2005,**25A**(6):905－912

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

具有年龄结构的线性周期种群动力系统的最优收获控制问题*

[1]雒志学　[2]王绵森

([1]兰州交通大学数学系　兰州 730070；[2]西安交通大学数学系　西安 710049)

摘要:研究一类具有年龄结构的线性周期种群动力系统的最优收获控制问题,即讨论了具有周期的生死率和周期变化的收获项的 *Lotka-Mckendrick* 模型.利用 *Mazur's* 定理,作者证明了控制问题最优解的存在性,同时借助于法锥概念,还得到了控制问题最优解存在的必要条件。最后,在适当的假设下,得到了最优控制问题的唯一解。该文的结论推广了某些已有的结果.

关键词:最优收获;最优控制;周期种群动力学;最大值原理.

MR(2000)主题分类:35B10;49J20;65L12　　**中图分类号**:O175.1　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)06-905-08

1　引言及问题的概述

近二十年来,具有年龄结构的种群动力系统的最优控制被广泛研究,而且国内外学者在这方面已做了不少研究工作,如文献[2－8]及其中所引文献. 据我们所知,自从 M. Brokata 首次研究具有年龄结构的种群动力系统的最优控制问题[2－3]以来,许多学者致力于这方面工作,特别是 Gutrin, Murphy 的文献[4－5]及 Murphy, Smith 的文献[6]为这方面研究奠定了基础. 这些工作主要是在非周期环境下考虑最优控制问题的最优性条件(极大值原理)和最优控制的近似化方法. 关于具有年龄结构的种群动力系统的最优收获控制在文献[10]被 Anita S, Iannelli M, Kim M Y 和 Park E J 研究,但在他们讨论的指标泛函中没有考虑种群个体的年龄因素,这不太符合实际问题. 因此, 本文在指标泛函中考虑种群个体年龄因素,研究如下最优控制问题(P)

$$\text{Maximize}\int_0^T\int_0^{a_+} u(a,\ t)g(a)p^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\quad u\in\mathcal{U}, \tag{P}$$

其中 p^u 是下列系统

$$\begin{cases} Dp(a,t)+\mu(a,\ t)p(a,t)=f(a,t)-u(a,t)p(a,t), & (a,t)\in Q,\\ p(0,t)=\displaystyle\int_0^{a_+}\beta(a,t)p(a,t)\mathrm{d}a, & t\in R,\\ p(a,t)=p(a,t+T), & (a,t)\in Q \end{cases} \tag{1.1}$$

的解, 这里 $Q=(0,a_+)\times R$ (a_+, $T\in(0,+\infty)$), Dp 表示 p 的方向导数,即

收稿日期:2003-11-03; 修订日期:2004-08-11

E-mail:luozhix@263.net

* 基金项目:兰州交通大学'青蓝'人才工程基金(QL－05－18A)、国家自然科学基金(604730304)资助

$$Dp(a,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{p(a+\varepsilon,\ t+\varepsilon)-p(a,t)}{\varepsilon}.$$

$u(a,t)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的收获率,是控制变量,并且假设

$$u\in\{\mathscr{U}\}=\{h\in L^{\infty}(Q);\theta_1(a,t)\leqslant h(a,t)$$
$$=h(a,t+T)\leqslant\theta_2(a,t)\quad \text{a. e. }(a,t)\in Q\},$$

其中,θ_1, $\theta_2\in L^{\infty}(Q)$, $0\leqslant\theta_1(a,t)=\theta_1(a,t+T)\leqslant\theta_2(a,t)=\theta_2(a,t+T)$, a. e. $(a,t)\in Q$, $g(a)$表示年龄为 a 的种群个体的重量,积分

$$\int_0^T\int_0^{a_+}u(a,\ t)g(a)p^u(a,\ t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{1.2}$$

表示在一个周期区间$[0,T]$内收获种群的总重量,而且 g 满足下面的假设条件

$$g\in C^1([0,a_+]),\qquad g(a)>0,\quad \forall\, a\in(0,a_+),\tag{A$_1$}$$

模型(1.1)刻画了含有收获项且具有年龄结构的种群动力系统的季节性变化种群发展规律,即在(1.1)中,$p(a,t)$表示 t 时刻年龄为 a 的种群密度,$\beta(a,t)$,$\mu(a,t)$分别表示种群的出生率和死亡率,$u(a,t)$为收获率,$f(a,t)$表示外界向环境内的输入率.

