2009,**29A**(3):656–668

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

关于弱压缩算子的变分不等式解的粘滞逼近算法 *

宋义生　杨长森
(河南师范大学数学与信息科学学院　河南新乡 453007)

摘要: 在严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 框架内, 该文借助于两种粘滞逼近算法去近似逼近关于弱压缩算子的变分不等式解并且也获得了相应的收敛率估计.

关键词: 粘滞逼近算法; 非扩张映射序列; 弱压缩算子; 收敛率估计; 严格凸 Banach 空间.

MR(2000) 主题分类: 47H06; 47J05　**中图分类号**: O177.91　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-656-13

1　引言和结果

设 (E,d) 是一个度量空间, A 是一个定义域为 $D(A)$ 与值域为 $R(A)$ 的映射. Alber–Delabriere 在文献 [1] 中定义了如下的弱压缩映射: A 被称为弱压缩的, 如果存在某个满足条件 $\varphi(t)>0,\forall t\in(0,+\infty)$ 与 $\varphi(0)=0$ 且严格增的连续函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 成立

$$d(Ax,Ay)\le d(x,y)-\varphi(d(x,y)),\forall x,y\in D(T). \tag{1.1}$$

显然, 压缩系数为 $k\in(0,1)$ 的压缩映射是具有 $\psi(t)=(1-k)t$ 的弱压缩映射. 若 $\varphi(t)\equiv 0$, 则 A 就被称为非扩张的. 如果 φ 是右下半连续的, 则 $\psi(t)=t-\varphi(t)$ 是右上半连续的, (1.1) 式变为 $d(Ax,Ay)\le\psi(d(x,y))$. 此时, 映射 A 又被称为 Boyd-Wong 型压缩 [2−3]. Rhoades[4] 证实了如下弱压缩映射的类似于 Banach 压缩原理的结果.

定理 1.1[4, Theorem 2]　定义在完备度量空间 E 上的弱压缩自映射 A 有唯一的不动点 p, 并且对每一个 $x\in E$, $\{A^nx\}$ 均强收敛到 p.

Rhoades[4] 也在 Banach 空间 E 中研究了 Mann 迭代 (1.2) 的收敛性. Chidume et al[5] 与 Alber et al[6] 独立地获得了 Rhoades 结果的非自映射版本且给出了迭代 (1.3) 的收敛率估计.

$$x_{n+1}=x_n-\alpha_n(x_n-Ax_n), \tag{1.2}$$

$$x_{n+1}=Q(x_n-\alpha_n(x_n-Ax_n)), \tag{1.3}$$

其中 Q 是一个从 E 到 $D(A)$ 的向阳非扩张收缩映射. 最近, 在一致凸且一致光滑的 Banach 空间中, Zeng et al[7] 引入了渐近 Q - 弱压缩非自映射 A 的概念, i.e., 存在 $k_n\in(0,\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,

$$\|A(QA)^nx-A(QA)^ny\|\le k_n\|x-y\|-\varphi(\|x-y\|),\forall x,y\in D(A),$$

收稿日期: 2007-12-20; 修订日期: 2009-04-15

E-mail: songyisheng123@yahoo.com.cn; yangchangsen0991@sina.com

* 基金项目: 教育部科技司科学基金 (208081) 和河南师范大学青年基金资助

并且研究了一个新的迭代算法 (1.4) 以找到此类映射的不动点,

$$x_{n+1} = Q(x_n - \alpha_n(x_n - A(QA)^n x_n)). \tag{1.4}$$

Moudafi 在文献 [8] 中首次对非扩张映射 T 和压缩映射 f 引入了如下的粘滞逼近算法

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n. \tag{1.5}$$

Xu[9] 推广 Moudafi 的结果到一个一致光滑的 Banach 空间中．最近，宋义生等在文献 [10–19] 中对更一般的 Banach 空间获得了粘滞逼近算法 (1.5) 的强收敛结果． Suzuki[20] 使用 Meir-Keeler 压缩映射 Φ 代替 (1.5) 式中的 f 证明了类似上面提到的结果.

本文受到 Zeng et al[7], Suzuki[20] 与 Rhoades[4] 等文献的启发，自然对非扩张映射序列 $\{T_n\}$ 和弱压缩映射 A 引入两种粘滞逼近算法 (1.6)–(1.7),

$$x_{n+1} = \alpha_n Ax_n + (1-\alpha_n)T_n x_n, \tag{1.6}$$

$$x_{n+1} = T_n(\alpha_n Ax_n + (1-\alpha_n)x_n). \tag{1.7}$$

显然， (1.6) 式包括 (1.2) 式 ($T_n \equiv I$, 恒等算子) 与 (1.5) 式 ($T_n \equiv T$, 一个非扩张映射与 A 是一个压缩映射) 作为特例，而且 (1.7) 式也是 (1.2)($T_n \equiv I$) 和 (1.3) 式 ($T_n = Q$) 的推广．我们将在严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 框架内，借助于以上两种粘滞逼近算法去近似逼近关于弱压缩算子的变分不等式解 ($\langle Ax^* - x^*, J(p-x^*)\rangle \le 0,\ \forall p \in \mathrm{Fix}(T)$) 并且也获得了相应的收敛率估计.

