数学物理学报 Acta Mathematica Scientia
2009,**29A**(4):969–973
http://actams.wipm.ac.cn

广义微分二次量子化算子 *

王湘君　曹雪莲
(华中科技大学数学与统计学院　武汉 430074)

摘要: 该文对任一从 E_c 到 E_c^* 的连续线性算子定义了其广义微分二次量子化算子, 由 Schwartz 核定理得到其 Fock 展开, 并用张量积的缩合给出复合算子的微分二次量子化算子.

关键词: 微分二次量子化; 广义算子; 白噪声分析.

MR(2000) 主题分类: 60H40; 81S25　**中图分类号**: O211.6　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)04-969-05

1　引言

量子力学中, 用 Hilbert 空间 H 中的单位矢量来表示粒子状态, H 上的自伴算子来表示力学量的方法称为一次量子化; 使波场量子化的方法称为二次量子化 [1], 它能够更方便地描述多粒子态, 例如用对称 Fock 空间 [2] 来描述全同玻色子系统. 所谓微分二次量子化是指一种从 H 上的算子出发来构造对称 Fock 空间上的算子的方法, 物理中称之为二次量子化. 实际上, 物理文献中使用的大量算子并不是 H 中的有界线性算子, 导致其二次量子化算子没有严格的数学定义. Hida 于 1975 年创立的白噪声分析 [3] 为我们提供了一个合适的框架. 在该框架下, Obata[4] 首先对从 E_c 到 E_c 的连续线性算子定义了其微分二次量子化算子. 本文沿用 Obata 给出的定义, 讨论了更一般的从 E_c 到 E_c^* 的连续线性算子的微分二次量子化算子.

本文符号说明如下 (详细可参考文献 [4]).

$H=L^2(R^3)$, 其中范数记为 $|\cdot|_0$. T 是简单谐振子, 其特征值和正交特征向量记为 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ 和 $\{e_j\}_{j=0}^{\infty}$, 且 $\{e_j\}_{j=0}^{\infty}$ 构成 H 的一组完备正交基. 假定 $1<\lambda_0\le\lambda_1\le\cdots\to+\infty$, 定义

$$\delta=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}},\qquad \rho=\lambda_0^{-1},\tag{1.1}$$

显然 $0<\rho<1, \rho<\delta<\infty$. $E\hookrightarrow H\hookrightarrow E^*$ 为 (H,T) 标准构造得到的 Gelfand 三元组. 且有

$$\forall p\in R,\quad |\xi|_p=|T^p\xi|_0;\qquad \forall q\ge 0,\quad |\xi|_p\le\rho^q|\xi|_{p+q}.\tag{1.2}$$

收稿日期: 2007-04-18; 修订日期: 2008-04-03
E-mail: x.j.wang@163.com; hustcxl@163.com
* 基金项目: 国家自然科学基金 (10571065) 资助

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $E_c^*\times E_c$ 上的典则双线性型. $(E)\hookrightarrow(L^2)=L^2(E^*,\mu;C)\hookrightarrow(E)^*$ 是经典白噪声分析的标准框架. $\|\cdot\|$ 表示其中范数. $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 表示 $(E)^*\times(E)$ 上的典则双线性型. 由 Wiener-Itô-Segal 同构, $\phi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\langle :x^{\otimes n}:,f_n\rangle$, $\forall x\in E^*$, 记为 $\phi\sim\{f_n\}$.

$$\phi\in(E)^*,\exists p\geq 0,\|\phi\|_{-p}^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_{-p}^2\Longleftrightarrow f_n\in(E_c^{\hat{\otimes}n})^*,\exists p\geq 0,\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_{-p}^2<\infty.$$

$$\phi\in(E),\forall p\in R,\|\phi\|_p^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_p^2\Longleftrightarrow f_n\in E_c^{\hat{\otimes}n},\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_p^2<\infty,\forall p\geq 0. \tag{1.3}$$

广义算子 [5] 是指从 (E) 到 $(E)^*$ 上的连续线性算子, 其全体记为 $\text{Ł}((E),(E)^*)$. 对任一从 E_c 到 E_c^* 上的连续线性算子 A, 即 $A\in\text{Ł}(E_c,E_c^*)$, A^* 表示 A 的共轭, 由下式唯一确定

$$\langle A\xi,\eta\rangle=\langle\xi,A^*\eta\rangle,\qquad\forall\xi,\eta\in E_c. \tag{1.4}$$

本文用到如下引理.

