N-\overline{q}}, & \text{if } \overline{q}<N;\\ \text{any } h>\overline{q}, & \text{if } \overline{q}\geq N.\end{cases}$$

本文使用各向异性 Sobolev 空间

$$W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega)=\left\{v\in L^q_{\rm loc}(\Omega):\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^{q_i}_{\rm loc}(\Omega),i=1,\cdots,N\right\}.$$

设 $x_0\in\Omega$, $t>0$, 用 B_t 表示半径为 t 中心在 x_0 的球. 对函数 $u(x)$ 与 $k>0$, 记 $A_k=\{x\in\Omega:u(x)>k\}$, $A_{k,t}=A_k\cap B_t$. 若 $p>1$, 则 p' 总表示实数 $\frac{p}{p-1}$. 若 $s<N$, 则 s^* 总表示满足 $\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}-\frac{1}{N}$ 的实数.

本文考虑各向异性泛函

$$I(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)\mathrm{d}x,\quad u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega),\tag{1.1}$$

收稿日期: 2007-12-07; 修订日期: 2008-09-29

E-mail: hongya-gao@sohu.com

* 基金项目: 高红亚获河北省自然科学基金数学研究专项 (07M003) 资助; 褚玉明获 973 前期研究专项 (2006708304), 国家自然科学基金 (10771195) 和浙江省自然科学基金 (Y607128) 资助

的极小点 $u(x)$ 与各向异性方程

$$\operatorname{div}\,\mathcal{A}(x,u,Du)=0,\quad u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega),\tag{1.2}$$

的弱解，(1.1) 中的被积函数 f 与 (1.2) 中的算子 $\mathcal{A}$ 满足条件 (1.4)~(1.6). 关于各向同性情形下的某些结果, 参见经典专著 O.A.Ladyženskaya, N.N.Ural'ceva [1], C.B.Morrey [2], D.Gilbarg, N.S.Trudinger [3] 和 M.Giaquinta [4].

各向同性情形下的正则性结果参见 Giaquinta, Giusti [5], 也见 [4] 及近期专著 [6]. 在 [7] 中，Fusco, Sbordone 证明了若 $u\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ 是 (1.1) 的局部极小，且被积函数 $f=f(x,u,\xi):\Omega\times R\times R^N\to[0,+\infty)$ 为满足

$$\sum_{i=1}^N|\xi_i|^{q_i}\le f(x,u,\xi)\le c\Big(1+\sum_{i=1}^N|\xi_i|^{q_i}\Big),\tag{1.3}$$

的 Carathéodory 函数，则当 $q\le\bar q^*$ 时 $|u|$ 在 Ω 局部有界. 本文的主要目的之一是证明在比 (1.3) 更广的增长条件下，(1.1) 型的各向异性泛函极小的局部有界性，即假设被积函数 f 为满足下面的增长条件

$$\sum_{i=1}^N|\xi_i|^{q_i}-b(|u|^\alpha+1)\le f(x,u,\xi)\le a\sum_{i=1}^N|\xi_i|^{q_i}+b(|u|^\alpha+1),\tag{1.4}$$

的 Carathéodory 函数，这里 $a\ge1,b\ge0,p\le\alpha<p^*,\overline{q}<N,\,q\le\overline{q}^*$. 我们也考虑关于 $\mathcal{A}$ 具有更一般增长条件的 (1.2) 型的椭圆型方程弱解的局部有界性，即

$$\mathcal{A}(x,u,\xi)\cdot\xi\ge m_0\sum_{i=1}^N|\xi_i|^{q_i}-b_0(|u|^{\alpha_1}+1),\tag{1.5}$$

$$|\mathcal{A}_i(x,u,\xi)|\le m_1\Big(1+\sum_{j=1}^N|\xi_j|^{q_j}\Big)^{1/q_i'}+b_1|u|^{\alpha_2},\quad i=1,\cdots,N,\tag{1.6}$$

这里 $m_l,b_l,l=0,1$ 为正常数，$\overline{q}<N,\,q\le\overline{q}^*,\,p\le\alpha_1<p^*,\,p/\overline{q}^{*'}\le\alpha_2<p^*/\overline{q}^{*'}$.

