2004,**24A**(3):337－341

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

关于(余)反射的等价性和可扩张性及其应用*

潘庆年

(广东惠州学院数学系　惠州 516015)

摘要:该文研究了(余)反射的等价性和可扩张性及应用,得到的主要结果如下:(1) 余反射余代数范畴和反射代数范畴是等价的.(2) 反射和余反射都具有可扩张性.使用这些结果可以用来推广和化简[1－4]中部分结论.

关键词:代数;余代数;反射;余反射.

MR(2000)主题分类:16W20　　**中图分类号**:O153.3　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)03-337-05

1　引言

反射和余反射的概念由著名数学家 Taft E J 和 Radford D E 从不同的角度、几乎同时地提出[1－3],Taft 的工作集中在(余)反射同调性质的研究及对偶关系的刻画,而 Radford 的工作着重于有限性条件的描述.至今,函子( )°、( )* 以及(余)反射性仍是 Hopf 代数结构方面一个有意义的课题,并且在量子群的讨论有着广泛的应用前景[6－7].本文的主要兴趣在于(余)反射等价、可扩张性及其它们的应用.

本文所讨论的对象发生在一个固定的域 K 上,我们假定读者熟悉基本的 Hopf 代数知识,因此直接使用[4]中的一些结果而不加说明.

设 $\mathscr{A}$ 是代数范畴,$\mathscr{C}$ 是余代数范畴.

象文献[4],我们定义两个反变函子如下

$$\mathscr{C}\xrightarrow{F=(\ )^*}\mathscr{A},\ \mathscr{A}\xrightarrow{G=(\ )^\circ}\mathscr{C},$$

对每一个 $A\in \mathrm{Ob}\mathscr{A}, C\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$,存在两个自然映射 η_C 和 ζ_A 使得(见[4])

$$\zeta_A: A\to A^{\circ *},\ \langle\zeta_A(a),f\rangle=\langle f,a\rangle,\ \forall f\in A^\circ,\ a\in A. \tag{1.1}$$

$$\eta_C: C\to C^{*\circ}, \langle\eta_C(c),g\rangle=\langle g,c\rangle,\ \forall g\in C^*,\ c\in C. \tag{1.2}$$

收集文献[1－3]中一些必要的概念和结果如下

定义 1　设 A 是代数

(a) 假如 ζ_A 是单射,则称 A 是真的(Proper).

(b) 假如 ζ_A 是满射,则称 A 是弱反射的(Weakly reflexive).

(c) 假如 ζ_A 是双射,则称 A 为反射的(reflexive).

收稿日期:2001-11-26

Email:pqn@hzu.edu.cn

* 基金项目:广东省自然科学基金(031360)、广东省教育厅自然科学基金(Z02080)、惠州市科技计划项目和惠州学院科研基金资助

定义 2 设 C 是余代数

(a) C 称为余反射的，假如 η_C 是满射.

(b) C 称为强余反射的，假如 C^* 是几乎 Noetherian，即 C^* 的每一个左(右)余有限维(Cofinite)理想都是有限生成的.

注 1 注意 η_C 总是单射.

注 2 空间 V 的满足 $\dim(V/V_1)<+\infty$ 的子空间 V_1 称为余有限维(Cofinite).

引理 1 (a) $f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,D)$ 是单(满)射，当且仅当 $f^*\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(D^*,C^*)$ 是满(单)射.

(b) 如果 $g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ 是满射，那么 $g^\circ\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B^\circ,A^\circ)$ 是单射.

(c) 设 B 是真的，A 是弱反射的. 如果 $g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ 是单射，那么 $g^\circ\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B^\circ,A^\circ)$ 是满射.

(d) 设 A、B 都是反射代数，那么 $g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ 是单(满)射当且仅当 $g^\circ\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B^\circ,A^\circ)$ 是满(单)射.

证明见[1－3]，这里从略.

一般来说，$g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ 是单射，并不能推出 $g^\circ\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B^\circ,A^\circ)$ 是满射，相关的反例见[1].

2 等价性及其应用

设 $\mathscr{A}_1$ 表示反射代数构成的 $\mathscr{A}$ 的子范畴，$\mathscr{C}_1$ 表示余反射余代数构成的 $\mathscr{C}$ 的子范畴.