2　预备知识

在本文中， E 总是指实数域的 Banach 空间，并且以 $\|\cdot\|$ 、 E^* 分别记为其范数、其对偶空间． $x^* \in E^*$ 在 $y \in E$ 的值记为 $\langle y, x^*\rangle$, E 到 2^{E^*} 的正规对偶映射记为 J, 即， $J(x) = \{f \in E^* : \langle x, f\rangle = \|x\|\|f\|, \|x\| = \|f\|\}, \forall\, x \in E$. 令 $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in E : Tx = x\}$, 记为 T 的不动点集.

设 $S(E) := \{x \in E; \|x\| = 1\}$. 空间 E 被称为有 (i) Gâteaux 可微范数 (也称 E 是光滑的), 如果极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

对每一个 $x, y \in S(E)$ 均存在； (ii) 一致 Gâteaux 可微范数，若对每个 $y \in S(E)$, 极限 (2.1) 对 $x \in S(E)$ 都存在． E 被称为 (iii) 严格凸的，如果 $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \ne y$ 蕴含着 $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$; (iv) 一致凸的，如果任意的 $\varepsilon \in [0,2]$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ 使得 $\|x\| = \|y\| = 1$ 且 $\|x-y\| \ge \varepsilon$ 蕴含着 $\frac{\|x+y\|}{2} < 1 - \delta_\varepsilon$.

设 C 是 E 的一个非空闭凸子集与 $D \subset C$, 则 $P: C \to D$ 被称为从 C 到 D 的收缩映射，如果 P 是连续的且 $F(P) = D$;$P: C \to D$ 被称为是向阳的，如果 $P(Px + t(x - Px)) = Px,\ \ \forall x \in C$, 每当 $Px + t(x - Px) \in C$ 和 $t > 0$. C 的一个非空子集 D 被称为它的向阳非扩张收缩子集，如果存在一个从 C 到 D 向阳非扩张收缩映射．此概念被 Reich 教授在文献 [21] 引入并使用．关于它的详细的性质可以也看文献 [21–23].

引理 2.1[24, Proposition 2.1.31(e)]　如果拓扑空间 E 的全网 $\{z_t\}$ 的每一个子网均可找到一个子网收敛到 $x^* \in E$, 那么 $z_t \to x^*$.

引理 2.2[25, Lemma 5.1.6] 设 C 是光滑 Banach 空间 E 的非空闭凸子集， $D \subset C$, $P: C \to D$ 是一个收缩映射．则 P 是一个向阳非扩张映射当且仅当下列不等式成立

$$\langle x - Px, J(y - Px)\rangle \leq 0, \quad \forall\, x \in C,\ y \in D.$$

引理 2.3[26, Lemma 9.3.6] 弱下半连续函数 $f: E \to R$ 在 Banach 空间 E 上的每个弱紧凸子集都能取到最小值．

引理 2.4[26, Lemma 9.3.7] 在严格凸 Banach 空间 E 上的每个弱紧凸子集 K 都是 Chebyshev 集，即 $\forall x \in E$, 存在唯一的元素 $y \in K$ 使得

$$\|x - y\| = d(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

接下来，我们使用上述结果证明下面的结果，它是 Moudafi[8] 、 Xu[9] 、 Suzuki[20] 等文献相应结果的推广、补充或发展．

定理 2.5 设 T 是严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的弱紧凸子集 K 上的非扩张自映射且 $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. $A: K \to K$ 是一个关于函数 φ 的弱压缩映射，那么 (i) 对每一个 $t \in (0,1)$, 存在唯一的 z_t 满足

$$z_t = tAz_t + (1-t)Tz_t; \tag{2.2}$$

(ii) 当 $t \to 0$ 时， z_t 强收敛到下面变分不等式的唯一解 x^*

$$\langle Ax^* - x^*, J(p - x^*)\rangle \leq 0, \quad \forall p \in \mathrm{Fix}(T).$$

证 对每一个 $t \in (0,1)$, 令 S_t 由 $S_t := tA + (1-t)T$ 定义和 $\psi(s) = t\varphi(s)$, 则 $\forall x, y \in K$, 易得

$$\begin{aligned}
\|S_t x - S_t y\| &= \|(tAx + (1-t)Tx) - (tAy + (1-t)Ty)\| \\
&\leq (1-t)\|Tx - Ty\| + t\|Ax - Ay\| \\
&\leq (1-t)\|x - y\| + t\|x - y\| - t\varphi(\|x - y\|) \\
&= \|x - y\| - \psi(\|x - y\|).
\end{aligned}$$

即， S_t 是一个关于函数 ψ 的弱压缩映射．所以，由定理 1.1 可得 S_t 在 K 有唯一的不动点 z_t. 这就证明了 (i).

下面使用引理 2.1 证明 (ii). 由 K 的弱紧性易得 $M = \sup\limits_{t \in (0,1)} \|Az_t - Tz_t\| < +\infty$ (见文献 [24, Corollary 2.5.7]), 因此

$$\lim_{t \to 0} \|z_t - Tz_t\| = \lim_{t \to 0} t\|Az_t - Tz_t\| = 0. \tag{2.3}$$

令 $\{z_{t_n}\} \subset \{z_t\}$ 与 $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = 0$, 那么我们能定义函数 $f: K \to (0, +\infty)$ 如下

$$f(x) = \limsup_{n \to \infty} \|z_{t_n} - x\|^2, \ \forall x \in K.$$

由文献 [27, Chapter 1(Proposition 1.3.5)], 易知 $f(x)$ 是 K 上的凸下半连续函数，所以它是弱下半连续的．由引理 2.3 知存在 $v \in K$ 使得 $f(v) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$. 设

$$K_1 = \{y \in K : f(y) = \inf_{x \in K} f(x)\},$$

则 $v \in K_1$. 显然， K_1 是 K 的一个弱紧凸子集. 从 (2.3) 式，我们也有 $\forall y \in K_1$,

$$\begin{aligned} f(Ty) &= \limsup_{n\to\infty} \|z_{t_n} - Ty\|^2 \\ &\le \limsup_{n\to\infty} (\|z_{t_n} - Tz_{t_n}\| + \|Tz_{t_n} - Ty\|)^2 \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \|z_{t_n} - y\|^2 \\ &= f(y). \end{aligned}$$