文献[13]提供了可研究的有价值的性能指标函数,文献[10]考虑了下列性能指标

$$\int_0^T\int_0^{a_+}u(a,\ t)p^u(a,\ t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{1.3}$$

其中 p^u 是系统(1.1)的解.

本论文将着重强调种群个体的年龄因素,如大多数鱼类种群(及许多动物类种群)是由不同年龄阶段的鱼构成. 显然任何一种鱼随其成长,其价值越大.因此最优收获 不仅要考虑单位时间内收获种群的数量,还要考虑收获不同年龄阶段鱼的数量. 从生态观点看,函数 g 表示年龄为 a 的种群个体的重量,并且满足假设条件(A$_1$). 当 $g(a)\equiv 1$, $\forall\, a\in(0,a_+)$时,目标函数(1.2)式可简化为(1.3)式,因此我们推广了文献[10]的结果.

在本文中,我们作如下假设

$$\beta\in L^{\infty}(Q),\ \beta(a,t)\geqslant 0,\ \beta(a,t)=\beta(a,t+T),\ \text{a. e. }(a,t)\in Q,\tag{A$_2$}$$

$$\begin{cases}\mu(a,t)=\mu_0(a)+\tilde{\mu}(a,t),\quad \text{a. e. }(a,t)\in Q,\\ \mu_0\in L^1_{loc}([0,a_+)),\ \mu_0(a)\geqslant 0,\quad \text{a. e. }a\in[0.a_+),\\ \int_0^{a_+}\mu_0(a)\mathrm{d}a=+\infty,\\ \tilde{\mu}\in L^{\infty}(Q),\ \tilde{\mu}(a,t)\geqslant 0,\quad \tilde{\mu}(a,t)=\tilde{\mu}(a,t+T),\quad \text{a. e. }(a,t)\in Q.\end{cases}\tag{A$_3$}$$

$$f\in L^{\infty}(Q),\ f(a,\ t)\geqslant 0,\ f(a,t)=f(a,t+T),\quad \text{a. e. }(a,t)\in Q.\tag{A$_4$}$$

关于系统(1.1)中各项更详细的生态含义和基本假设(A$_2$)-(A$_4$)的具体含义可参考专著[1,12].

另外,我们还假设

$$r(\mathscr{A}^{\mu})<1,\tag{A$_5$}$$

其中 $r(\mathscr{A}^{\mu})$是线性有界算子 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的谱半径,$\mathscr{A}^{\mu}$ 定义如下

$$\mathscr{A}^{\mu}:L_T^{\infty}(R)\to L_T^{\infty}(R),\ (\mathscr{A}^{\mu}h)(t)=\int_0^{a_+}K(t,s;\mu)h(t-s)\mathrm{d}s.$$

$\forall\, h\in L_T^{\infty}(R)=\{h\in L^{\infty}(R);\ h(t)=h(t+T)\quad \text{a. e. }t\in R\}$,这里

$$K(t,s;\mu)=\begin{cases}\beta(s,t)\exp\{-\int_0^s\mu(a-\sigma,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\},\qquad \text{当 }0\leqslant s\leqslant\min\{t,a_+\},\\ 0,\quad \text{其它}.\end{cases}$$

为了方便起见，我们引入如下的定义和性质

定义 1.1　$L_T^\infty(Q)=\{h(a,t)\in L^\infty(Q);\ h(a,t)=h(a,t+T)\quad \text{a.e. }(a,t)\in Q\}$.