定理 1 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{C}_1$ 是一对等价范畴.

证 分三步进行.

(1) 可以证明存在一个从恒等函子 $1_{\mathscr{C}}$ 到积函子 $GF=(\ )^{*\circ}$ 的自然变换 η 使得

$$1_{\mathscr{C}} \overset{\eta}{\sim} GF,\ \eta: C\mapsto \eta_C, \tag{2.1}$$

这里 η_C 如(1.2)式所定义.

同样，存在一个从函子 $1_{\mathscr{A}}$ 到函子 $FG=(\ )^{\circ *}$ 的自然变换 ζ 使得

$$1_{\mathscr{A}} \overset{\eta}{\sim} FG,\ \zeta: A\mapsto \zeta_A, \tag{2.2}$$

这里 ζ_A 由(1.1)式所定义.

仅证(2.1)式，(2.2)式可以同理得证. 为了证明(2.1)式，只要证明下列交换图

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta_C} & C^{*\circ} \\ \downarrow f & & \downarrow f^{*\circ} \\ D & \xrightarrow{\eta_D} & D^{*\circ} \end{array}, \tag{2.1$'$}$$

事实上，$\forall c\in C, d^*\in D^*$，我们有

$$\langle f^{*\circ}\eta_C(c),d^*\rangle=\langle \eta_C(c),f^*(d^*)\rangle=\langle f^*(d^*),c\rangle=\langle d^*,f(c)\rangle=\langle \eta_D f(c),d^*\rangle.$$

(2) 可以证明 F 在 $\mathscr{C}_1$ 上的限制 $F|_{\mathscr{C}_1}$ 是一个从 $\mathscr{C}_1$ 到 $\mathscr{A}_1$ 的函子，即是 $C\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}_1$ 包含着 $F(C)\in \mathrm{Ob}\mathscr{A}_1$，也就是要证 $\zeta_{F(C)}$ 是一个同构.

作用 F 在下图

$$C \xrightarrow{\eta_C} GF(C),$$

我们得到

$$FG(F(C)) \xrightarrow{F(\eta_C)} F(C),$$

另一方面,我们有反向图

$$F(C) \xrightarrow{\zeta_{F(C)}} FG(F(C)),$$

结合两图,可以得到等式

$$F(\eta_C)\zeta_{F(C)} = 1_{F(C)}, \tag{2.3}$$

事实上,对 $\forall f \in F(C), x \in C$,可以验证等式

$$\langle F(\eta_C)\zeta_{F(C)}(f), x\rangle = \langle \zeta_{F(C)}(f), \eta_C(x)\rangle = \langle \eta_C(x), f\rangle = \langle f, x\rangle,$$

即是(2.3)式.

类似地,可以证 $G|_{\mathscr{C}_1}$ 是一个从 $\mathscr{A}_1$ 到 $\mathscr{C}_1$ 的函子及等式

$$G(\zeta_A)\eta_{G(A)} = 1_{G(A)} \tag{2.4}$$

(3) 综合(1)、(2)知,在 A_1 和 C_1 上,所有 η_C 及 ζ_A 都是同构,故

$$GF \overset{\eta}{\cong} 1_{\mathscr{C}_1} \quad (\text{自然同构}), \tag{2.5}$$

$$GF \overset{\zeta}{\cong} 1_{\mathscr{A}_1} \quad (\text{自然同构}), \tag{2.6}$$

这就完成了定理的证明. ▌

下面介绍定理 1 的应用

(1) Taft 在[1]中证明了这样一些结论:对于余反射余代数 C, D,如果 $f: D^* \to C^*$ 是同构,那么一定存在 $\gamma: C \to D$ 是同构使得 $\gamma^* = f$;同样,对于反射代数 A, B,如果 $g: B^\circ \to A^\circ$ 是同构,那么一定存在同构 $\beta: A \to B$ 使得 $\beta^\circ = g$. 根据定理 1,$F = (\ )^*$ 是 $\mathscr{C}_1$ 到 $\mathscr{A}_1$ 的忠实、完全的函子,而 $G = (\ )^\circ$ 是 $\mathscr{A}_1$ 到 $\mathscr{C}_1$ 的忠实、完全的函子. 那么,F 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(C, D)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_1}(D^*, C^*)$ 的双射,且在 F 映射之下,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(C, D)$ 集合中的单(满)同态与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_1}(D^*, C^*)$ 集合的满(单)同态相互对应;特别地,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(C, D)$ 中的同构与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_1}(D^*, C^*)$ 的同构在 F 之下一一对应. 类似地,在 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_1}(A, B)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(B^\circ, A^\circ)$ 之间有同样的对应关系. 这就最大限度地推广了[1]中的结论.