引理 1.1[6] (Schwartz 核定理)

$$\text{Ł}(E_c,E_c^*)\cong E_c^*\otimes E_c^*,\qquad \text{Ł}(E_c,E_c)\cong E_c\otimes E_c^*. \tag{1.5}$$

引理 1.2[4] (广义算子的 Fock 展开) 对任一 $\Xi\in\text{Ł}((E),(E)^*)$, 存在唯一核分布 $\{k_{l,m}\}_{l,m=0}^{\infty}$, $k_{l,m}\in(E_c^{\hat{\otimes}(l+m)})^*$ 满足

$$\Xi\phi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\Xi_{l,m}(k_{l,m})\phi,\qquad\forall\phi\in(E). \tag{1.6}$$

其中 $\Xi_{l,m}(k_{l,m})$ 为积分核算子, (1.6) 式右端在 $(E)^*$ 中收敛. 若 $\Xi\in\text{Ł}((E),(E))$, 则 $k_{l,m}\in(E_c^{\hat{\otimes}l})\otimes(E_c^{\hat{\otimes}m})^*$, (1.6) 式右端在 (E) 中收敛.

引理 1.3[4] 对 $\Xi\in\text{Ł}((E),(E)^*)$, 定义一个 $E_c\times E_c$ 上的函数 $\hat{\Xi}$ 如下

$$\hat{\Xi}(\xi,\eta)=\langle\langle\Xi\phi_\xi,\phi_\eta\rangle\rangle,\qquad\forall\xi,\eta\in E_c, \tag{1.7}$$

称 $\hat{\Xi}$ 为 Ξ 的算子象征. 特别地, 有

$$\hat{\Xi}_{l,m}(k_{l,m})(\xi,\eta)=\langle k_{l,m},\eta^{\otimes l}\otimes\xi^{\otimes m}\rangle\mathrm{e}^{\langle\xi,\eta\rangle}. \tag{1.8}$$

本文第 2 节定义了 $A\in\text{Ł}(E_c,E_c^*)$ 的微分二次量子化算子 $\mathrm{d}\Gamma(A)$, 并证明 $\mathrm{d}\Gamma(A)$ 是一个广义算子, 由 Schwartz 核定理得到其 Fock 展开; 第 3 节定义了广义函数张量积的缩合, 并用这种缩合给出复合算子的微分二次量子化算子.

2 广义微分二次量子化算子

对任一 $A\in\text{Ł}(E_c,E_c^*)$, 我们沿用 $A\in\text{Ł}(E_c,E_c)$ 的微分二次量子化算子的定义 [4].

定义 2.1 $\forall A\in\text{Ł}(E_c,E_c^*)$, 记

$$A^{(n)}=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n-1}I^{\otimes k}\otimes A\otimes I^{\otimes(n-1-k)}, & n\geq 0,\\ 0, & n=0.\end{cases}$$

$\forall\phi\sim\{f_n\}, f_n\in E_c^{\hat{\otimes}n}$, 令 $\mathrm{d}\Gamma(A)\phi\sim\{A^{(n)}f_n\}$, 称 $\mathrm{d}\Gamma(A)$ 为 A 的广义微分二次量子化算子.

当 $A\in Ł(E_c,E_c)$ 时，由以上定义得到的 $\mathrm{d}\Gamma(A)\in Ł((E),(E))$. 当 $A\in Ł(E_c,E_c^*)$ 时，定理 2.2 将证明 $\mathrm{d}\Gamma(A)\in Ł((E),(E)^*)$. 证明中用到广义算子连续性的定义

$$B\in Ł((E),(E)^*)\Longleftrightarrow \exists p,q,C\geq 0,\forall\phi\in(E),\|B\phi\|_{-q}\leq C\|\phi\|_p. \tag{2.1}$$

定理 2.2 若 $A\in Ł(E_c,E_c^*)$, 则 $\mathrm{d}\Gamma(A)\in Ł((E),(E)^*)$.

