2009,**29A**(3):630–642

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

广义 Morrey 空间上带变量核的 Littlewood-Paley 算子 *

陈艳萍
(北京科技大学应用科学学院数力系　北京 100083)
丁勇
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室　北京 100875)

摘要：该文给出了一类带变量核的抛物型 Littlewood-Paley 算子 g_ϕ 在广义 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 作为上述结果的应用，得到了 g_ϕ 与 BMO 函数 $b(x)$ 生成的交换子 $[b,g_\phi]$ 在 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性.

关键词：Littlewood-Paley 算子；变量核；交换子；Morrey 空间.

MR(2000) 主题分类: 42B20; 42B25　**中图分类号**: O174.2　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-630-13

1 引言

令 $1\le p<\infty$. 记

$$\|f\|_{p,\lambda}^p=\sup_{y\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(y,r)}|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

其中 $B(y,r)$ 是以 y 为中心， $r>0$ 为半径的球， $\lambda\in(0,n)$. 令

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p_{\rm loc}:\|f\|_{p,\lambda}<\infty\},$$

那么 $L^{p,\lambda}$ 是以 $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ 为范数的 Banach 空间.

众所周知， 1938 年， Morrey[1] 引入了 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 空间，其空间在研究偏微分方程的局部解中起着非常重要的作用 (可见参考文献 [2–4]). 1991 年， Mizuhara[5] 引入了一类广义的 Morrey 空间 $L^{p,\Phi}$ 并给出了 Hardy-Littlewood 极大算子以及 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在 $L^{p,\Phi}$ 空间上的有界性. 1994 年， Nakai [6] 把文献 [5] 的结果推广到更一般的广义 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$. 2006 年， Softova[7] 给出了带变量核的抛物型奇异积分算子及其交换子在 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 空间上的有界性. 为了给出文献 [7] 的结果，我们给出一些定义.

记 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的单位球面. 令 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为固定的实数，$\alpha_i\ge1$. 对固定的 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 函数 $F(x,\rho)=\sum\limits_{i=1}^n\frac{{x_i}^2}{\rho^{2\alpha_i}}$ 关于 ρ $(\rho>0)$ 是递减函数. 记 $\rho(x)$

收稿日期：2007-09-12; 修订日期：2008-12-12
E-mail: yanpingch@126.com; dingy@bnu.edu.cn
* 基金项目：国家自然科学基金 (10571015, 10826046) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (20050027025) 资助

为方程 $F(x,\rho)=1$ 的唯一解． 1966 年， Fabes 和 Rivière [8] 证明了 $\rho(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数. 对 $\mu>0$ 以及 $x\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 中的伸缩

$$\delta_\mu:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\longrightarrow(\mu^{\alpha_1}x_1,\mu^{\alpha_2}x_2,\cdots,\mu^{\alpha_n}x_n).$$

那么容易得到 $\rho(\delta_\mu x)=\mu\rho(x)$ 以及 $\rho(tx)\le\rho(x)$, $t\le 1$. 而且有下面的极坐标形式 $x=\delta_\rho x'$,$x'\in S^{n-1}$, $\rho=\rho(x)$ 而且 $\mathrm{d}x=\rho^{\alpha-1}J(x')\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\sigma(x')$, 其中 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$, $J(x')$ 是 S^{n-1} 上的 C^∞ 函数，且大于等于 1. Fabes 和 Rivière [8] 首次考虑了抛物型奇异积分算子 T 的 L^p 有界性，其中

$$Tf(x)=\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y)}{\rho(y)^\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y,$$

这里 Ω 满足

$$\Omega(\delta_\mu x)=\Omega(x),\quad\forall\mu>0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

和

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')J(x')\mathrm{d}\sigma(x')=0. \tag{1.2}$$

在文献 [8] 中，他们证明了如果 $\Omega\in C^1(S^{n-1})$ 满足 (1.1) 和 (1.2) 式，那么 T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上有界.

现在给出带变量核的抛物型奇异积分算子及其交换子的定义．设 $\Omega(x,z)$ 满足下列条件

$$\Omega(x,\delta_\mu z)=\Omega(x,z),\ \forall x,\,\forall z\in\mathbb{R}^n,\qquad\forall\mu>0 \tag{1.3}$$

和

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x,z')J(z')\,\mathrm{d}\sigma(z')=0,\forall\ \ x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

那么带变量核的抛物型奇异积分算子定义如下

$$Tf(x)=\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x,x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}f(y)\mathrm{d}y.$$

记 $\mathcal{E}(x,r)=\{y:\rho(x-y)<r\}$ 是以 x 中心半径为 r 的椭球．对局部可积函数 b: $\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$, 设

$$M(b,\mathcal{E})=\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|b(y)-b_{\mathcal{E}}|\mathrm{d}y,$$