从而， $Ty \in K_1$. 由于 y 是任意的，所以 $T(K_1) \subset K_1$. 由 $\mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset$, 取 $q \in \mathrm{Fix}(T)$, 使用引理 2.4 可得存在唯一的 $x^* \in K_1$ 满足

$$\|q - x^*\| = \inf_{x\in K_1} \|q - x\|.$$

由 $q = Tq$ 和 $Tx^* \in K_1$, 易得

$$\|q - Tx^*\| = \|Tq - Tx^*\| \le \|q - x^*\|.$$

所以使用 $x^* \in K_1$ 的唯一性就得到 $x^* = Tx^*$. 下证

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - x^*)\rangle \le 0. \tag{2.4}$$

令 $y_s = x^* - s(x^* - Ax^*)$, 其中 $s \in (0,1)$, 则 $y_s \in K$ 和 $y_s \to x^* (s \to 0)$. 从而， $f(x^*) \le f(y_s)$ (因为 $x^* \in K_1$). 由于

$$\begin{aligned} \|z_{t_n} - y_s\|^2 &= \langle z_{t_n} - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle + s\langle x^* - Ax^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle \\ &\le \frac{\|z_{t_n} - x^*\|^2 + \|z_{t_n} - y_s\|^2}{2} - s\langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle, \end{aligned}$$

所以

$$\|z_{t_n} - y_s\|^2 \le \|z_{t_n} - x^*\|^2 - 2s\langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle.$$

因此

$$f(y_s) \le f(x^*) - 2s \liminf_{n\to\infty} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle.$$

即

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle \le \frac{f(x^*) - f(y_s)}{2s} \le 0. \tag{2.5}$$

由 J 是范数拓扑到弱星拓扑的一致连续性可知

$$\lim_{s\to 0} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle = \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - x^*)\rangle$$

对 t_n 是一致的. 从而， $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0,1)$ 使得 $\forall s \in (0,\delta)$, 对所有的 t_n, 有

$$\langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - x^*)\rangle < \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle + \varepsilon.$$

因此从 (2.5) 式可得

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - x^*)\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Ax^* - x^*, J(z_{t_n} - y_s)\rangle + \varepsilon \le \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，因此 (2.4) 式被证实了.

下证 $\{z_t\}$ 是序列紧的. 事实上，由 (2.2) 式易得

$$\begin{aligned}\|z_{t_n}-x^*\|^2 &= t_n\langle Az_{t_n}-Ax^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle + t_n\langle Ax^*-x^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle \\ &\quad +(1-t_n)\langle Tz_{t_n}-x^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle \\ &\le t_n\|z_{t_n}-x^*\|^2-\varphi(\|z_{t_n}-x^*\|)\|z_{t_n}-x^*\| \\ &\quad +t_n\langle Ax^*-x^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle+(1-t_n)\|z_{t_n}-x^*\|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi(\|z_{t_n}-x^*\|)\|z_{t_n}-x^*\| \le \langle Ax^*-x^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle. \tag{2.6}$$

从 (2.4) 、 (2.6) 式有

$$0\le \liminf_{n\to\infty}\varphi(\|z_{t_n}-x^*\|)\|z_{t_n}-x^*\| \le \liminf_{n\to\infty}\langle Ax^*-x^*, J(z_{t_n}-x^*)\rangle \le 0,$$

从而， $\liminf\limits_{n\to\infty}\varphi(\|z_{t_n}-x^*\|)\|z_{t_n}-x^*\|=0$. 因此，由 φ 的性质得到 $\{z_{t_n}\}$ 存在子列仍记为 $\{z_{t_n}\}$ 强收敛到某个 $x^*\in \mathrm{Fix}(T)$.

下面,我们证明 $\{z_t\}$ 的每一个子网均有一个子网收敛到 x^*. 假如存在另一个子网 $\{z_{s_n}\}\subset\{z_t\}$, 满足 $z_{s_n}\to z(\ s_n\to 0)$, 则 $z\in\mathrm{Fix}(T)$. 从而 $z=x^*$. 事实上，对每个 $p\in\mathrm{Fix}(T)$, 由 (2.2) 式易得

$$\begin{aligned}\langle Az_t-z_t, J(p-z_t)\rangle &= \frac{1-t}{t}\langle z_t-p+Tp-Tz_t, J(p-z_t)\rangle \\ &\le \frac{1-t}{t}(\|Tp-Tz_t\|\|p-z_t\|-\|p-z_t\|^2) \\ &\le 0.\end{aligned}$$

所以

$$\langle Az_{t_n}-z_{t_n}, J(p-z_{t_n})\rangle\le 0 \quad 与 \quad \langle Az_{s_n}-z_{s_n}, J(p-z_{s_n})\rangle \le 0. \tag{2.7}$$