注 1.1 各向异性空间中的相关结果参见 [8,9].

注 1.2 我们的问题限制在 $\bar q<N$ 情形，因为若 $\bar q\ge N$, $I(u;\Omega)$ 的局部极小不必有界，参见 [10] 中的反例.

注 1.3 因为我们在 (1.4), (1.5) 和 (1.6) 中假设了被积函数 f 和算子 $\mathcal{A}$ 满足某依赖于 u 的增长条件，在局部有界性的证明中，需要用 $|\bigtriangledown u|$ 来估计 $|u|$ 的某次幂. 为克服此困难，我们将使用 [4,5] 中用到的 Sobolev 不等式.

为证上述局部有界性结果，我们需要一个定义和 [11] 中的一个有用的引理.

定义 1.1 称函数 $u(x)\in W^{1,m_1}(\Omega)$ 属于 $\mathcal{B}_1(\Omega,\gamma_1,m_1,m_2,\widehat{k})$ 类，若对所有 $k>\widehat{k}>0$ 及所有 $B_\rho=B_\rho(x_0),B_{\rho-\rho\sigma}=B_{\rho-\rho\sigma}(x_0),B_R=B_R(x_0)$, 有

$$\int_{A_{k,\rho-\rho\sigma}}|Du|^{m_1}{\rm d}x\le\gamma_1\Big\{\sigma^{-m_2}\rho^{-m_2}\int_{A_{k,\rho}}(u-k)^{m_2}{\rm d}x+{\rm mes}A_{k,\rho}\Big\}.\tag{1.7}$$

引理 1.1 假设 $u(x)$ 为任意属于 $\mathcal{B}_1(\Omega,\gamma_1,m_1,m_2,\widehat{k})$, 类的函数，且 $B_R\subset\subset\Omega$, 则

$$\max_{B_{R/2}}u(x)\le c,$$

这里常数 c 只依赖于 $\gamma_1, m_1, m_2, \widehat{k}, R$ 和 $\|Du\|_{m_1}$.

我们也需要 [4,5] 中的一个有用的引理.

引理 1.2 设 $f(t)$ 为 $0 \le T_0 \le t \le T_1$ 上定义的非负有界函数. 假设对 $T_0 \le t < s \le T_1$ 有

$$f(t) \le A(s-t)^{-\gamma} + B + \theta f(s),$$

这里 A, B, γ, θ 为非负常数， $\theta < 1$. 则存在只依赖于 γ 和 θ 的常数 c, 使得对每个 ϱ, R, $T_0 \le \varrho < R \le T_1$, 有

$$f(\varrho) \le c\left[A(R-\varrho)^{-\gamma} + B\right].$$

2 各向异性泛函极小

本节证明各向异性泛函 (1.1) 局部极小的局部有界性.

定义 2.1 称 $u \in W^{1,(q_i)}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是 (1.1) 中各向异性泛函 I 的局部极小，若对每一函数 $\psi \in W^{1,(q_i)}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\psi \subset\subset \Omega$, 有

$$I(u;\mathrm{supp}\psi) \le I(u+\psi;\mathrm{supp}\psi). \tag{2.1}$$

定理 2.1 设 (1.1) 中的被积函数 f 满足条件 (1.4). 若 $u \in W^{1,(q_i)}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为 I 的局部极小，则它在 Ω 中局部有界.

证 由引理 1.1, 只需证明 u 与 $-u$ 满足积分估计 (1.7). 设 $B_R \subset\subset \Omega$ 和 $0 < \sigma < 1$ 任意固定. 取 $w = \max\{u-k, 0\}$. 在 (2.1) 中选择 $\psi = -\eta w$, 这里 $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ 为截断函数，使得

$$\mathrm{supp}\eta \subset B_R,\ 0 \le \eta \le 1,\ \eta = 1 \text{ in } B_{\sigma R},\ |D\eta| \le \frac{C}{(1-\sigma)R}. \tag{2.2}$$

由 u 的极小性得到

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f(x,u,Du)\mathrm{d}x &\le \int_{B_R} f(x,u+\psi,Du+D\psi)\mathrm{d}x \\ &= \int_{A_{k,R}} f(x,u-\eta w,Du-D(\eta w))\mathrm{d}x + \int_{B_R\cap\{u\le k\}} f(x,u,Du)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此推出

$$\int_{A_{k,R}} f(x,u,Du)\mathrm{d}x \le \int_{A_{k,R}} f(x,u-\eta w,Du-D(\eta w))\mathrm{d}x.$$