其中 $b_{\mathcal{E}}=|\mathcal{E}|^{-1}\int_{\mathcal{E}}b(y)\mathrm{d}y$, 则 $\|b\|_{\mathrm{BMO}}:=\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}M(b,\mathcal{E})<\infty$. 由带变量核的抛物型奇异积分算子和 BMO 函数 b 生成的交换子定义如下

$$[b,T]f(x)=\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x,x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}(b(x)-b(y))f(y)\mathrm{d}y.$$

现在我们来回顾一下广义的 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 的定义．设 ω 是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数且满足下列条件：存在常数 C_1 和 C_2 使得对任意 $r>0$

$$C_1\le\frac{\omega(t)}{\omega(r)}\le C_2,\qquad r\le t\le 2r, \tag{1.5}$$

且

$$\int_r^\infty \frac{\omega(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \le C\frac{\omega(r)}{r^\alpha}. \tag{1.6}$$

那么对任意的 $1<p<\infty$, 广义的 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 定义如下

$$L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{p,\omega}<\infty\},$$

这里

$$\|f\|_{p,\omega}:=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}\left(\frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

注意到当 $\omega(r)\equiv 1$ 时，我们得到 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$, 那么 $\rho(x)=|x|$, $(\mathbb{R}^n,\rho)=(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$, $J\equiv 1$. 当 $\omega(r)=r^\lambda, \lambda\in(0,n)$ 时， $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 恰好就是经典的 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. 对于 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$, 1993 年， Di Fazio 和 Ragusa[2] 证明了如果 $\Omega(x,z)$ 满足 (1.3), (1.4) 式以及对任意的多重指标 β, 有

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \xi'\in S^{n-1}}}|D_\xi^\beta\Omega(x,\xi')|\le C(\beta), \tag{1.7}$$

那么交换子 $[b,T]$ 在 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上有界． 2004 年， Palagachev 和 Softova[4] 把文献 [2] 的结果推广到抛物型的情形． 2006 年， Softova[7] 又把文献 [4] 的结果推广到广义的 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$.

定理 A [7] 设 $\Omega(x,z)$ 满足 (1.3), (1.4) 和 (1.7) 式．如果 ω 满足 (1.5) 和 (1.6) 式，那么 T 在 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)\,(1<p<\infty)$ 上有界．如果 $b\in\mathrm{BMO}$ 以及 $1<p<\infty$, 那么存在常数 $C>0$ 使得对任意 $f\in L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$, $\|[b,T]f\|_{p,\omega}\le C\|b\|_{\rm BMO}\|f\|_{p,\omega}$.

另一方面, 1974 年, Madych [9] 给出了抛物型 Littlewood-Paley 算子 g_ψ 的 $L^p\,(1<p<\infty)$ 有界性，这里

$$g_\psi(f)(x)=\left(\int_0^\infty|\psi_t*f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2},$$

$\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$, 以及 $\psi_t(x)=t^{-\alpha}\psi(\delta_{t^{-1}}x)$, $t>0$. 受文献 [8] 和 [9] 工作的影响，最近， Ding, Xue 和 Yabuta[10] 改进上述的结果．更准确的说，他们证明了如果 $\psi(x)$ 被核函数 $\phi(x)=\Omega(x)\rho(x)^{-\alpha+1}\chi_{\{\rho(x)\le 1\}}(x)$ 代替，抛物型 Littlewood-Paley 算子仍然在 L^p 上有界，其中 $\Omega\in L^q(S^{n-1})\,(q>1)$ 满足 (1.1) 和 (1.2) 式.

定理 B[10] 如果 $\Omega\in L^q(S^{n-1})(q>1)$ 满足 (1.1) 和 (1.2) 式, 那么 g_ϕ 是 (p,p) $1<p<\infty$ 型的.

因此，一个很自然的问题就是带变量核的抛物型 Littlewood-Paley 算子及其交换子在广义的 Morrey 空间 $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ 上是否有类似的结果？在本文中，我们将对上述问题给出肯定的回答.

首先给出带变量核的抛物型 Littlewood-Paley 算子 g_ϕ 及其交换子 $[b,g_\phi]$ 的定义

$$g_\phi(f)(x)=\left\{\int_0^\infty\left|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right\}^{1/2} \tag{1.8}$$

和

$$[b,g_\phi]f(x)=\left\{\int_0^\infty\left|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b(x)-b(y))f(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right\}^{1/2}. \tag{1.9}$$

如果 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, 那么 $\rho(x) = |x|$. g_ϕ 就是经典的带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子 (见文献 [11]). 本文的结果如下.

定理 1 令 $1 < p < \infty$. 设 $\Omega(x, z)$ 满足 (1.3), (1.4) 和 (1.7) 式. 如果 ω 满足 (1.5) 和 (1.6) 式，那么存在常数 $C > 0$ 使得对任意的 $f \in L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$, $\|g_\phi(f)\|_{p,\omega} \le C\|f\|_{p,\omega}$.

定理 2 在定理 1 相同的条件下以及 $b \in \mathrm{BMO}$. 那么存在常数 $C > 0$ 使得对任意的 $f \in L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$, $\|[b, g_\phi]f\|_{p,\omega} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{p,\omega}$.