从而，对常数 $L\ge\|z_t-p\|$, 有

$$\begin{aligned}&|\langle Az_{t_n}-z_{t_n}, J(p-z_{t_n})\rangle-\langle Ax^*-x^*, J(p-x^*)\rangle| \\ &=|\langle Az_{t_n}-z_{t_n}-(Ax^*-x^*), J(p-z_{t_n})\rangle+\langle Ax^*-x^*, J(p-z_{t_n})-J(p-x^*)\rangle| \\ &\le \|Az_{t_n}-Ax^*+(x^*-z_{t_n})\|\|z_{t_n}-p\|+|\langle Ax^*-x^*, J(p-z_{t_n})-J(p-x^*)\rangle| \\ &\le L(2\|x^*-z_{t_n}\|-\varphi(\|x^*-z_{t_n}\|))+|+|\langle Ax^*-x^*, J(p-z_{t_n})-J(p-x^*)\rangle|\to 0.\end{aligned}$$

因此，由 (2.7) 式可得

$$\langle Ax^*-x^*, J(p-x^*)\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle Az_{t_n}-z_{t_n}, J(p-z_{t_n})\rangle\le 0. \tag{2.8}$$

类似地， z 也满足 (2.8) 式. 由于 $z, x^*\in\mathrm{Fix}(T)$, 从而

$$\langle Ax^*-x^*, J(z-x^*)\rangle\le 0 \quad 与 \quad \langle Az-z, J(x^*-z)\rangle\le 0.$$

两式相加就得到

$$\varphi(\|x^*-z\|)\|x^*-z\|\le\langle(x^*-z)-(Ax^*-Az), J(x^*-z)\rangle\le 0.$$

由 φ 的性质易得 $z = x^*$.

因此由引理 2.1 就得 $\{z_t\}$ 强收敛到 x^*. 同时， x^* 也是变分不等式

$$\langle Ax^* - x^*, J(p - x^*)\rangle \le 0$$

对所有的 $p \in \mathrm{Fix}(T)$ 的解. ▌

若取 $Ax = u \in K$, 那么结论仍成立. 令 $Pu = \lim\limits_{t\to 0} z_t$, 从引理 2.2 可知 P 是从 K 到 $\mathrm{Fix}(T)$ 的向阳非扩张收缩映射.

推论 2.6 设 T 是严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的弱紧凸子集 K 上的非扩张自映射且 $\mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset$. 那么 $\mathrm{Fix}(T)$ 是 K 的向阳非扩张收缩子集.

推论 2.7 设 T 是自反严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的非空闭凸子集 K 上的非扩张自映射且 $\mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset$. 若 $\{z_t\}$ 由 (2.2) 式定义，则 $\{z_t\}$ 强收敛到 $x^* = PAx^*$, 其中 P 是从 K 到 $\mathrm{Fix}(T)$ 的向阳非扩张收缩映射.

证 取 $p \in \mathrm{Fix}(T)$, 那么

$$\begin{aligned}\|z_t - p\| &\le t\|Az_t - Ap + Ap - p\| + (1-t)\|Tz_t - p\|\\ &\le t\|z_t - p\| - t\varphi(\|z_t - p\|) + t\|Ap - p\| + (1-t)\|z_t - p\|\\ &= \|z_t - p\| - t\varphi(\|z_t - p\|) + t\|Ap - p\|.\end{aligned}$$

因此 $\varphi(\|z_t - p\|) \le \|Ap - p\|$. 从而 $\{z_t\}$ 是有界的. 所以， $\{z_t\}$ 是弱紧的 [24, Corollary 2.8.9]. 余下的证明与定理 2.5 一样，我们忽略之. ▌

3 关于弱压缩映射的粘滞逼近算法

本部分将首先讨论 Halpern 型迭代 [28](3.1) 的强收敛，进而研究关于弱压缩映射的粘滞逼近算法 (3.2) 的收敛性，也给出相应的收敛率估计.

$$y_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)T_n y_n, \quad u \in K, \quad y_0 \in K, \tag{3.1}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n Ax_n + (1-\alpha_n)T_n x_n, \quad x_0 \in K. \tag{3.2}$$

为了证明主要结果，我们也需要下面的引理，它们分别被 Bruck[29] 与 Alber 等 [5–7,30] 证实并使用过.

引理 3.1[29, Lemma 3] 设 K 是严格凸 Banach 空间 E 的一个非空闭凸子集，$T_n : K \to E$ 是一列非扩张映射. 那么存在一个非扩张映射 $T : K \to E$ 满足 $F(T) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F(T_n)$. 特别地，若 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F(T_n) \ne \emptyset$, 则映射 $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n T_n$ 就能达到上述要求，其中 $\{\beta_n\}$ 是正实数序列，满足： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n = 1$.

引理 3.2 设 $\{\lambda_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是两个非负实数序列、$\{\alpha_n\}$ 是正实数序列，满足如下条件：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$ 、 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$ 与

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n) + \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中 $\psi(\lambda)$ 是 $\lambda \geq 0$ 时的连续的严格增函数且 $\psi(0)=0$. 那么 (i) $\{\lambda_n\}$ 强收敛到 0; (ii) 存在 $\{\lambda_{n_k}\} \subset \{\lambda_n\}, k=1,2,\cdots$, 满足

$$\lambda_{n_k} \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+\frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{n_k}}\right),$$

$$\lambda_{n_k+1} \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+\frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{n_k}}\right)+\beta_{n_k},$$

$$\lambda_n \leq \lambda_{n_k+1}-\sum_{m=n_k+1}^{n-1}\frac{\alpha_m}{\theta_m},\ n_k+1<n<n_{k+1},\ \theta_m=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i,$$