(2) Sweedler 在[4]中指出 F、G 是一对伴随函子(见[4]中定理 6.0.5),但其留给读者验证的部分几乎是"只能体会而不能实现的". 由定理 1 证明中的(2.3)式(2.4),可以把这个定理的证明用计算的方法来实现,不但简化了证明,而且可以得到一个具体的理解.

3　扩张性及其应用

在许多范畴中,经常讨论这类问题,对于正合列

$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0,$$

如果 A_1, A_2 满足某种性质(P),是否可以推出 A 也满足(P)呢? 如果可以推出,那么就称(P)是可扩张的. 例如,几乎 Noetherian 代数与有理模都是可扩张[2-4]. 我们将证明(余)反射都是可扩张的.

引理 2　(a) $F = (\ )^*$ 是 $\mathscr{C}$ 上的正合函子.

(b) $G = (\ )^\circ$ 是 $\mathscr{A}$ 上的左正合函子.

(c) 设是 $0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 上的正合列. 如果 A_1 是弱反射的而且 A 是真的,那么

$$0 \to A_2^\circ \to A^\circ \to A_1^\circ \to 0$$

也是正合的.

证 对于任何两个线性空间 V_1,V_2 及线性变换 $h:V_1\to V_2$,我们有等式

$$\mathrm{Ker}h^* = (\mathrm{Im}h)^{\perp},\ \mathrm{Im}h^* = (\mathrm{Ker}h)^{\perp}.$$

这样,(a)成立. 由引理 1(c)及引理 2(b),(c)也成立. 仅证(b)即可,分两步进行

(1) 设 $0\to A_1 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A_2 \to 0$ 是正合列,为了证明

$$0 \to A_2^{\circ} \xrightarrow{g^{\circ}} A^{\circ} \xrightarrow{f^{\circ}} A_1^{\circ}$$

是左正合的,只须证明 $\mathrm{Ker}f^{\circ}=\mathrm{Im}g^{\circ}$.

注意到 f° 是 f^* 在 A° 上的限制,因此

$$\mathrm{Ker}f^{\circ} = \mathrm{Ker}f^* \cap A^{\circ} = (\mathrm{Im}f)^{\perp} \cap A^{\circ}.$$

(2) 既然 g° 是 g^* 在 A_2° 上的限制,那么

$$\mathrm{Im}g^{\circ} = g^*(A_2^{\circ}) = g^*(A_2^* \cap A_2^{\circ}) \subset g^*(A_2^*) \cap g^*(A_2^{\circ}) \subset \mathrm{Im}g^* \cap A^{\circ}p, \quad (3.1)$$

下面证明反包含. 对于任何 $a^{\circ}\in \mathrm{Im}g^* \cap A^{\circ}$,存在 $b^*\in A_2^*$ 使得

$$g^*(b^*) = a^{\circ},\ 且\ J \subset \mathrm{Ker}a^* \subset A,$$

这里 J 是 A 的一个余有限维理想. 容易验证

$$g(J) \subset \mathrm{Ker}b^*.$$

$g:A\to A_2$ 是一个满射,J 是 A 的余有限维理想,可证 $g(J)$是 A_2 的余有限维理想,按 A_2° 的定义知 $b^*\in A_2^{\circ}$,即 $a^{\circ}\in g^{\circ}(A_2^{\circ})$,故

$$\mathrm{Im}g^* \cap A^{\circ} \subset g^{\circ}(A_2^{\circ}) \subset g^{\circ}(A_2^*) = \mathrm{Im}g^{\circ}. \quad (3.2)$$