证 由 A^* 的连续性，我们知道 $\exists C,q\geq 0,\ p\geq 1$, 对 $\forall e_j\in E_c$,

$$|A^*e_j|_{-q}\leq C|e_j|_{p-1}. \tag{2.2}$$

由 (1.1), (1.2), (1.3) 式及上式，我们有

$$\begin{aligned}|(A\otimes I^{\otimes(n-1)})f_n|_{-p}^2 &= \sum_{j_1,\cdots j_n}|\langle(A\otimes I^{\otimes(n-1)})f_n,e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\rangle|^2|e_{j_1}|_{-p}^2\cdots|e_{j_n}|_{-p}^2\\ &=\sum_{j_1,\cdots j_n}|\langle f_n,A^*e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\rangle|^2|e_{j_1}|_{-p}^2\cdots|e_{j_n}|_{-p}^2\\ &\leq\sum_{j_1,\cdots j_n}|f_n|_q^2|A^*e_{j_1}|_{-q}^2|e_{j_1}|_{-p}^2|e_{j_2}|_{-p-q}^2\cdots|e_{j_n}|_{-p-q}^2\\ &=|f_n|_q^2\sum_{j_1}|A^*e_{j_1}|_{-q}^2|e_{j_1}|_{-p}^2\sum_{j_2,\cdots j_n}|e_{j_2}|_{-p-q}^2\cdots|e_{j_n}|_{-p-q}^2\\ &\leq|f_n|_q^2\delta^{2(n-1)}\sum_j C^2|e_j|_{p-1}^2|e_j|_{-p}^2=C^2\delta^{2n}|f_n|_q^2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

由 (2.3), (1.2), (1.3) 式及 f_n 的对称性，我们可以估计出 $\|\mathrm{d}\Gamma(A)\phi\|_{-p}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty n!|A^{(n)}f_n|_{-p}^2 &= \sum_{n=1}^\infty n!n^2|(A\otimes I^{\otimes(n-1)})f_n|_{-p}^2\leq\sum_{n=1}^\infty n!n^2C^2\delta^{2n}|f_n|_q^2\\ &\leq C^2\sum_{n=1}^\infty n!n^2\delta^{2n}\rho^{2nr}|f_n|_{q+r}^2\\ &\leq |\phi|_{q+r}^2\sup_{n\geq 1}n^2(\delta\rho^r)^{2n}\quad(\forall r\geq 0).\end{aligned} \tag{2.4}$$

取 r 足够大，使得 $\delta\rho^r<1$, 那么 (2.4) 式右端 $\leq C\|\phi\|_{q+r}^2<+\infty$, 联系 (1.3) 式得

$$\|\mathrm{d}\Gamma(A)\phi\|_{-p}^2=\sum_{n=0}^\infty n!|A^{(n)}f_n|_{-p}^2\leq C\|\phi\|_{q+r}^2.$$

再由 (2.1) 式得证 $\mathrm{d}\Gamma(A)\in Ł((E),(E)^*)$. ▌

由 (1.5) 式中 $Ł(E_c,E_c^*)\cong E_c^*\otimes E_c^*$ 得，对任一 $A\in Ł(E_c,E_c^*)$, 存在唯一 $\widetilde{A}\in E_c^*\otimes E_c^*$, 满足

$$\langle A\xi,\eta\rangle=\langle\widetilde{A},\eta\otimes\xi\rangle,\qquad\forall\xi,\eta\in E_c. \tag{2.5}$$

根据引理 1.2, 核分布为 $\widetilde{A}$ 的积分核算子 $\Xi_{1,1}(\widetilde{A})\in Ł((E),(E)^*)$. 下面将证明 $\Xi_{1,1}(\widetilde{A})$ 实际上就是 A 的广义微分二次量子化算子.

定理 2.3 $\mathrm{d}\Gamma(A)=\Xi_{1,1}(\widetilde{A})$.

证 我们先由 (1.7) 式计算 $\mathrm{d}\Gamma(A)$ 的算子象征. 对任意 $\xi,\eta\in E_c$, 有

$$\widehat{\mathrm{d}\Gamma(A)}(\xi,\eta)=\langle\langle\mathrm{d}\Gamma(A)\phi_\xi,\phi_\eta\rangle\rangle=\sum_{n=0}^\infty n!\langle A^{(n)}\frac{\xi^{\otimes n}}{n!},\frac{\eta^{\otimes n}}{n!}\rangle=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\langle A\xi,\eta\rangle\langle\xi,\eta\rangle^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \langle A\xi, \eta\rangle \langle \xi, \eta\rangle^{n-1} = \langle A\xi, \eta\rangle \mathrm{e}^{\langle \xi, \eta\rangle}.$$