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_0-\sum_{m=0}^{n}\frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \lambda_0,\ 1 \leq n \leq n_k-1,$$

$$1 \leq n_k \leq s_{\max}=\max\Big\{s;\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \lambda_0\Big\}.$$

定理 3.3 设 $\{T_n\}$ 是严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的弱紧凸子集 K 上的非扩张自映射序列且 $F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_n)\neq\emptyset$. 令 $\{y_n\}$ 由 (3.1) 式产生, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 如果每个 $m\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-T_my_n\|=0$, 则 $\{y_n\}$ 强收敛到 $x^*=Pu\in F$, 其中 P 是从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射. 进而, 存在 $\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}, k=1,2,\cdots$ 与 $\exists\{\varepsilon_n\}\subset(0,+\infty)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 使得

$$\|y_{n_k}-x^*\|^2 \leq \frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+2\varepsilon_{n_k},$$

$$\|y_{n_k+1}-x^*\|^2 \leq \frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+2\varepsilon_{n_k}(1+\alpha_{n_k}),$$

$$\|y_n-x^*\|^2 \leq \|y_{n_k+1}-x^*\|^2-\sum_{m=n_k+1}^{n-1}\frac{\alpha_m}{\theta_m},\ n_k+1<n<n_{k+1},\ \theta_m=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i,$$

$$\|y_{n+1}-x^*\|^2 \leq \|y_0-x^*\|^2-\sum_{m=0}^{n}\frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \|y_0-x^*\|^2,\ 1 \leq n \leq n_k-1,$$

$$1 \leq n_k \leq s_{\max}=\max\Big\{s;\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \|y_0-x^*\|^2\Big\}.$$

证 由引理 3.1 可知存在非扩张映射 $T=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_iT_i$ 使得 $\mathrm{Fix}(T)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)=F$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i=1$. $\forall x\in K$, $T_ix\in K$, $\forall i\geq 1$. 由 K 的闭凸性与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i=1$ 可得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_iT_ix+(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i)x\in K$, 所以 $Tx=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_iT_ix\in K$. 因此, $T(K)\subset K$. 使用条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-T_my_n\|=0$, 易得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-Ty_n\|=0. \tag{3.3}$$

从推论 2.6, 我们能定义 $z_t = tu + (1-t)Tz_t$, 从而 $\{z_t\} \to x^* = Pu \in F$. 下证

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u - x^*, J(y_n - x^*)\rangle \le 0. \tag{3.4}$$

事实上，由于

$$\begin{aligned}\|z_t - y_n\|^2 &= (1-t)\langle Tz_t - y_n, J(z_t - y_n)\rangle + t\langle u - y_n, J(z_t - y_n)\rangle \\ &= (1-t)(\langle Tz_t - Ty_n, J(z_t - y_n)\rangle + \langle Ty_n - y_n, J(z_t - y_n)\rangle) \\ &\quad + t\langle u - x^*, J(z_t - y_n)\rangle + t\langle x^* - z_t, J(z_t - y_n)\rangle + t\langle z_t - y_n, J(z_t - y_n)\rangle \\ &\le \|y_n - z_t\|^2 + \|Ty_n - y_n\|M + t\langle u - x^*, (z_t - y_n)\rangle + t\|z_t - x^*\|M,\end{aligned}$$

所以

$$\langle u - x^*, J(y_n - z_t)\rangle \le \frac{\|y_n - Ty_n\|}{t}M + M\|z_t - x^*\|,$$

其中 M 是满足 $M \ge \|y_n - z_t\|$ 的常数．因此，使用 (3.3) 式和 $z_t \to x^*$, 有

$$\limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle u - x^*, J(y_n - z_t)\rangle \le 0. \tag{3.5}$$

另一方面，由于 J 的性质与 $z_t \to x^*(t\to 0)$, 我们有，对每一个 n, 当 $t \to 0$ 时，

$$|\langle u - x^*, J(y_n - x^*) - J(y_n - z_t)\rangle| \to 0.$$

从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall t \in (0,\delta)$ 与 $n \ge 0$, 有

$$\langle u - x^*, J(y_n - x^*)\rangle < \langle u - x^*, J(y_n - z_t)\rangle + \varepsilon.$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u - x^*, J(y_n - x^*)\rangle \le \limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}(\langle u - x^*, J(y_n - z_t)\rangle + \varepsilon) \le \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的， (3.4) 式就得到了．设 $\varepsilon_n = \max\{\langle u - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle, 0\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0 \quad 与 \quad \langle u - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle \le \varepsilon_n.$$

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - x^*\|^2 &= \alpha_n\langle u - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle + (1-\alpha_n)\langle T_n y_n - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle \\ &\le (1-\alpha_n)\frac{\|T_n y_n - x^*\|^2 + \|J(y_{n+1} - x^*)\|^2}{2} + \alpha_n\langle u - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\|y_{n+1} - x^*\|^2 \le \|y_n - x^*\|^2 - \alpha_n\|y_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\langle u - x^*, J(y_{n+1} - x^*)\rangle.$$

因此，我们就得到关于 $\lambda_n = \|y_n - x^*\|^2$ 的不等式

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \alpha_n\psi(\lambda_n) + \beta_n,$$

其中 $\psi(t) = t$ 与 $\beta_n = 2\alpha_n\varepsilon_n$. 由引理 3.2 就得到 $y_n \to x^* = Pu$ 与收敛率估计式. ▌