注 定理 1 和 2 推广了定理 A. 特别地，我们的结果在 $\rho(x) = |x|$ 这种情况下仍然是新的.

对 $p \ge 1$, p' 表示 p 的共轭指标，即 $p' = p/(p-1)$.

2 引理

对任意给定的可测函数 $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, Hardy-Littlewood 极大算子 M 以及 sharp 极大算子 $f^\sharp$ 定义如下

$$Mf(x) = \sup_{\mathcal{E} \ni x} \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} |f(y)| \mathrm{d}y$$

和

$$f^\sharp(x) = \sup_{\mathcal{E} \ni x} \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} |f(y) - f_{\mathcal{E}}| \mathrm{d}y.$$

定义算子 $M_q f(x) := (M(|f|^q)(x))^{1/q}$, $1 \le q < \infty$.

记 H_m 为 n - 维 m 阶球调和函数组成的空间，且其空间的维数 $d_m = \dim H_m$. 由文献 [12] 知

$$d_m \le C(n) m^{n-2}, \quad m \ge 1. \tag{2.1}$$

令 $\{Y_{m,s}(x')\}_{s=1}^{d_m}$ 为 H_m 的正交基. 那么 $\{Y_{m,s}(x')\}_{s=1}^{d_m}$ $(m = 0, 1, \cdots)$ 是 $L^2(S^{n-1})$ 的完备正交系，且对任意的多重指标 β (可见文献 [13])

$$\sup_{x' \in S^{n-1}} |D_{x'}^\beta Y_{m,s}(x')| \le C(n) m^{|\beta| + (n-2)/2}, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{2.2}$$

如果 $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$, 那么 $\sum_m \sum_s a_{m,s} Y_{m,s}(x')$ 是 $\phi(x')$ 关于 $\{Y_{m,s}(x')\}_{m,s}$ 的 Fourier 展开. 这里

$$a_{m,s} = \int_{S^{n-1}} \phi(y') Y_{m,s}(y') \, \mathrm{d}\sigma(y'),$$

且 (见文献 [13])

$$|a_{m,s}| \le C(n, l) m^{-2l} \sup_{|\beta| = 2l} \sup_{y' \in S^{n-1}} |D_{y'}^\beta \phi(y')|, \tag{2.3}$$

对任意正整数 l 都成立.

引理 2.1[6] 令 $1 < p < \infty$. 如果 ω 满足 (1.5) 和 (1.6) 式，对 $1 \le q < p < \infty$, 存在常数 $C_{p,q}$ 使得对 $f \in L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|M_q f\|_{p,\omega} \le C_{p,q} \|f\|_{p,\omega}.$$

引理 2.2[7] 令 $0 < \nu < 1$. 如果 ω 满足 (1.5) 式和

$$\int_r^\infty \frac{\omega(t)}{t^{\nu\alpha + 1}} \mathrm{d}t \le C \frac{\omega(r)}{r^{\nu\alpha}}, \tag{2.4}$$

那么对 $1<p<\infty$, 存在与 f 无关的常数 C 使得 $\|f\|_{p,\omega}\le C\|f^\sharp\|_{p,\omega}$.

注 如果 ω 满足 (1.6) 式，由文献 [6] 中的引理，可知存在 $0<\varepsilon<\alpha$ 使得

$$\int_r^\infty \frac{\omega(t)}{t^{\alpha-\varepsilon+1}}\mathrm{d}t\le C\frac{\omega(r)}{r^{\alpha-\varepsilon}}.$$

令 $\nu=\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha}$. 很显然 $0<\nu<1$ 且 ω 满足 (2.4) 式. 因此引理 2.2 在条件 (1.5) 和 (1.6) 下也是成立的.

引理 2.3[4] 令 $f\in\mathrm{BMO}$ 且 $1\le p<\infty$, 那么对任意的椭球 $\mathcal{E}$, 有

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|f(y)-f_{\mathcal{E}}|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

引理 2.4 设 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(x_0,r)$. 令 $\gamma>0$, 那么对任意 $x\in\mathcal{E}$ 以及 $y\in(2\mathcal{E})^c$, 有

$$\left|\frac{1}{\rho(x-y)^\gamma}-\frac{1}{\rho(x_0-y)^\gamma}\right|\le 2(2^\gamma-1)\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(y-x_0)^{\gamma+1}}$$

(对 $a>0$, $a\mathcal{E}=\{y:\rho(y-x_0)<ar\}$).