由 (1.8) 和 (2.5) 式得到 $\widehat{\Xi_{1,1}}(\widetilde{A})(\xi,\eta) = \langle \widetilde{A}, \eta\otimes\xi\rangle \mathrm{e}^{\langle\xi,\eta\rangle} = \langle A\xi,\eta\rangle\mathrm{e}^{\langle\xi,\eta\rangle}$. 根据算子象征的唯一性得证定理 2.3. ∎

注 当 $A\in Ł(E_c, E_c)$ 时，由 (1.5) 式 $Ł(E_c,E_c)\cong E_c\otimes E_c^*$ 知， $\widetilde{A}\in E_c\otimes E_c^*$. 再由引理 1.2 得 $\Xi_{1,1}(\widetilde{A})\in Ł((E),(E))$, 应用定理 2.3 的结果得 $\mathrm{d}\Gamma(A)\in Ł((E),(E))$.

记 $\tau\in E_c^*\otimes E_c^*$, 由下式唯一确定

$$\langle \xi,\eta\rangle = \langle \tau, \eta\otimes\xi\rangle, \qquad \forall \xi,\eta\in E_c. \tag{2.6}$$

根据 (2.5) 式，我们形式上有 $\widetilde{A} = (I\otimes A)^*\tau$.

下面应用定理 2.3 来得到一些算子的广义微分二次量子化算子.

例 1 设 ∂^α 为 E_c 上的微分算子，即 $\partial^\alpha\xi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\xi(x)$, $\forall\xi\in E_c$, 其中 $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 由于 $\partial^\alpha\in Ł(E,E)$[6], 由注可知 $\mathrm{d}\Gamma(\partial^\alpha)\in Ł((E_c),(E_c))$. 由定理 2.3, 其算子象征为

$$\widehat{\mathrm{d}\Gamma(\partial^\alpha)}(\xi,\eta) = \widehat{\Xi_{1,1}}(\widetilde{\partial^\alpha}) = \langle\partial^\alpha\xi,\eta\rangle\mathrm{e}^{\langle\xi,\eta\rangle} = \int_{R^3}(\partial^\alpha)\xi(x)\eta(x)\mathrm{d}x\cdot\mathrm{e}^{\int_{R_3}\xi(x)\eta(x)\mathrm{d}x}.$$

例 2 设 I 为恒等算子，由 (2.5),(2.6) 式得到 $\widetilde{I}=\tau$.

$$\mathrm{d}\Gamma(I) = \Xi_{1,1}(\tau) = \int_{R^3}\partial_x^*\partial_x\mathrm{d}x,$$

即对称 Fock 空间中的计数算子. 若 $\phi\in(E)^*, \phi\sim\{f_n\}$, 则 $\mathrm{d}\Gamma(I)\phi\sim\{n\cdot f_n\}$.

例 3 设 q 为 H_c 上的坐标算子，即 $q\xi(x) = x\xi(x), \forall\xi\in E_c$.

$$\mathrm{d}\Gamma(q) = \Xi_{1,1}((I\otimes q)^*\tau) = \int_{R^3}x\partial_x^*\partial_x\mathrm{d}x,$$

即文献 [7–8] 中广义算子意义下自由场的动量算子.

例 4 设 $E\xi(x) = \sqrt{x^2+m^2}\xi(x), \forall\xi\in E_c$, 其中 m 为粒子质量.

$$\mathrm{d}\Gamma(E) = \Xi_{1,1}((I\otimes E)^*\tau) = \int_{R^3}\sqrt{x^2+m^2}\partial_x^*\partial_x\mathrm{d}x,$$

即文献 [7–8] 中广义算子意义下自由场的能量算子.

广义微分二次量子化算子也有很好的性质 [9], 其证明是平凡的.

命题 2.4 (i) $\mathrm{d}\Gamma(A^*) = (\mathrm{d}\Gamma(A))^*$. 特别地，若 $A=A^*$, 则 $\mathrm{d}\Gamma(A) = (\mathrm{d}\Gamma(A))^*$.

(ii) 若 A 生成 E_C^* 上的强连续压缩半群，则 $\mathrm{d}\Gamma(A)$ 生成 $(E)^*$ 上的强连续压缩半群.

