2005,**25A**(1):119－129

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

具任意次非线性项的 Liénard 方程的精确解及其应用*

张卫国
(上海理工大学理学院 上海 200093)
常谦顺
(中国科学院应用数学所 北京 100080)
李用声
(华中科技大学数学系 武汉 430074)

摘要:该文推导了具任意次非线性项的 Liénard 方程 $a''(\xi)+la(\xi)+ma^q(\xi)+na^{2q-1}(\xi)=0$ 和 $a''(\xi)+ra'(\xi)+la(\xi)+ma^q(\xi)+na^{2q-1}(\xi)=0$ 解的若干性质,通过适当变换,并结合假设待定法求出了它们的钟状和扭状显式精确解.据此,求出了一批具任意次非线性项的发展方程的钟状和扭状显式精确孤波解,其中包括广义 BBM 型方程、二维广义 Klein-Gordon 方程、广义 Pochhammer-Chree 方程和非线性波方程等.

关键词:孤波;Liénard 方程;非线性发展方程;精确解;待定假设法.

MR(2000)主题分类:35Q20;35Q53　　**中图分类号**:O175.2;O175.29　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)01-119-11

1 引言

由于 Liénard 方程在物理、力学、生物学中的重要性,对它们的各种定性讨论已有很多,参见文献[1－4]及其所附文献.但由于解非线性方程的复杂性,对它们的求解研究却很少.实际上求出它们的精确解,不仅可以验证定性研究的结果,还可以用来鉴别数值方法和近似方法的良好与否,更可以进行定量分析.许多求非线性发展方程孤波解的问题可转化为研究 Liénard 方程的求解问题,例如物理学和力学中的重要模型方程.

具任意次非线性项的广义 BBM 方程[5－7]

$$u_t+au^pu_x+bu^{2p}u_x-\delta u_{xxt}=0\quad(\delta\neq 0,p>0),\tag{1.1}$$

二维广义 Klein-Gordon 方程[8,9]

$$u_{tt}-k(u_{xx}+u_{yy})+b_1u+b_2\mid u\mid^{2p}u+b_3\mid u\mid^{4p}u=0\quad(p>0),\tag{1.2}$$

广义 Pochhammer-Chree 方程[10－12](简称 PC 方程)

$$u_{tt}-u_{ttxx}+ru_{xxt}-(b_1u+b_2u^{p+1}+b_3u^{2p+1})_{xx}=0\quad(\delta\neq 0,p>0)\tag{1.3}$$

和具任意次非线性项的波方程[13－16]

$$u_{tt}-ku_{xx}+ru_t+b_1u+b_2u^{p+1}+b_3u^{2p+1}=0\quad(p>0)\tag{1.4}$$

收稿日期:2003-01-21;修订日期:2004-08-19

E-mail:zwgzwm@sohu.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10371023)和上海市科技发展基金(03ZR14070)资助

等等. 方程(1.1)－(1.4)都是物理学和力学中重要模型方程的自然推广，当 $p=1$ 时就可得到原型方程，方程(1.4)把 Sinh-Gordon 方程的近似方程，ϕ^4 方程，一维 Klein-Gordon 方程，Landau-Ginzburg-Higgs 方程，Duffing 方程以及非线性电报方程等作为其特例. 因此求出方程(1.1)－(1.4)的精确解是很有意义的.

易知，若我们求广义 BBM 方程(1.1)满足条件

$$u'(\xi),\ u''(\xi)\to 0,\quad |\xi|\to\infty,\ \xi=x-\nu t \tag{1.5}$$

及解的渐近值 $C_+=\lim\limits_{\xi\to+\infty}u(\xi)$, $C_-=\lim\limits_{\xi\to-\infty}u(\xi)$满足方程

$$-\nu x+\frac{a}{p+1}x^{p+1}+\frac{b}{2p+1}x^{2p+1}=0 \tag{1.6}$$

的孤波解 $u(x,t)=u(x-\nu t)=u(\xi)$，则方程(1.1)的孤波解 $u(\xi)$满足

$$u''(\xi)-\frac{1}{\delta}u(\xi)+\frac{a}{\delta\nu(p+1)}u^{p+1}(\xi)+\frac{b}{\delta\nu(2p+1)}u^{2p+1}(\xi)=0. \tag{1.7}$$

对二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)，若我们求型如

$$u(x,y,t)=e^{i\eta}a(\xi),\ \text{其中}\ \eta=p_1x+p_2y-\mu t,\ \xi=l_1x+l_2y-\nu t \tag{1.8}$$