证 由 $x\in\mathcal{E}$ 和 $y\in(2\mathcal{E})^c$, 有 $1/2<\frac{\rho(x-y)}{\rho(x_0-y)}<3/2$. 利用 $t^{-\gamma}$ 的凸性得

$$\frac{1-(1/2)^{-\gamma}}{1-1/2}\le\frac{1-t^{-\gamma}}{1-t}\quad,\ 1/2<t<1$$

以及

$$\frac{1-(1/2)^{-\gamma}}{1-1/2}\le\frac{1-t^{-\gamma}}{1-t}\quad,\ 1<t,$$

因此有

$$|1-t^{-\gamma}|\le 2(2^\gamma-1)|1-t|\quad,\ t>1/2.$$

因此，对 $x\in\mathcal{E}$ 和 $y\in(2\mathcal{E})^c$ 有

$$\left|\frac{1}{\rho(x_0-y)^\gamma}-\frac{1}{\rho(x-y)^\gamma}\right|\le 2(2^\gamma-1)\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\gamma+1}}.$$

▌

引理 2.5 设 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(x_0,r)$. 令 $\gamma>0$, 那么

$$\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^\gamma}-\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^\gamma}\right|\le Cm^{n/2}\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(y-x_0)^{\gamma+1}},$$

这里 $x\in\mathcal{E}$, $y\in(2\mathcal{E})^c$, $x'=(\frac{x_1}{\rho(x)^{\alpha_1}},\cdots,\frac{x_n}{\rho(x)^{\alpha_n}})$.

证

$$\begin{aligned}&\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^\gamma}-\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^\gamma}\right|\\ \le&\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')}\right|\left|\frac{1}{\rho(x-y)^\gamma}-\frac{1}{\rho(x_0-y)^\gamma}\right|\\ &+\frac{1}{\rho(x_0-y)^\gamma}\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')-Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x-y)')}\right|\\ &+\frac{1}{\rho(x_0-y)^\gamma}\frac{|Y_{m,s}((x_0-y)')||J((x-y)')-J((x_0-y)')|}{|J((x-y)')J((x_0-y)')|}\\ :=&I+II+III.\end{aligned}$$

因为 $J(x')\geq 1$, 由 (2.2) 式以及引理 2.4, 我们得

$$I\leq Cm^{n/2-1}\frac{\rho(x_0-x)}{\rho(x_0-y)^{\gamma+1}}.$$

接下来，利用中值定理 (以及 (2.2) 式) 得

$$|Y_{m,s}((x-y)')-Y_{m,s}((x_0-y)')|\leq C_1m^{n/2}|(x-y)'-(x_0-y)'|,$$

$$|J((x-y)')-J((x_0-y)')|\leq C_2|(x-y)'-(x_0-y)'|.$$

因为 $x\in\mathcal{E}$, $y\in(2\mathcal{E})^c$, 那么由 $\rho(x-y)>\frac{\rho(x_0-y)}{2}$, 以及引理 2.4 得

$$|\rho(x_0-y)^{-\alpha_j}-\rho(x-y)^{-\alpha_j}|\leq C\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\alpha_j+1}}.$$

因此得

$$\begin{aligned}
&|(x-y)'-(x_0-y)'|\\
&=|\delta_{\rho(x-y)^{-1}}(x-y)-\delta_{\rho(x_0-y)^{-1}}(x_0-y)|\\
&\leq|\delta_{\rho(x-y)^{-1}}(x-y)-\delta_{\rho(x-y)^{-1}}(x_0-y)|+|\delta_{\rho(x-y)^{-1}}(x_0-y)-\delta_{\rho(x_0-y)^{-1}}(x_0-y)|\\
&=|\delta_{\rho(x-y)^{-1}}(x-x_0)|+\left[\sum_{j=1}^{n}(x_{0j}-y_j)^2\left(\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha_j}}-\frac{1}{\rho(x_0-y)^{\alpha_j}}\right)^2\right]^{1/2}\\
&\leq\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x-y)}+\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_{0j}-y_j)^2}{\rho(x_0-y)^{2\alpha_j}}\rho(x_0-y)^{2\alpha_j}\left(\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha_j}}-\frac{1}{\rho(x_0-y)^{\alpha_j}}\right)^2\right]^{1/2}\\
&\leq\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x-y)}+\max_j\rho(x_0-y)^{\alpha_j}\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha_j}}-\frac{1}{\rho(x_0-y)^{\alpha_j}}\right|\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_{0j}-y_j)^2}{\rho(x_0-y)^{2\alpha_j}}\right)^{1/2}\\
&\leq 2\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)}+\max_j\rho(x_0-y)^{\alpha_j}\frac{C\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\alpha_j+1}}\\
&\leq C\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)}.
\end{aligned}$$

由 $J(x')\geq 1$ 和 (2.2) 式，得到

$$II+III\leq Cm^{n/2}\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\gamma+1}}.$$

▮

3　定理 1 的证明

对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 由 (1.4) 式和 $J(y')\in C^\infty(S^{n-1})$, 我们有

$$J(y')\Omega(x,y')=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{d_m}a_{m,s}(x)Y_{m,s}(y').$$

这里

$$a_{m,s}(x)=\int_{S^{n-1}}\Omega(x,y')J(y')Y_{m,s}(y')\,\mathrm{d}\sigma(y').$$

因此得

$$\Omega(x,y')=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{d_m}a_{m,s}(x)\frac{Y_{m,s}(y')}{J(y')}.$$