由 (1.4) 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,R}} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} \mathrm{d}x \le b\int_{A_{k,R}}(|u|^\alpha+1)\mathrm{d}x + a\int_{A_{k,R}} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i} \mathrm{d}x \\ +b\int_{A_{k,R}}(|u-\eta w|^\alpha+1)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3}$$

首先估计 (2.3) 右端第二项. 利用基本不等式

$$(a+b)^q \le 2^{q-1}(a^q+b^q), \quad a,b \ge 0,\ q \ge 1,$$

得到

$$a\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x = a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x$$
$$\le 2^{q-1}a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left[(1-\eta)^{q_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}+\left|\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right|^{q_i}w^{q_i}\right]\mathrm{d}x$$
$$\le 2^{q-1}a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x$$
$$+C^q2^{q-1}a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

(2.3) 右端第一项与第三项的和可估计为

$$b\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha}\mathrm{d}x+b\int_{A_{k,R}}|u-\eta w|^{\alpha}\mathrm{d}x+2b\mathrm{mes}A_{k,R}$$
$$\le (2^{\alpha-1}+1)b\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha}\mathrm{d}x+(2b+2^{\alpha-1}k^{\alpha}))\mathrm{mes}A_{k,R}. \tag{2.5}$$

将 (2.4) 与 (2.5) 代入 (2.3) 得到

$$\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x \le (2^{\alpha-1}+1)b\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha}\mathrm{d}x+(2b+2^{\alpha-1}k^{\alpha})\mathrm{mes}A_{k,R}$$
$$+2^{q-1}a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x$$
$$+C^q2^{q-1}a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

由 [4,5] 知，若 $u\in W^{1,p}(B_R)$, $|\mathrm{supp}u|\le\frac{1}{2}|B_R|$, 则有 Sobolev 不等式

$$\Big(\int_{B_R}u^{p^*}\mathrm{d}x\Big)^{p/p^*}\le c_1(N,p)\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x.$$

设

$$\tilde{u}=\begin{cases}u, & x\in A_{k,R},\\ 0, & x\in\Omega\setminus A_{k,R}.\end{cases}$$

由假设， $p\le\alpha<p^*$, 因此，当 $|\mathrm{supp}\tilde{u}|_{B_R}|\le\frac{1}{2}|B_R|$ 时，

$$\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha}\mathrm{d}x=\int_{B_R}|\tilde{u}|^{\alpha}\mathrm{d}x\le\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_R|^{1-\alpha/p^*}\Big(\int_{B_R}|\tilde{u}|^{p^*}\mathrm{d}x\Big)^{p/p^*}$$
$$\le c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_R|^{1-\alpha/p^*}\int_{B_R}|D\tilde{u}|^p\mathrm{d}x$$
$$\le c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_R|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\}\int_{B_R}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x$$
$$=c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_R|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x.$$

选择 T 充分小，使得对 $R \le T$, 有

$$c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_R|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\} \le \frac{1}{2(2^{\alpha-1}+1)b}.$$

显然

$$k^{p^*}|A_k| \le \|\tilde{u}\|_{p^*,\Omega}^{p^*},$$

于是，存在常数 $\widehat{k}>0$, 使得对所有的 $k>\widehat{k}$ 有 $|A_k| \le \frac{1}{2}|B_{T/2}|$. 对这些 k 值有 $|\mathrm{supp}\tilde{u}| < \frac{1}{2}|B_{T/2}|$, 于是若 $T/2 \le R \le T$, 则

$$\int_{A_{k,R}} u^\alpha \mathrm{d}x \le \frac{1}{2(2^{\alpha-1}+1)b}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

这样由 (2.6) 和 (2.7) 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x \le{}& 2^q a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x + C^q 2^q a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x\\ &+(4b+(2k)^\alpha)\mathrm{mes}A_{k,R}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