由(3.1)、(3.2)两式,得到

$$\mathrm{Im}g^{\circ} = \mathrm{Im}g^* \cap A^{\circ} = (\mathrm{Ker}g)^{\perp} \cap A^{\circ},$$

最后,我们到达下列等式

$$\mathrm{Ker}f^{\circ} = \mathrm{Ker}f^* \cap A^{\circ} = (\mathrm{Im}f)^{\perp} \cap A^{\circ} = (\mathrm{Ker}g)\perp \cap A^{\circ} = \mathrm{Im}g^{\circ}.$$

证明完成. ▎

定理 2 设 $0\to C_1\to C\to C_2\to 0$ 是 $\mathscr{C}$ 上正合列.

(a) 如果 C_1、C_2 是强余反射,那么 C 也是强余反射的.

(b) 假如 C_2 是余反射的,那么 C_1 余反射当且仅当 C 余反射,特别地,由 C_1、C_2 余反射可以推出 C 余反射的,即余反射是可扩张的.

证 (a) 注意 $F=(\ )^*$ 是正合函子,故

$$0 \to C_2^* \to C^* \to C_1^* \to 0 \quad (3.3)$$

也是正合的,由几乎 Noetherian 代数的可扩张性知 C^* 是几乎 Noetherian,故(a)成立.

(b) 在(3.3)中,根据定理 1,C_2^* 是反射,而 C_1^* 总是真的,使用引理 2(c)及交换图(2.1)′,我们可以得到下列交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{C_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_C} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{C_2}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1^{*\circ} & \longrightarrow & C^{*\circ} & \longrightarrow & C_2^{*\circ} & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

注意 η_{C_2} 是同构,由“短五引理”,η_C 是同构当且仅当 η_{C_1} 是同构,当且仅当 η_{C_1} 是同构,即是:C 是余反射当且仅当 C_1 是余反射,证毕. ▎

类似地,我们有

定理 3 设在函子 $G=(\ )^{\circ}$ 的作用下,下列正合列

$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$$

保持正合性.

(a) 如果 A_1,A_2 是弱反射(真的),那么 A 也是.

(b) 如果 A_1,A,A_2 中任何两个是反射的,那么第三个也是.

特别地,(弱)反射都是可扩张的.

证　类似于定理 2,从略. ▌

下面介绍定理 2－3 的一些应用. 由定理 2－3,很容易得到:(1) 如果 C_1 和 C_2 是(强)余反射的,那么 $C_1 \oplus C_2$ 也是.(2) 如果 A_1 和 A_2 是真的(弱反射或反射的),那么 $A_1 \oplus A_2$ 也是真的(弱反射或反射的). 上述结论在[1－3]中的证明并不简单,但这里几乎成了显然的事实. 我们可以使用定理 2－3 去化简化[1－3]中许多工作,恕不一一列举.

致谢　感谢复旦大学朱胜林教授的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Taft E J. Reflexivity and Coalgebras. Amer J Math, 1972, **94**(3): 1111－1130

[2] Heyneman R G, Radford D E. Reflexivity and Coalgebras of Finit Type. J Algebra, 1974, **28**(1): 215－246

[3] Radford D E. Coreflexive Coalgebras. J Algebra, 1973, **26**(2): 512－535

[4] Sweedler M E. Hopf Algebras. New York: Benjiman, 1969

[5] Jacobson N. Basic Algebra Ⅱ. San Francisco: Freeman Company, 1980

[6] Takeuchi M. Some topics on. J Algebra, 1992, **147**(2): 379－410

[7] Pan Qingnian, Hao Zhifeng. Double crossprodcts of Skew-Hopf pairs. Acta Math Sinica, 2000, **20**(3): 569－576

Equivalence and Extension of (Co-)reflexivity and Their Applications

Pan Qingnian

(*Department of Mathematics, Huizhou College, Huizhou* 516015)

Abstract: Equivalence and extension are studied. Main results are as follows: (1) coreflexility and reflexivity are equivalent as categories. (2) coreflexivity and reflexivity are extensionable. These are used to generalize and simplify some works of [1－4].

Key words: Algebras; Coalgebras; Reflexivity; Coreflexivity.

MR(2000) Subject Classification: 16W20