定义 1.2　系统(1.1)的解，是指函数 $p\in L_T^\infty(Q)$，它在每一条特征线 $S:a-t=k$(常数)上绝对连续，且满足下列条件

$$\begin{cases} Dp(a,t)+\mu(a,t)p(a,t)=f(a,t)-u(a,t)p(a,t), & \text{a.e. }(a,t)\in Q, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}p(\varepsilon,\ t+\varepsilon)=\int_0^{a_+}\beta(a,\ t)p(a,t)\mathrm{d}a, & \text{a.e. } t\in R, \\ p(a,t)=p(a,t+T), & \text{a.e. } (a,t)\in Q. \end{cases} \tag{1.4}$$

由标准证明[9]，我们易得到下列命题

命题 1.3　若条件$(A_2)-(A_5)$成立，则系统(1.1)有唯一的解 $p^u\in L_T^\infty(Q)$，而且

(1) 如果 $f(a,t)\geqslant 0$, a.e. $(a,t)\in Q$，则 $p^u(a,t)\geqslant 0$, a.e. $(a,t)\in Q$;

(2) 如果 $f(a,t)>0$, a.e. $(a,t)\in Q$，则 $p^u(a,t)>0$, a.e. $(a,t)\in Q$;

(3) 如果 u_1, u_2 满足条件(A_3)，且 $u_1(a,t)\leqslant u_2(a.t)$, a.e. $(a,t)\in Q$, $f(a,t)\geqslant 0$, a.e. $(a,t)\in Q$，则 $p^{u_2}(a,t)\leqslant p^{u_1}(a,t)$, a.e. $(a,t)\in Q$. 其中 $p^{u_i}(a,t)$, $i=1,2$，分别表示系统(1.1)对应于 $u:=u_i$, $i=1,2$ 的解;

(4) 在 $L_T^\infty(Q)$中，如果 $f_n\to f$，则在 $L_T^\infty(Q)$中有 $p_n^u\to p^u$。其中 p_n^u, p^u，分别表示系统(1.1)对应于 $f:=f_n$, $f=f$ 的解.

命题 1.4　设条件$(A_2)-(A_5)$成立，则系统(1.1)至多有如下意义的一个弱解

$$\int_0^T\int_0^{a_+}\{-D\varphi(a,t)+\mu(a,t)\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)\}p(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_0^{a_+}f(a,t)\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,$$

其中 φ 在每一条特征线 $a-t=k$(常数)上绝对连续，且满足下列条件

$$\begin{cases} \varphi\in L_T^\infty(Q), \\ D\varphi\in L^1((0,a_+)\times(0,T)), \\ \mu\varphi\in L^1((0,a_+)\times(0,T)). \end{cases}$$

为了方便，我们用 Φ 表示满足上述条件所有的 φ 构成的集合.

2　最优解的存在性

本段我们将讨论最优控制问题(P)解的存在性.

定理 2.1　若条件$(A_1)-(A_5)$成立，则控制问题(P)至少存在一个最优解.

证　设

$$J(u)=\int_0^T\int_0^{a_+}u(a,\ t)g(a)p^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\quad u\in\mathcal{U},$$

及

$$d=\sup_{u\in\mathcal{U}}J(u).$$

由命题 1.3 的(3)及条件(A_1)知

$$0\leqslant J(u)\leqslant M\|\theta_2\|_{L_T^\infty(Q)}\int_0^T\int_0^{a_+}p^{\theta_1}(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\quad \forall u\in\mathcal{U}.$$

(其中 p^{θ_1} 是系统(1.1)对应于 $u:=\theta_1$ 的解，$M=\max\limits_{a\in[0,a_+]}g(a)$).

因此，我们容易得到 $d\in[0,\infty)$，取控制列 $\{u_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{U}$，使得

$$d-\frac{1}{n}\leqslant J(u_n)\leqslant d. \tag{2.1}$$

由比较定理(命题 1.3)得 $0\leqslant p^{u_n}(a,t)\leqslant p^{\theta_1}(a,t)$，a. e. $(a,t)\in Q$，于是存在 $\{p^{u_n}\}$ 的子列，我们仍记为 $\{p^{u_n}\}$，在 $L^2(Q)$ 中弱收敛于 p^*，即 $p^{u_n}\xrightarrow{\text{弱}}p^*$.