定理 3.4 设 $\{T_n\}$ 是严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的弱紧凸子集 K 上的非扩张自映射序列且 $F = \bigcap_{n=0}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_n) \ne \emptyset$. 令 $\{x_n\}$ 由 (3.2) 式产生,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 如果 A 是 K 上的弱压缩自映射，每个 $m\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-T_mx_n\|=0$, 则 $\{y_n\}$ 强收敛到 $x^*=P(Ax^*)\in F$, 其中 P 是从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射. 进而，对 $\psi(t)=2\sqrt{t}\varphi(\sqrt{t})$ 与常数 $M\geq 0$, 存在 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}, k=1,2,\cdots$ 与 $\exists\{\varepsilon_n\}\subset(0,+\infty)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 使得

$$\|x_{n_k}-x^*\|^2\leq\psi^{-1}\bigg(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}\bigg),$$

$$\|x_{n_k+1}-x^*\|^2\leq\psi^{-1}\bigg(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}\bigg)+\alpha_{n_k}(M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}),$$

$$\|x_n-x^*\|^2\leq\|x_{n_k+1}-x^*\|^2-\sum_{m=n_k+1}^{n-1}\frac{\alpha_m}{\theta_m},\ n_k+1<n<n_{k+1},\ \theta_m=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i,$$

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leq\|x_0-x^*\|^2-\sum_{m=0}^{n}\frac{\alpha_m}{\theta_m}\leq\|x_0-x^*\|^2,\ 1\leq n\leq n_k-1,$$

$$1\leq n_k\leq s_{\max}=\max\Big\{s;\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m}{\theta_m}\leq\|x_0-x^*\|^2\Big\}.$$

证 使用定理 3.3 的证明技巧可得存在从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射 P, 则 PA 是 K 上的弱压缩自映射. 因此，由定理 1.1, 存在唯一的 $x^*\in K$ 使得 $x^*=P(Ax^*)$. 使用定理 2.5 和引理 2.2 易得 $x^*\in F$. 类似于定理 3.3 的证明 (取 $u=Ax^*$), 我们有 $\varepsilon_n=\max\{\langle Ax^*-x^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle,0\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&\leq\langle(1-\alpha_n)(T_nx_n-x^*)+\alpha_n(Ax_n-Ax^*),J(x_{n+1}-x^*)\rangle\\&\quad+\alpha_n\langle Ax^*-x^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle\\&\leq\frac{\|(1-\alpha_n)(T_nx_n-x^*)+\alpha_n(Ax_n-Ax^*)\|^2+\|x_{n+1}-x^*\|^2}{2}\\&\quad+\alpha_n\langle Ax^*-x^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle\\&\leq\frac{(\|x_n-x^*\|-\alpha_n\varphi(\|x_n-x^*\|))^2+\|x_{n+1}-x^*\|^2}{2}\\&\quad+\alpha_n\langle Ax^*-x^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leq\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\varphi(\|x_n-x^*\|)\|x_n-x^*\|+\alpha_n^2(\varphi(\|x_n-x^*\|))^2+2\alpha_n\varepsilon_n.$$

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leq\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\varphi(\|x_n-x^*\|)\|x_n-x^*\|+\alpha_n(M\alpha_n+2\varepsilon_n),$$

其中 M 是满足 $M\geq(\varphi(\|x_n-x^*\|))^2$ 的常数. 因此，我们就得到关于 $\lambda_n=\|y_n-x^*\|^2$ 的不等式

$$\lambda_{n+1}\leq\lambda_n-\alpha_n\psi(\lambda_n)+\beta_n,$$

其中 $\psi(t)=2\sqrt{t}\varphi(\sqrt{t})$ 与 $\beta_n=\alpha_n(M\alpha_n+2\varepsilon_n)$. 由引理 3.2 就得到 $x_n\to x^*=P(Ax^*)$ 与收敛率估计式. ▍

4 关于弱压缩映射的交替粘滞逼近算法

本部分将研究关于弱压缩映射的交替粘滞逼近算法 (4.1) 的收敛性，也给出相应的收敛率估计.

$$x_{n+1} = T_n(x_n - \alpha_n(x_n - Ax_n)), \quad x_0 \in K, \tag{4.1}$$

定理 4.1 设 $\{T_n\}$ 是严格凸且具有一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间 E 中的弱紧凸子集 K 上的非扩张自映射序列且 $F = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_n) \neq \emptyset$. 令 $\{x_n\}$ 由 (4.1) 式产生, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$. 如果 A 是 K 上的弱压缩自映射，每个 $m \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - T_m x_n\| = 0$, 则 $\{y_n\}$ 强收敛到 $x^* = P(Ax^*) \in F$, 其中 P 是从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射. 进而，对 $\psi(t) = 2\sqrt{t}\varphi(\sqrt{t})$ 与常数 $M \geq 0$, 存在 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, k = 1, 2, \cdots$ 与 $\exists\{\varepsilon_n\} \subset (0, +\infty)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ 使得

$$\|x_{n_k} - x^*\|^2 \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k} \alpha_m} + M\alpha_{n_k} + 2\varepsilon_{n_k}\right),$$

$$\|x_{n_k+1} - x^*\|^2 \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k} \alpha_m} + M\alpha_{n_k} + 2\varepsilon_{n_k}\right) + \alpha_{n_k}(M\alpha_{n_k} + 2\varepsilon_{n_k}),$$