现在设 $T/2 \le \tau R \le \sigma R < tR \le R \le T$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x \le{}& 2^q a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\tau R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x + C^q 2^q a\int_{A_{k,R}\setminus A_{k,\tau R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x\\ &+(4b+(2k)^\alpha)\mathrm{mes}A_{k,R}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

两边加上 $2^q a$ 乘以左端得

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x \le{}& \frac{2^q a}{2^q a+1}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x + \frac{C^q 2^q a}{2^q a+1}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x\\ &+\frac{4b+(2k)^\alpha}{2^q a+1}\mathrm{mes}A_{k,R}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

应用引理 1.2 得

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\mathrm{d}x &\le c\left\{\frac{2^q a}{2^q a+1}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}\mathrm{d}x + \frac{4b+(2k)^\alpha}{2^q a+1}\mathrm{mes}A_{k,R}\right\}\\ &\le \gamma_1\left[\int_{A_{k,R}}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{\bar{q}^*}\mathrm{d}x+\mathrm{mes}A_{k,R}\right],\end{aligned} \tag{2.11}$$

这里 c 只依赖于 q 和 a. 这样，由引理 1.1, $u(x)$ 上有界.

因为 $-u$ 是泛函

$$\widetilde{F}(v;\Omega)=\int_\Omega \widetilde{f}(x,v,Dv)\mathrm{d}x,$$

的极小，这里 $\widetilde{f}(x,v,p)=f(x,-v,-p)$ 满足同样的增长条件 (1.4), 不等式 (2.11) 对 u 换成 $-u$ 仍成立. 这样 $-u$ 上有界. 定理 2.1 证毕.

3 各向异性方程的局部解

本节证明各向异性方程 (1.2) 弱解的局部有界性. 设 $\mathcal{A}(x,u,\xi):\Omega\times R\times R^n\to R^n$ 为满足结构条件 (1.5) 和 (1.6) 的 Carathéodory 函数.

定义 3.1 函数 $u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega)$ 称为方程 (1.2) 的弱解，若对每一函数 $\psi\in W^{1,(q_i)}(\Omega)$, ${\rm supp}\psi\subset\subset\Omega$, 有

$$\int_{{\rm supp}\psi}\langle\mathcal{A}(x,u,Du),D\psi\rangle{\rm d}x=0. \tag{3.1}$$

定理 3.1 在前面的假设 (1.5) 和 (1.6) 下，若 $u\in W^{1,(q_i)}_{\rm loc}(\Omega)$ 为 (1.2) 的局部解，则它在 Ω 中是局部有界的.

证 由引理 1.1, 只需证明 u 和 $-u$ 满足积分估计 (1.7). 设 $B_R\subset\subset\Omega$ 和 $0<\sigma<1$ 任意固定，取 $w=\max\{u-k,0\}$. 选择 $\psi=\eta w$ 为方程 (3.1) 中的试验函数，这里截断函数 η 满足条件 (2.2). 由定义 3.1 得

$$\int_{A_{k,R}}\langle\mathcal{A}(x,u,Du),\eta Dw\rangle{\rm d}x=-\int_{A_{k,R}}\langle\mathcal{A}(x,u,Du),wD\eta\rangle{\rm d}x. \tag{3.2}$$

由假设 (1.5) 和 (1.6) 得到

$$\begin{aligned}&m_0\int_{A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}{\rm d}x\\ \le{}& b_0\int_{A_{k,R}}(|u|^{\alpha_1}+1){\rm d}x+m_1\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\Big(1+\sum_{j=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{q_j}\Big)^{1/q_i'}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|{\rm d}x\\ &+b_1N\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_2}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|{\rm d}x.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}&m_0\int_{A_{k,\sigma R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}{\rm d}x\\ \le{}& b_0\int_{A_{k,R}}(|u|^{\alpha_1}+1){\rm d}x+m_1N\varepsilon\int_{A_{k,R}}\Big(1+\sum_{j=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{q_j}\Big){\rm d}x\\ &+m_1\sum_{i=1}^NC(\varepsilon,q_i)\int_{A_{k,R}}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{q_i}{\rm d}x+b_1N\varepsilon\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_2\bar q^{*'}}{\rm d}x\\ &+b_1NC(\varepsilon,\bar q^*)\int_{A_{k,R}}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{\bar q^*}{\rm d}x\\ \le{}& m_1N\varepsilon\int_{A_{k,R}}\sum_{j=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{q_j}{\rm d}x+(m_1C(\varepsilon,q_1,\cdots,q_N)+b_1NC(\varepsilon,\bar q^{*'}))\int_{A_{k,R}}\left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{\bar q^*}{\rm d}x\\ &+b_0\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_1}{\rm d}x+b_1N\varepsilon\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_2\bar q^{*'}}{\rm d}x+(b_0+m_1N\varepsilon){\rm mes}A_{k,R}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