由 (1.7) 和 (2.3) 式，对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|a_{m,s}(x)|\le C(n,l)m^{-2l}, \tag{3.1}$$

对任意 $l>1$ 都成立，那么我们固定 $l=n$. 由 Hölder's 不等式， (2.1) 以及 (3.1) 式得

$$\begin{aligned}
g_\phi(f)(x)&=\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{d_m}a_{m,s}(x)\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&\le\bigg\{\int_0^\infty\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}\bigg)\sum_{m=1}^{\infty}m^2\bigg(\sum_{s=1}^{d_m}|a_{m,s}(x)|\\
&\quad\times\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|\bigg)^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&\le C\bigg\{\int_0^\infty\sum_{m=1}^{\infty}m^2\sum_{s=1}^{d_m}|a_{m,s}(x)|^2\\
&\quad\times\sum_{s=1}^{d_m}\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&\le C\bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}m^{-3n}\sum_{s=1}^{d_m}\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&=C\bigg\{\sum_{m=1}^{\infty}m^{-3n}\sum_{s=1}^{d_m}(g_{m,s}(f)(x))^2\bigg\}^{1/2}\\
&\le C\sum_{m=1}^{\infty}m^{-3n/2}\sum_{s=1}^{d_m}|g_{m,s}(f)(x)|.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

这里

$$g_{m,s}(f)(x)=\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}.$$

容易知道 $\Omega_{m,s}(x)=\frac{Y_{m,s}}{J}(x')$ 满足下面性质

$$\int_{S^{n-1}}\Omega_{m,s}(x')J(x')\,\mathrm{d}\sigma(x')=0 \tag{3.3}$$

以及

$$\Omega_{m,s}(\delta_\lambda x)=\Omega_{m,s}(x),\quad \forall\lambda>0. \tag{3.4}$$

而且， $\Omega_{m,s}\in L^2(S^{n-1})$. 那么由定理 B, 我们得 $1<p<\infty$,

$$\|g_{m,s}(f)\|_p\le C\|f\|_p, \tag{3.5}$$

这里 C 与 f, m, s 无关. 现在我们断言抛物型 Littlewood-Paley 算子 $g_{m,s}$ 的 sharp 函数满足

$$(g_{m,s}(f))^\sharp(x)\le Cm^{n/2}(M(|f|^p)(x))^{1/p}, \tag{3.6}$$

其中 C 只依赖于 n, p 和 α, 与 f 无关.

固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 设 $\mathcal{E}$ 是以 x_0 为中心，半径为 r 的椭球．记 $f = f\chi_{2\mathcal{E}} + f\chi_{(2\mathcal{E})^c} = f_1 + f_2$, χ 表示特征函数．现在我们考虑下面的表达式

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}f(x)-(g_{m,s}f)_{\mathcal{E}}|\mathrm{d}x \le\ & \frac{C}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}f_1(x)|\mathrm{d}x + \frac{C}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}f_2(x)-g_{m,s}f_2(x_0)|\mathrm{d}x \\ =:\ & I_1(x_0,\mathcal{E}) + I_2(x_0,\mathcal{E}).\end{aligned}$$

由 (3.5) 式，得

$$\begin{aligned}I_1(x_0,\mathcal{E}) &\le \frac{C}{|\mathcal{E}|}\Big(\int_{\mathcal{E}}\mathrm{d}x\Big)^{1/p'}\Big(\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}f_1(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\ &\le C|\mathcal{E}|^{-1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le C(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.\end{aligned}$$

考虑 $I_2(x_0,\mathcal{E})$. 由于 $x\in\mathcal{E}$, 那么利用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}|g_{m,s}f_2(x)-g_{m,s}f_2(x_0)| \le\ & \Big\{\int_0^\infty\Big|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f_2(y)\mathrm{d}y \\ & -\int_{\rho(x_0-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}f_2(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}y\Big|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big\}^{1/2} \\ \le\ & \Big\{\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\rho(x-y)\ge t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}f_2(y)\mathrm{d}y\Big|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big\}^{1/2} \\ & +\Big\{\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\ge t}}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f_2(y)\mathrm{d}y\Big|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big\}^{1/2} \\ & +\Big\{\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\Big(\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}} \\ & -\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\Big)f_2(y)\mathrm{d}y\Big|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big\}^{1/2} \\ :=\ & D_1+D_2+D_3.\end{aligned}$$