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \|x_{n_k+1} - x^*\|^2 - \sum_{m=n_k+1}^{n-1} \frac{\alpha_m}{\theta_m},\ n_k + 1 < n < n_{k+1},\ \theta_m = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i,$$

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \|x_0 - x^*\|^2,\ 1 \leq n \leq n_k - 1,$$

$$1 \leq n_k \leq s_{\max} = \max\Big\{s; \sum_{m=0}^{s} \frac{\alpha_m}{\theta_m} \leq \|x_0 - x^*\|^2\Big\}.$$

证 使用定理 3.4 的证明技巧可得存在从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射 P 与存在唯一的 $x^* \in K$ 使得 $x^* = P(Ax^*)$. 令 $y_n = x_n - \alpha_n(x_n - Ax_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ax_n$, 则 $x_{n+1} = T_n y_n$. 由 K 的有界性可得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|x_n - Ax_n\| = 0.$$

对每个 $m > 0$, 有

$$\begin{aligned}\|y_n - T_m y_n\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - T_m x_n\| + \|T_m x_n - T_m y_n\| \\ &\leq 2\|y_n - x_n\| + \|x_n - T_m x_n\|,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - T_m y_n\| = 0.$$

相似于定理 3.3 (taking $u = Ax^*$), 我们也有 $\varepsilon_n = \max\{\langle Ax^* - x^*, J(y_n - x^*)\rangle, 0\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

$$\begin{aligned}\|y_n - x^*\|^2 &\le \langle (1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Ax_n - Ax^*), J(y_n - x^*)\rangle \\ &\quad +\alpha_n\langle Ax^* - x^*, J(y_n - x^*)\rangle \\ &\le \frac{\|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Ax_n - Ax^*)\|^2 + \|y_n - x^*\|^2}{2} \\ &\quad +\alpha_n\langle Ax^* - x^*, J(y_n - x^*)\rangle \\ &\le \frac{(\|x_n - x^*\| - \alpha_n\varphi(\|x_n - x^*\|))^2 + \|y_n - x^*\|^2}{2} \\ &\quad +\alpha_n\langle Ax^* - x^*, J(y_n - x^*)\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\|y_n - x^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 - 2\alpha_n\varphi(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| + \alpha_n^2(\varphi(\|x_n - x^*\|))^2 + 2\alpha_n\varepsilon_n.$$

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \|y_n - x^*\| \le \|x_n - x^*\|^2 - 2\alpha_n\varphi(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| + \alpha_n(M\alpha_n + 2\varepsilon_n),$$

其中 M 是满足 $M \ge (\varphi(\|x_n - x^*\|))^2$ 的常数. 因此，我们就得到关于 $\lambda_n = \|y_n - x^*\|^2$ 的不等式

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \alpha_n\psi(\lambda_n) + \beta_n,$$

其中 $\psi(t) = 2\sqrt{t}\varphi(\sqrt{t})$ 与 $\beta_n = \alpha_n(M\alpha_n + 2\varepsilon_n)$. 由引理 3.2 就得到 $x_n \to x^* = P(Ax^*)$ 与收敛率估计式. ▌

下面给出满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n - T_m y_n\| = 0$ 的例子.

定理 B[31–32, Corollary 1.1] 一致凸 Banach 空间 E 的非空有界闭凸子集 C 上的非扩张自映射 T 的 Cesàro 均值 $T_n x = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} T^j x$(每个 $x \in C$) 一定满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}\|T_n x - T(T_n x)\| = 0.$$

例子 4.2 对于一致凸 Banach 空间 E 的非空闭有界凸子集 C 上的非扩张自映射 $T(\mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset)$ 的 Cesàro 均值 $T_n x = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} T^j x$(每个 $x \in C$), 若序列 $\{x_n\}$ 由 (3.2) 或 (4.1) 式定义且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_m x_n\| = 0.$$

证 从 C 的有界性，有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - T_n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\alpha_n\|Ax_n - T_n x_n\| = 0.$$

因此，对每个 $m \ge 0$, 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - T_m x_{n+1}\| &\le \|x_{n+1} - T_n x_n\| + \|T_n x_n - T_m(T_n x_n)\| + \|T_m(T_n x_n) - T_m x_{n+1}\| \\ &\le 2\|x_{n+1} - T_n x_n\| + \|T_m(T_n x_n) - T_n x_n\| \\ &\le 2\|x_{n+1} - T_n x_n\| + \sup_{x\in C}\|T_m(T_n x) - T_n x\|.\end{aligned}$$

使用定理 B 即得结论 (参见文献 [12, 15, 18, Example]). ▌

推论 4.3 对于一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸子集 C 上的非扩张自映射 $T(\mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset)$ 的 Cesàro 均值 $T_n x = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} T^j x$(每个 $x \in C$), 若序列 $\{x_n\}$ 由 (3.2) 或 (4.1) 式定义且

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $x^*=P(Ax^*)\in F$, 其中 P 是从 K 到 F 的向阳非扩张收缩映射. 进而, 对 $\psi(t)=2\sqrt{t}\varphi(\sqrt{t})$ 与常数 $M\geq 0$, 存在 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}, k=1,2,\cdots$ 与 $\exists\{\varepsilon_n\}\subset(0,+\infty)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 使得

$$\|x_{n_k}-x^*\|^2\leq\psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}\right),$$

$$\|x_{n_k+1}-x^*\|^2\leq\psi^{-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{n_k}\alpha_m}+M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}\right)+\alpha_{n_k}(M\alpha_{n_k}+2\varepsilon_{n_k}),$$

$$\|x_n-x^*\|^2\leq\|x_{n_k+1}-x^*\|^2-\sum_{m=n_k+1}^{n-1}\frac{\alpha_m}{\theta_m},\ n_k+1<n<n_{k+1},\ \theta_m=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i,$$