因为 $p\le\alpha_1<p^*$, $p/\bar q^{*'}\le\alpha_2<p^*/\bar q^{*'}$, 所以由定理 2.1 证明中同样的方法可得：当 R 充分小时,

$$b_0\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_1}{\rm d}x+b_1N\varepsilon\int_{A_{k,R}}|u|^{\alpha_2\bar q^{*'}}{\rm d}x\le\frac{m_0}{2}\int_{A_{k,R}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}{\rm d}x, \tag{3.5}$$

这样，由 (3.4), (3.5) 和引理 1.1, 取 ε 充分小，得

$$\int_{A_{k,\tau R}} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} \mathrm{d}x \le C \left[\int_{A_{k,R}} \left|\frac{u-k}{(1-\sigma)R}\right|^{\bar{q}^*} \mathrm{d}x + \mathrm{mes} A_{k,R}\right]. \tag{3.6}$$

由引理 2.1, u 上有界.

因为 $-u$ 为 $\operatorname{div} \tilde{\mathcal{A}}(x,u,Du)=0$, 的弱解，这里 $\tilde{\mathcal{A}}(x,s,\xi)=\mathcal{A}(x,-s,-\xi)$ 满足同样的条件 (1.5) 和 (1.6), 将 u 换成 $-u$ 时不等式 (3.6) 仍成立，这样 $-u$ 上有界，定理 3.1 证毕.

参 考 文 献

[1] Ladyženskaya O A, Ural'ceva N N. Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press, 1968
[2] Morrey C B. Multiple integrals in the calculus of variations. Springer, 1968
[3] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order. Springer, 1977
[4] Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Ann of Math Stud, 105. Princeton Univ Press, 1983
[5] Giaquinta M, Giusti E. On the regularity of the minima of variational integrals. Acat Math, 1982, **148**: 31–46
[6] Bensoussan A, Frehse J. Regularity results for nonlinear elliptic systems and applications. Appl Math Ser, 151. Springer, 2002
[7] Fusco N, Sbordone C. Local boundedness of minimizers in a limit case. Manuscripta Math, 1990, **69**: 19–25
[8] Andrea Cianchi. Local boundedness of minimizers of anisotropic functionals. Ann Inst H Poincaré, Non Linear Anal, 2000, **17**(2): 147–168
[9] Ding Shijin. Local boundedness for minimizers in anisotropic spaces. J Part Diff Equ, 1995, **8**(3): 242–248
[10] Giaquinta M. Growth conditions and regularity, a counterexample. Manuscripta Math, 1987, **59**: 245–248
[11] Minchun Hong. Some remarks on the minimizers of variational integrals with non standard growth conditions. Bollettino U M I, 1992, **6A**: 91–101
[12] Chu Yuming, Liu Xiangao. Regularity for harmonic maps with the potential. Sci in China, Ser A Math, 2006, **49**(5): 599–610

Local Boundedness Results Related to Anisotropic Functionals and Anisotropic Equations

[1,2]Gao Hongya [1]Wang Hongmin [3]Chu Yuming
([1]*College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002;*
[2]*Hebei Privincial Center of Mathematics, Shijiazhuang 050016;*
[3]*Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000*)

Abstract: Local boundedness results for minima of the anisotropic functional

$$I(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)\mathrm{d}x, \quad u\in W^{1,(q_i)}_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

and weak solutions of the anisotropic equation

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x,u,Du)=0, \quad u\in W^{1,(q_i)}_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

are proved, which can be regarded as generalizations of the classical results.
Key words: Local boundedness; anisotropic functional; anisotropic equation.
MR(2000) Subject Classification: 35J50; 35J60