因为 $J(x')\ge 1$, 由 (2.2) 式我们得到

$$\begin{aligned}D_1 &\le Cm^{n/2-1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_2(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\Big(\int_{\substack{\rho(x_0-y)\le t\\ \rho(x-y)\ge t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big)^{1/2}\mathrm{d}y \\ &\le Cm^{n/2-1}\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\big|\rho(x_0-y)^{-2}-\rho(x-y)^{-2}\big|^{1/2}\mathrm{d}y \\ &\le Cm^{n/2-1}r^{1/2}\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y \\ &= Cm^{n/2-1}r^{1/2}\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}\mathcal{E}\setminus 2^k\mathcal{E}}\frac{|f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y \\ &\le Cm^{n/2-1}r^{1/2}\sum_{k=1}^\infty\frac{(2^{k+1}r)^\alpha}{(2^kr)^{\alpha+1/2}}\Big(\frac{1}{|2^{k+1}\mathcal{E}|}\int_{2^{k+1}\mathcal{E}}|f(y)|^p\mathrm{d}y\Big)^{1/p} \\ &\le Cm^{n/2-1}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.\end{aligned}$$

实际上，上面的估计利用了引理 2.4. 类似地，我们得到

$$D_2 \le Cm^{n/2-1}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

关于 D_3, 由引理 2.5, 得

$$\begin{aligned} D_3 \le& \int_{(2\mathcal{E})^c}\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}-\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\right| \\ &\times|f(y)|\bigg\{\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\mathrm{d}y \\ \le& Cm^{n/2}\int_{(2\mathcal{E})^c}|f(y)|\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y \le Cm^{n/2}r\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

类似 D_1 的证明得

$$D_3 \le Cm^{n/2}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

结合 D_1, D_2 和 D_3, 得

$$I_2(x_0,\mathcal{E}) \le Cm^{n/2}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

因此由 $I_1(x_0,\mathcal{E})$ 和 $I_2(x_0,\mathcal{E})$ 的估计得到 (3.6) 式.

现在证明抛物型 Littlewood-Paley 算子 $g_{m,s}$ 满足

$$\|g_{m,s}(f)\|_{p,\omega} \le Cm^{n/2}\|f\|_{p,\omega}, \tag{3.7}$$

其中常数 C 只依赖 n, p 和 α. 实际上，对任意 $p>1$ 以及 $q\in(1,p)$, 由 (3.6) 式和引理 2.1, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}|(g_{m,s}f)^\sharp(y)|^p\mathrm{d}y \le& Cm^{pn/2}\frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}(M(|f|^q)(y))^{p/q}\mathrm{d}y \\ \le& Cm^{pn/2}\|f\|_{p,\omega}^p. \end{aligned}$$

由上面的估计和引理 2.2 得 (3.7) 式. 最后，由 (3.2), (3.7) 式和 Minkowski 不等式，我们得到

$$\|g_\phi(f)\|_{p,\omega} \le C\sum_{m=1}^\infty m^{-2}\|f\|_{p,\omega} \le C\|f\|_{p,\omega}.$$

定理 1 证毕.

4 定理 2 的证明

类似 (3.2) 式的证明，我们得到

$$[b,g_\phi]f(x) \le C\sum_{m=1}^\infty m^{-3n/2}\sum_{s=1}^{d_m}|[b,g_{m,s}]f(x)|, \tag{4.1}$$

其中

$$[b,g_{m,s}]f(x)=\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b(x)-b(y))f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}.$$

我们首先证明

$$([b,g_{m,s}]f)^\sharp(x)\le C\|b\|_{\rm BMO}\big((M(|g_{m,s}(f)|^p)(x))^{1/p}+m^{n/2}(M(|f|^p)(x))^{1/p}\big). \tag{4.2}$$

对任意固定的椭球 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(x_0,r)$, 记 $f=f\chi_{2\mathcal{E}}+f\chi_{(2\mathcal{E})^c}=:f_1+f_2$. 由 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}
&[b,g_{m,s}]f(x)\\
\le\ &|b(x)-b_{\mathcal{E}}|\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}f(y){\rm d}y\bigg|^2\frac{{\rm d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&+\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_1(y){\rm d}y\bigg|^2\frac{{\rm d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&+\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y){\rm d}y\bigg|^2\frac{{\rm d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
=\ &|b(x)-b_{\mathcal{E}}|g_{m,s}f(x)+g_{m,s}((b-b_{\mathcal{E}})f_1)(x)+g_{m,s}((b-b_{\mathcal{E}})f_2)(x)\\
=:\ &A_1(x)+A_2(x)+A_3(x).
\end{aligned}$$

继续之前我们先回顾下面的不等式 (参见文献 [7])

$$|b_{2\mathcal{E}}-b_{\mathcal{E}}|\le C(\alpha)\|b\|_{\rm BMO} \tag{4.3}$$

和

$$|b_{2^k\mathcal{E}}-b_{\mathcal{E}}|\le C(\alpha)k\|b\|_{\rm BMO}. \tag{4.4}$$

首先，由引理 2.3 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_1(x)-(A_1)_{\mathcal{E}}|{\rm d}x&\le\frac{2}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|b(x)-b_{\mathcal{E}}||g_{m,s}f(x)|{\rm d}x\\
&\le C\|b\|_{\rm BMO}(M(|g_{m,s}f|^p)(x_0))^{1/p}.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