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leq\|x_0-x^*\|^2-\sum_{m=0}^{n}\frac{\alpha_m}{\theta_m}\leq\|x_0-x^*\|^2,\ 1\leq n\leq n_k-1,$$

$$1\leq n_k\leq s_{\max}=\max\Big\{s;\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m}{\theta_m}\leq\|x_0-x^*\|^2\Big\}.$$

参 考 文 献

[1] Alber Ya I, Guerre-Delabriere S. Principles of Weakly Contractive Maps in Hilbert Spaces//Gohberg I, Yu Lyubich (Eds). New Results in Operator Theory. Basel: Birkhäuser, 1997

[2] Boyd D W, Wong T S W. On nonlinear contractions. Proc Amer Math Soc, 1969, **20**: 458–464

[3] Kirk W A. Contraction Mapping and Extensions//Kirk W A, Sims B (Eds). Handbook of Metric Fixed Point Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001: 1–32

[4] Rhoades B E. Some theorems on weakly contractive maps. Nonlinear Anal, 2001, **47**: 2683–2693

[5] Chidume C E, Zegeye H, Aneke S J. Approximation of fixed points of weakly contractive nonself maps in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2002, **270**: 189–199

[6] Alber Y, Reich S, Yao J C. Iterative methods for solving fixed-point problems with nonself-mappings in Banach spaces. Abstract Appl Anal, 2003, **4**: 193–216

[7] Zeng L C, Tanaka T, Yao J C. Iterative construction of fixed points of nonself-mappings in Banach spaces. J Comput Appl Math, 2007, **206**: 814–825

[8] Moudafi A. Viscosity approximation methods for fixed-points problems. J Math Anal Appl, 20002, **41**: 46–55

[9] Xu H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J Math Anal Appl, 2004, **298**: 279–291

[10] Song Y, Chen R. Strong convergence theorems on an iterative method for a family of finite nonexpansive mappings. Applied Mathematics and Computation, 2006, **180**: 275–287

[11] Song Y, Chen R. Viscosity approximation methods for nonexpansive nonself-mappings. J Math Anal Appl, 2006, **321**: 316–326

[12] Song Y, Chen R. Iterative approximation to common fixed points of nonexpansive mapping sequences in reflexive Banach spaces. Nonlinear Analysis, 2007, **66**: 591–603

[13] Song Y, Chen R. Convergence theorems of iterative algorithms for continuous pseudocontractive mappings. Nonlinear Anal, 2007, **67**: 486–497

[14] Song Y, Chen R. An approximation method for continuous pseudocontractive mappings. J Inequal Appl, 2006: 1–9

[15] Song Y, Chen R, Zhou H. Viscosity approximation methods for nonexpansive mapping sequences in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 2007, **66**: 1016–1024

[16] Song Y. Iterative approximation to common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings. Applicable Analysis, 2007, **86**(11): 1329–1337

[17] Song Y. Iterative selection methods for the common fixed point problems in a Banach space. Applied Mathematics and Computation, 2007, **193**(1): 7–17

[18] Song Y, Xu S. Strong convergence theorems for nonexpansive semigroup in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2008, **338**: 152–161

[19] Song Y, Chen R. Viscosity approximative methods to Cesaro means for non-expansive mappings. Applied Mathematics and Computation, 2007, **186**: 1120–1128

[20] Suzuki T. Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions. J Math Anal Appl, 2007, **325**: 342–352

[21] Reich S. Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces. J Math Anal Appl, 1973, **44**: 57–70

[22] Kopecká E, Reich S. Nonexpansive retracts in Banach spaces. Banach Center Publications, 2007, **77**: 161–174

[23] Reich S. Approximating zeros of accretive operators. Proc Amer Math Soc, 1975, **51**: 381–384

[24] Megginson R E. An Introduction to Banach Space Theory. New York Inc: Springer-Verlag, 1998

[25] Takahashi W. Nonlinear Functional Analysis–Fixed Point Theory and its Applications. Yokohama: Yokohama Publishers inc, 2000

[26] Istratescu V I. Fixed Point Theory: An Introduction. Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1981

[27] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. Canada: Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons, 1984

[28] Halpern B. Fixed points of nonexpansive maps. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 957–961

[29] Bruck Jr R E. Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1973, **179**: 251–262

[30] Alber Ya I, Iusem A N. Extension of subgradient techniques for nonsmooth optimization in Banach spaces. Set-valued Anal, 2001, **9**(4): 315–335

[31] Bruck R E. A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces. Israel J Math, 1979, **32**: 107–116

[32] Bruck R E. On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces. Israel J Math, 1981, **38**: 304–314

Solving Variational Inequality with Weak Contraction by Using Viscosity Approximation Methods

Song Yisheng Yang Changsen

(*College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Henan Xinxiang 453007*)

Abstract: In this paper, under the framework of a strictly convex Banach space with a uniformly Gâteaux differentiable norm, we study strong convergence of two explicit viscosity approximation methods for finding a solution to the variational inequality with weakly contractive mapping A, and give the estimate of convergence rate.

Key words: Viscosity approximation methods; Nonexpansive mappings sequence; Weak contractions; The estimate of convergence rate; Strictly convex Banach space.

MR(2000) Subject Classification: 47H06; 47J05