由 Mazur's 定理及其推论[11]，我们得知 $p^{u_n}(n=1,2,\cdots.)$ 的凸组合序列 $\{\tilde{p}_n\}$ 满足

$$\tilde{p}_n=\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i},\ \lambda_i^n\geqslant 0,\ \sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n=1\ (k_n\geqslant n+1),$$

且 $\{\tilde{p}_n\}$ 在 $L^2(Q)$ 中收敛于 p^*，即

$$\tilde{p}_n\to p^*.$$

由条件(A_1)知，$\{g\tilde{p}_n\}$ 在 $L^2(Q)$ 中强收敛于 gp^*，即

$$g\tilde{p}_n\to gp^*. \tag{2.2}$$

设控制 $\tilde{u}_n$ 定义如下

$$\tilde{u}_n(a,t)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)u_i(a,t)}{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)}, & \text{当}\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)\neq 0,\\ \theta_1(a,t), & \text{当}\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)=0.\end{cases}$$

容易证明：$\tilde{u}_n\in\mathcal{U}$，且有

$$\tilde{p}_n(a,t)=p^{\tilde{u}_n}(a,t),\qquad \text{a. e. }(a,t)\in Q.$$

同理，存在 $\{\tilde{u}_n\}$ 的子列，我们仍记为 $\{\tilde{u}_n\}$，使得

$$\begin{cases}\tilde{u}_n\to u^*,\\ J(\tilde{u}_n)=\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n J(u_i)\to d,\quad n\to+\infty.\end{cases} \tag{2.3}$$

由(2.2)，(2.3)式及条件(A_1)得知

$$d=\lim_{n\to+\infty}J(\tilde{u}_n)=\int_0^T\int_0^{a_+}g(a)u^*(a,t)p^*(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

现在证明下列等式

$$p^*(a,t)=p^{u^*}(a,t)\qquad \text{a. e. }(a,t)\in Q, \tag{2.5}$$

为了证明等式(2.5)，我们首先要利用命题 1.4 得知：$p^{\tilde{u}_n}$ 是系统(1.1)对应于 $u:=\tilde{u}_n$ 的一个弱解，即对 $\forall\varphi\in\Phi$，有

$$\int_0^T\int_0^{a_+}[-D\varphi(a,t)+(\mu(a,t)+\tilde{u}_n(a,t))\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)]p^{\tilde{u}_n}(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_0^{a_+}f(a,t)\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

再对等式(2.6)取极限($n\to+\infty$)，对 $\forall\varphi\in\Phi$，有

$$\int_0^T\int_0^{a_+}[-D\varphi(a,t)+(\mu(a,t)+u^*(a,t))\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)]p^*(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_0^{a_+}f(a,t)\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t.$$

于是再由命题 1.4 得知:等式(2.5)成立.从而,由(2.3)、(2.4)式可以推得此定理成立,证毕. ▍

3 极大值原理

本段讨论最优控制问题(P)的解所满足的必要条件,通过讨论,我们得到了 Pontryagin's 极大值原理.

首先证明下列有用的引理.

引理 3.1 设(u^*, p^{u^*})是最优问题(P)的最优对,对 $\varepsilon>0$,且 ε 足够小,对 $\forall v\in T_{\mathcal{U}}(u^*)$ ($T_{\mathcal{U}}(u^*)$表示 $\mathcal{U}$ 在 u^* 处的切锥),有 $u^*+\varepsilon v\in\mathcal{U}$,则在 $L_T^\infty(Q)$中下列极限存在.

$$\frac{1}{\varepsilon}(p^{u^*+\varepsilon v}-p^{u^*})\rightarrow z,\quad 当\ \varepsilon\rightarrow 0^+,$$

其中 z 是方程

$$\begin{cases}Dz(a,t)+\mu(a,t)z(a,t)=-vp^{u^*}-u^*z, & (a,t)\in Q,\\ z(0,\ t)=\int_0^{a_+}\beta(a,t)z(a,t)\mathrm{d}a, & t\in R,\\ z(a,t)=z(a,t+T), & (a,t)\in Q\end{cases}\tag{3.1}$$

的解.