现在，对任意 $p>1$ 以及 $q\in(1,p)$, 由 (3.5) 式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_2(x)-(A_2)_{\mathcal{E}}|{\rm d}x&\le\frac{2}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}(b-b_{\mathcal{E}})f_1(x)|{\rm d}x\\
&\le\frac{C}{|\mathcal{E}|}\bigg(\int_{\mathcal{E}}|g_{m,s}(b-b_{\mathcal{E}})f_1(x)|^q{\rm d}x\bigg)^{1/q}\bigg(\int_{\mathcal{E}}{\rm d}x\bigg)^{1/q'}\\
&\le C|\mathcal{E}|^{-1/q}\bigg(\int_{2\mathcal{E}}|f(y)|^p\bigg)^{1/p}\bigg(\int_{2\mathcal{E}}|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{pq/(p-q)}{\rm d}y\bigg)^{(p-q)/pq}.
\end{aligned}$$

而且，由 (4.3) 式和引理 2.3 得

$$\begin{aligned}
\int_{2\mathcal{E}}|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{pq/(p-q)}{\rm d}y&\le C\bigg(\int_{2\mathcal{E}}|b(y)-b_{2\mathcal{E}}|^{pq/(p-q)}{\rm d}y+\int_{2\mathcal{E}}|b_{2\mathcal{E}}-b_{\mathcal{E}}|^{pq/(p-q)}{\rm d}y\bigg)\\
&\le C\bigg(|2\mathcal{E}|\frac{1}{|2\mathcal{E}|}\int_{2\mathcal{E}}|b(y)-b_{2\mathcal{E}}|^{pq/(p-q)}{\rm d}y+|2\mathcal{E}|\|b\|_{\rm BMO}^{pq/(p-q)}\bigg)\\
&\le C|2\mathcal{E}|\|b\|_{\rm BMO}^{pq/(p-q)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_2(x)-(A_2)_{\mathcal{E}}|{\rm d}x&\le C\|b\|_{\rm BMO}\bigg(\frac{1}{|2\mathcal{E}|}\int_{2\mathcal{E}}|f(y)|^p\bigg)^{1/p}\\
&\le C\|b\|_{\rm BMO}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.
\end{aligned}\tag{4.6}$$

对 $A_3(x)$, 注意到

$$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_3(x)-(A_3)_{\mathcal{E}}|\mathrm{d}x \le \frac{2}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_3(x)-A_3(x_0)|\mathrm{d}x.$$

另一方面，由 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}
&|A_3(x)-A_3(x_0)|\\
\le&\ \bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\rho(x-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\\
&-\int_{\rho(x_0-y)\le t}\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
\le&\ \bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{\rho(x-y)\ge t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&+\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\ge t}}\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
&+\bigg\{\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\bigg(\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}-\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\bigg)\\
&\times(b_{\mathcal{E}}-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg\}^{1/2}\\
:=&\ K_1+K_2+K_3.
\end{aligned}$$

因为 $J(x')\ge 1$, 由 (2.2) 式和引理 2.4 得

$$\begin{aligned}
K_1&\le Cm^{n/2-1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f_2(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\bigg(\int_{\substack{\rho(x_0-y)\le t\\ \rho(x-y)\ge t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{1/2}\mathrm{d}y\\
&\le Cm^{n/2-1}\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\big|\rho(x_0-y)^{-2}-\rho(x-y)^{-2}\big|^{1/2}\mathrm{d}y\\
&\le Cm^{n/2-1}r^{1/2}\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y\\
&\le Cm^{n/2-1}r^{1/2}\bigg(\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|f(y)|^p}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y\bigg)^{1/p}\bigg(\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{p'}}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y\bigg)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

由

$$\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|f(y)|^p}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y\le C\frac{2^\alpha}{r^{1/2}}M(|f|^p)(x_0),$$

(3.11) 式和引理 2.3 得

$$\begin{aligned}
\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{p'}}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y&=\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}\mathcal{E}\backslash 2^k\mathcal{E}}\frac{|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{p'}}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1/2}}\mathrm{d}y\\
&\le\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2^kr)^{\alpha+1/2}}\int_{2^{k+1}\mathcal{E}}|b(y)-b_{\mathcal{E}}|^{p'}\mathrm{d}y\\
&\le C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2^kr)^{\alpha+1/2}}k^{p'}|2^{k+1}\mathcal{E}|\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{p'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le C\frac{2^\alpha}{r^{1/2}}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{p'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{p'}}{2^{k/2}}\\&\le Cr^{-1/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{p'},\end{aligned}$$