(iii) 若 A 是 H_c 上的自伴算子，生成酉算子群，则 $\mathrm{d}\Gamma(A)$ 生成 $\Gamma(H_c)$ 上的酉算子群.

3 算子复合的广义微分二次量子化算子

物理中常使用算子复合, 下面我们通过定义一种缩合来给出算子复合的广义微分二次量子化算子.

定义 3.1 $\{e\}_{j=0}^\infty$ 是 H_c 的一组完备正交基， $e_j\in E_c$, $j=0,1,2\cdots$, 对 $\forall f,g\in E_c^*\otimes E_c^*$, 若

$$\sum_{j,k}\Big(\sum_i\langle f, e_j\otimes e_i\rangle\langle g, e_i\otimes e_k\rangle\Big)e_j\otimes e_k, \quad i,j,k=0,1,2,\cdots \tag{3.1}$$

收敛，则称之为 f 与 g 的缩合，记为 $f\otimes_1 g$.

引理 3.2 $\forall A\in \mathrm{Ł}(E_c,E_c^*)$, $B\in \mathrm{Ł}(E_c,E_c)$ (或者 $A\in \mathrm{Ł}(E_c^*,E_c^*)$, $B\in \mathrm{Ł}(E_c,E_c^*)$), A 与 B 的复合 $AB\in \mathrm{Ł}(E_c,E_c^*)$, 且 $\widetilde{AB}=\widetilde{A}\otimes_1\widetilde{B}$.

证 由 (3.1), (1.4) 和 (2.5) 式，有

$$\begin{aligned}\widetilde{A}\otimes_1\widetilde{B}&=\sum_{j,k}(\sum_i\langle\widetilde{A},e_j\otimes e_i\rangle\langle\widetilde{B},e_i\otimes e_k\rangle)e_j\otimes e_k\\&=\sum_{j,k}(\sum_i\langle Ae_i,e_j\rangle\langle Be_k,e_i\rangle)e_j\otimes e_k=\sum_{j,k}(\sum_i\langle e_i,A^*e_j\rangle\langle Be_k,e_i\rangle)e_j\otimes e_k\\&=\sum_{j,k}(\sum_i\langle\langle Be_k,e_i\rangle e_iA^*e_j\rangle)e_j\otimes e_k=\sum_{j,k}\langle Be_k,A^*e_j\rangle e_j\otimes e_k\\&=\sum_{j,k}\langle ABe_k,e_j\rangle e_j\otimes e_k=\sum_{j,k}\langle\widetilde{AB},e_j\otimes e_k\rangle e_j\otimes e_k=\widetilde{AB}.\end{aligned}$$

证毕. ▌

根据定理 2.3 和引理 3.2, 我们得到算子复合的广义微分二次量子化算子.

定理 3.3 沿用引理 3.2 的条件，我们有

$$\mathrm{d}\Gamma(AB)=\Xi_{1,1}(\widetilde{A}\otimes_1\widetilde{B}).$$

参 考 文 献

[1] Berezin F A. The Method of Second Quantization. New York: Academic Press, 1966

[2] Parthasarathy K R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhauser Verlag, 1992

[3] Hida T. Analysis of Brown Functionals. Carleton Math Lect Notes. Ottawa: Carleton Univ, 1975

[4] Obata N. White Noise Calculus and Fock Space. Berlin: Springer-Verlag, 1994

[5] Huang Z Y. Quantum white noises, white noise approach to quantum stochastic calculus. Nagoya Math J, 1993, **129**: 23–42

[6] Schwartz L. Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1978

[7] Huang Z Y, Luo S L. Quantum white noise and free fields. IDAQP, 1998, **1**: 69–82

[8] Huang Z Y, Wang X J, Wang C S. Generalized operators and operator-valued distributions in quantum field theory. Acta Math Sci, 2003, **23B**(2): 145–154

[9] 黄志远，严加安．无穷维随机分析引论．北京：科学出版社， 1997: 32–35

Generalized Differential Second Quantization Operator

Wang Xiangjun Cao Xuelian

(*School of Mathematics and Statistics of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074*)

Abstract: In this paper, the authors define the differential second quantization operator of any continuous linear operator from E_c to E_c^*. A Fock expansion by using Schwartz kernel theorem is obtained. The differential second quantization operator of composition operator by using tensor product is given.

Key words: Differential second quantization; Generalized operator; White noise analysis.

MR(2000) Subject Classification: 60H40; 81S25