证 系统(3.1)解的存在唯一性可由命题 1.2 证得. 令

$$w_\varepsilon(a,t)=\frac{1}{\varepsilon}[p^{u^*+\varepsilon v}(a,t)-p^{u^*}(a,t)]-z(a,t),\quad (a,t)\in Q.$$

显然 w_ε 是方程

$$\begin{cases}Dw(a,t)+\mu(a,t)w(a,t)=-u^*w-v[p^{u^*+\varepsilon v}-p^{u^*}], & (a,t)\in Q,\\ w(0,t)=\int_0^{a_+}\beta(a,t)w(a,t)\mathrm{d}a, & t\in R,\\ w(a,t)=w(a,t+T), & (a,t)\in Q\end{cases}$$

的解.

由于在 $L_T^\infty(Q)$中,$(p^{u^*+\varepsilon v}-p^{u^*})\rightarrow 0\ (\varepsilon\rightarrow 0^+)$,注意到命题 1.3 的(4),我们可推得:在 $L_T^\infty(Q)$中有 $w_\varepsilon\rightarrow 0\ (\varepsilon\rightarrow 0^+)$.因此,此结论成立,证毕. ▍

由标准证明([9]),我们易得到下列引理:

引理 3.2 如果 $r(A^\mu)<1$, $\theta_1(a,t)-\frac{g'(a)}{g(a)}\geqslant 0$, a.e. $(a,t)\in Q$,则系统

$$\begin{cases}Dq-\mu q+\frac{g'(a)}{g(a)}q=u^*(1+q)-\frac{g(0)}{g(a)}\beta(a,t)q(0,t), & (a,t)\in Q,\\ q(a_+,t)=0, & t\in R,\\ q(a,T)=q(a,t+T), & (a,t)\in Q,\end{cases}\tag{3.2}$$

有唯一的非正解 q.

这里的函数 q 在每一条特征线 $a-t=k$(常数)上绝对连续,并且满足下列条件:

$$\begin{cases}Dq-\mu q+\frac{g'(a)}{g(a)}q=u^*(1+q)-\frac{g(0)}{g(a)}\beta(a,t)q(0,t), & \text{a.e. } (a,t)\in Q,\\ \lim\limits_{\varepsilon\rightarrow 0^+}q(a_+-\varepsilon,t-\varepsilon)=0, & \text{a.e. } t\in R,\end{cases}\tag{3.3}$$

与

$$\begin{cases} q \in L_T^\infty(Q), \\ Dq \in L^1((0,a_+)\times(0,T)), \\ \bar{\mu}q \in L^1((0,a_+)\times(0,T)), \end{cases} \tag{3.4}$$

其中

$$\bar{\mu}(a,t) = \mu(a,t) + u^*(a,t) - \frac{g'(a)}{g(a)}, (a,t) \in Q.$$

定理 3.3 设条件(A_1)—(A_5)成立，$f(a,t)>0, \theta_1(a,t)-\dfrac{g'(a)}{g(a)}\geqslant 0$, a.e. $(a,t)\in Q$，如果 u^* 是最优控制问题(P)的解，q 是下列方程

$$\begin{cases} Dq - \mu q + \dfrac{g'(a)}{g(a)}q = u^*(1+q) - \dfrac{g(0)}{g(a)}\beta(a,t)q(0,t), & (a,t)\in Q, \\ q(a_+,t) = 0, & t \in R, \\ q(a,t) = q(a,t+T), & (a,t)\in Q \end{cases} \tag{3.5}$$

的解. 则有

$$u^*(a,t) = \begin{cases} \theta_1(a,t), & \text{当 } 1+q(a,t)<0, \\ \theta_2(a,t), & \text{当 } 1+q(a,t)>0. \end{cases} \tag{3.6}$$

证 系统(3.5)的解 q 存在唯一性可由引理 3.2 推得. 用 $\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(u^*)$表示 $\mathscr{U}$ 在 u^* 处的法锥(在 $L^\infty(Q)$中).