因此得到

$$K_1\le Cm^{n/2-1}\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

同理，我们可以得

$$K_2\le Cm^{n/2-1}\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

关于 K_3, 由引理 2.5 得

$$\begin{aligned}K_3\le&\int_{(2\mathcal{E})^c}\left|\frac{Y_{m,s}((x-y)')}{J((x-y)')\rho(x-y)^{\alpha-1}}-\frac{Y_{m,s}((x_0-y)')}{J((x_0-y)')\rho(x_0-y)^{\alpha-1}}\right|\\&\times|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f(y)|\left\{\int_{\substack{\rho(x-y)\le t\\ \rho(x_0-y)\le t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right\}^{1/2}\mathrm{d}y\\ \le& Cm^{n/2}\int_{(2\mathcal{E})^c}|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f(y)|\frac{\rho(x-x_0)}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\\ \le& Cm^{n/2}r\int_{(2\mathcal{E})^c}\frac{|b_{\mathcal{E}}-b(y)||f(y)|}{\rho(x_0-y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

类似于 K_1 的估计得

$$K_3\le Cm^{n/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}.$$

结合 K_1, K_2 和 K_3, 得

$$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\int_{\mathcal{E}}|A_3(x)-(A_3)_{\mathcal{E}}|\mathrm{d}x\le Cm^{n/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}(M(|f|^p)(x_0))^{1/p}. \tag{4.7}$$

因此，由 (4.5), (4.6) 和 (4.7) 式得 (4.2) 式．下面我们将证明交换子 $[b,g_{m,s}]$ 满足

$$\|[b,g_{m,s}]f\|_{p,\omega}\le Cm^{n/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{p,\omega}. \tag{4.8}$$

其中常数 C 与 f 无关．实际上，对任意 $p>1$ 和 $q\in(1,p)$, 由 (3.7), (4.2) 式和引理 2.1, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}|(([b,g_{m,s}]f)^\sharp(y)|^p\mathrm{d}y\\ \le& Cm^{pn/2}\frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}(M(|f|^q)(y))^{p/q}\mathrm{d}y+C\frac{1}{\omega(r)}\int_{\mathcal{E}(x,r)}(M(|g_{m,s}f|^q)(y))^{p/q}\mathrm{d}y\\ \le& Cm^{pn/2}\||f|^q\|_{p/q,\omega}^{p/q}+C\||g_{m,s}f|^q\|_{p/q,\omega}^{p/q}\\ \le& Cm^{pn/2}\|f\|_{p,\omega}^p.\end{aligned}$$

由上式和引理 2.2 立刻得到 (4.8) 式．最后，由 (4.1), (4.8) 式以及 Minkowski 不等式，有

$$\|[b,g_\phi]f\|_{p,\omega}\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{p,\omega}.$$

定理 2 证毕.

参 考 文 献

[1] Morrey C. On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations. Trans Amer Math Soc, 1938, **43**: 126–166

[2] Di Fazio G, Ragusa M A. Interior estimates in morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. J of Funct Analysis, 1993, **112**: 241–256

[3] Mazzucato A. Besov-Morrey spaces: functions space theory and applications to non-linear PDE. Trans Amer Math Soc, 2002, **355**: 1297–1364

[4] Palagachev D, Softova L. Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's. Potential Analysis, 2004, **20**: 237–263

[5] Mizuhara T. Boundedness of Some Classical Operators on Generalized Morrey Spaces. Harmonic Analysis, ICM-90 Satellite Conf Proc S Igari (ED). Tokyo: Springer-Verlag, 1991

[6] Nakai E. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math Nachr, 1994, **166**: 95–103

[7] Softova L. Singular integrals and commutators in generalized Morrey spaces. Acta Math Sin (Engl Ser), 2006, **22**: 757–766

[8] Fabes E, Rivière N. Singular integrals with mixed homogeneity. Studia Math, 1966, **27**: 19–38

[9] Madych W R. On Littlewood-Paley functions. Studia Math, 1974, **50**: 43–63

[10] Ding Y, Xue Q, Yabuta K. Parabolic Littlewood-Paley g-function with rough kernels. Acta Math Sinica (English Serise), 2008, **24**: 2049–2060

[11] Ding Y, Lin C, Shao S. On the Marcinkiwicz integral with variable kernel. Indiana Univ Math J, 2004, **7**: 805–821

[12] Calderón A, Zygmund A. On singular integrals with variable kernels. Applicable Anal, 1977/78, **7**: 221–238

[13] Calderón A, Zygmund A. Singular integral operators and differential equations. Amer J Math, 1957, **79**: 901–921

Littlewood-Paley Operator with Variable Kernel in Generalized Morrey Spaces

Chen Yanping

(*Department of Mathematics and Mechanics, Applied Science School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083*)

Ding Yong

(*School of Mathematics, Laboratory of Mathematics and Complex Systems (BNU) Ministry of Education, China, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

Abstract: In this paper the authors study the boundedness for a class of parabolic Littlewood-Paley operator g_ϕ with variable kernels in generalized Morrey spaces $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$. As an application of the above result, the boundeness of the commutator $[b, g_\phi]$, formed by g_ϕ and a BMO$(\mathbb{R}^n)$ function $b(x)$ in $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ is also obtained.

Key words: Littlewood-Paley operator; Variable kernel; Commutator; Morrey space.

MR(2000) Subject Classification: 42B20; 42B25