对任意 $v\in T_{\mathscr{U}}(u^*)$，当 $\varepsilon>0$ 且充分小时，有 $u^*+\varepsilon v\in\mathscr{U}$，由于 u^* 是最优控制问题(P)的解，从而有

$$\int_0^T\int_0^{a_+} g(a)u^* p^{u^*}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t \geqslant \int_0^T\int_0^{a_+} g(a)(u^*+\varepsilon v)p^{u^*+v}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t.$$

因此有

$$\int_0^T\int_0^{a_+} g(a)u^*\ \frac{p^{u^*+v}-p^{u^*}}{\varepsilon}\mathrm{d}a\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^{a_+} g(a)vp^{u^*+v}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t \leqslant 0. \tag{3.7}$$

由命题 1.3 立即可推出：在 $L_T^\infty(Q)$中有 $p^{u^*+v}\to p^{u^*}$ $(\varepsilon\to 0^+)$.

对(3.7)式取极限 $\varepsilon\to 0^+$，并由引理 3.1，我们得

$$\int_0^T\int_0^{a_+} g(a)(u^*z + vp^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t \leqslant 0. \tag{3.8}$$

在(3.5)式中的第一个等式两边乘以$(gz)(a,t)$并在$[0,T]\times[0,a_+]$积分得

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_0^{a_+} \left(Dq - \mu q + \frac{g'}{g}q\right) gz\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t \\ =&\int_0^T\int_0^{a_+} g(a)z(a,t)\left[u^*(1+q) - \frac{g(0)}{g(a)}\beta(a,t)q(0,t)\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

利用(3.1)与(3.5)式得

$$-\int_0^T\int_0^{a_+} (Dz+\mu z)gq\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t = \int_0^T\int_0^{a_+} u^*(1+q)g(a)z(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

由(3.1)与(3.9)式，我们得到

$$\int_0^T\int_0^{a_+} gqvp^{u^*}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t = \int_0^T\int_0^{a_+} gu^*z\mathrm{d}a\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

对任意 $v\in T_{\mathscr{U}}(u^*)$，当 $\varepsilon>0$，且充分小时，有 $u^*+\varepsilon v\in\mathscr{U}$，从而由(3.8)与(3.10)式可知

$$\int_0^T\int_0^{a_+} g(a)v(a,t)(1+q(a,t))p^{u^*}(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

即 $g(1+q)p^{u^*} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(u^*)$,于是由法锥元素的特征刻画得知

$$u^*(a,t)=\begin{cases}\theta_1(a,t), & 当\ g(a)(1+q(a,t))p^{u^*}(a,t)<0,\\ \theta_2(a,t), & 当\ g(a)(1+q(a,t))p^{u^*}(a,t)>0.\end{cases}$$

由于 $f(a,t)>0$, a. e. $(a,t)\in Q$. 并注意到命题 1.3,立即可推得,$p^{u^*}(a,t)>0$, a. e. $(a,t)\in Q$,因此(3.6)式成立,证毕. ▌

由文献[9]的标准证明,我们可得如下推论.

推论 3.4 方程(3.5)的解 q 也是下列方程

$$\begin{cases}Dq-(\mu+\theta_1-\frac{g'}{g})q=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)(1+q)^+-\frac{g'(a)}{g(a)}\beta q(0,t), & (a,t)\in Q,\\ q(a_+,t)=0, \quad t\in R,\\ q(a,t)=q(a,t+T), \quad (a,t)\in Q\end{cases} \tag{3.11}$$

的解,并且方程(3.11)有唯一解.

下面,考虑最优控制问题(P)解的唯一性. 在给出结论之前,我们需要作进一步假设

$$\begin{cases}g(a)\mu(a,t)-g'(a)>0, \quad \text{a. e. } (a,t)\in Q,\\ 且对任意\ t_0\in R, \dfrac{g(0)\beta(\cdot,t_0)}{g(\cdot)\mu(\cdot,t_0)-g'(\cdot)}\\ 在任一非零测度子集上不是严格正常数.\end{cases} \tag{A_6}$$

若条件$(A_1)-(A_6)$成立,则我们易得如下结论.

定理 3.5 如果条件$(A_1)-(A_6)$及 $f(a,t)>0$, a. e. $(a,t)\in Q$ 成立,则最优控制问题(P)有唯一解 u^*,并且解 u^* 由(3.6)式给出.

证 此定理的证明与文献[10]中的定理 3.1.4 证明类似,这里我们省略不证. ▌

注 3.6 如果 $g(a)\equiv 1$, $\forall a\in(0,a_+)$时,目标泛函(1.2)式和假设条件(A_6)分别简化为(1.3)式和文献[10]中的(A_6),于是我们的结论是文献[10]的推广.

注 3.7 在种群密度 $P(a,t)$中可以考虑时间滞后,如文献[14-15]。此问题有等于我们进一步讨论。

参 考 文 献

[1] Ianelli M. Mathematical Theory of Age-structured Population Dynamics. CNR Aplied Mathematics Monographs. Pisa: Giardini Editori e Stampatori, 1995

[2] Brokate M. Pontryagin's principle for control problemsin age-dependent population dynamics. J Math Biol, 1985, **23**: 75-101

[3] Brokate M. On a certain optimal harvesting problem with continuous age-structure, Birkhäuser: Optimal Control of Partial Differential Equitions II. 1987. 29-42

[4] Gurtin M E, Murphy L F. On the optimal harvesting of age-structured populations: some simple models. Math Biosci, 1981, **55**: 115-136

[5] Gurtin M E, Murphy L F. On the optimal harvesting of persistent age-structured populations. J Math Biol, 1981, **13**: 131-148

[6] Murphy L F, Smith S J. Optimal harvesting of an age-structured population. J Math Biol, 1990, **29**: 77-90

[7] Anita S. Optimal harvesting for a nonlinear age-dependent population dynamics. J Math Anal Appl, 1998, **226**: 6-

12
[8] Anita S. Optimal control of a nonlinear population dynamics with diffusion. J Math Anal Appl, 1990, **152**: 176—208
[9] Anita S. Analysis and Control of Age-dependent Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000
[10] Anita S, Iannelli M, Kim M Y, Park E J. Optimal harvesting for periodic age-dependent population dynamics. SIAM J Appl Math, 1998, **58**: 1648—1666
[11] Barbu V, Precupanu T. Convexity and Optimization in Banach Spaces. Dordrecht-boston: D. Reidel Publishing Company, 1986
[12] Web G. Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics. New York: Dekker, 1985
[13] Clark C W. Mathematical Bioeconomics: The optimal Management of Renewable Resources. New York: Wiley, 1976
[14] Xu Rui, Chen Lansun. Global asymptotic stability in n-species nonautonomous lotka-volterra competitive systems with delays. Acta Mathematics Scientia, 2003, **23**(2): 208—218
[15] Xu Rui, Chen Lansun. Persitence and global stability for a three-species ratio-dependent predator-prey system with time delays in two-patch environments. Acta Mathematics Scientia, 2002, **22**(4): 533—541

Optimal Harvesting Control Problem for Linear Periodic Age-dependent Population Dynamic System

[1]Luo Zhixue [2]Wang Miansen
([1]*Department of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070)
([2]*Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract: In this paper, an optimal harvesting problem for linear periodic age-dependent population dynamics is investigated. Namely, the Lotka-Mckendrick model with periodic vital rates and a periodic forcing term that sustains oscillations is considered. By Mazur's theorem, existence of solutions of the optimal control problem is demonstrated and by the conception of normal cone, first order necessary conditions of optimality for the problem are obtained. Finally, under suitable assumptions, uniqueness of solution of the optimal control problem is given. The results extend some known criteria.

Key words: Optimal harvesting; Optimal control; Periodic population dynamics; The maximum principle.
MR(2000) Subject Classification: 35B10; 49J20; 65L12