的孤波解，并取 μ,ν 满足

$$\mu\nu=k(p_1l_1+p_2l_2), \tag{1.9}$$

则振幅 $a(\xi)$满足

$$a''(\xi)+\frac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}a(\xi)+\frac{b_2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}a^{2p+1}(\xi)$$
$$+\frac{b_3}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}a^{4p+1}(\xi)=0. \tag{1.10}$$

对于广义 PC 方程(1.3)，若我们求满足条件

$$u'(\xi),\ u''(\xi),\ u'''(\xi)\to 0,\quad |\xi|\to\infty, \tag{1.11}$$

且解的渐近值 C_+, C_- 满足代数方程

$$b_3x^{2p+1}+b_2x^{p+1}-(\nu^2-b_1)x=0 \tag{1.12}$$

的孤波解，则经二次积分后知其孤波解满足

$$u''(\xi)+\frac{r}{\nu}u'(\xi)-\frac{(\nu^2-b_1)}{\nu^2}u(\xi)+\frac{b_2}{\nu^2}u^{p+1}(\xi)+\frac{b_3}{\nu^2}u^{2p+1}(\xi)=0. \tag{1.13}$$

对非线性波方程(1.4)，易知其孤波解 $u(\xi)$满足

$$u''(\xi)-\frac{r\nu}{\nu^2-k}u'(\xi)+\frac{b_1}{\nu^2-k}u(\xi)+\frac{b_2}{\nu^2-k}u^{p+1}(\xi)+\frac{b_3}{\nu^2-k}u^{2p+1}(\xi)=0. \tag{1.14}$$

上述方程(1.7)、(1.10)、(1.13)、(1.14)都是下列具任意次非线性项的 Liénard 方程

$$a''(\xi)+la(\xi)+ma^q(\xi)+na^{2q-1}(\xi)=0, \tag{1.15}$$

$$a''(\xi)+ra'(\xi)+la(\xi)+ma^q(\xi)+na^{2q-1}(\xi)=0 \tag{1.16}$$

的特殊情况. 因此本文将研究 Liénard 方程(1.15)、(1.16)的求解问题及其在孤波求解方面的应用. 在第 2 和 3 节中我们将推导出方程(1.15)和(1.16)解的若干性质，据此设想出解的结构，再运用假设待定方法求出方程(1.15)和(1.16)的钟状和扭状精确解. 作为应用，本文将在第 4 和 5 节中求出方程(1.1)－(1.4) 的钟状和扭状精确孤波解.

2 基本结果

我们先推导 Liénard 方程(1.16)满足条件

$$a'(\xi),\ a''(\xi)\to 0,\ |\xi|\to\infty \tag{2.1}$$

的非平凡解的一个有用公式. 设 $C_+=\lim\limits_{\xi\to+\infty}a(\xi)$，$C_-=\lim\limits_{\xi\to+\infty}a(\xi)$，方程(1.16)乘以 $a'(\xi)$，并从 $-\infty$ 至 ξ 积分，得

$$\frac{1}{2}(a'(\xi))^2+r\int_{-\infty}^{\xi}[a'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi+\frac{l}{2}a^2(\xi)+\frac{m}{q+1}a^{q+1}(\xi)+\frac{n}{2q}a^{2q}(\xi)=C_1, \tag{2.2}$$

式中的 C_1 是积分常数. 在(2.2)式中令 $\xi\to-\infty$，并注意条件(2.1)即得

$$\frac{l}{2}C_-^2+\frac{m}{q+1}C_-^{q+1}+\frac{n}{2q}C_-^{2q}=C_1, \tag{2.3}$$

在(2.2)式中令 $\xi\to+\infty$，并把(2.3)式代入可得

$$r\int_{-\infty}^{+\infty}[a'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=\frac{l}{2}(C_-^2-C_+^2)+\frac{m}{q+1}(C_-^{q+1}-C_+^{q+1})+\frac{n}{2q}(C_-^{2q}-C_+^{2q}). \tag{2.4}$$

另直接由方程(1.16)知

$$lC_++mC_+^q+nC_+^{2q-1}=0, \tag{2.5}$$

$$lC_-+mC_-^q+nC_-^{2q-1}=0. \tag{2.6}$$

结合(2.5)和(2.6)式可得

$$m(C_-^{q+1}-C_+^{q+1})=-l(C_-^2-C_+^2)-n(C_-^{2q}-C_+^{2q}). \tag{2.7}$$

(2.7)式代入(2.4)式就可得 Liénard 方程(1.16)满足条件(2.1)的解的一个有用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[a'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=\frac{q-1}{2r(q+1)}\left[l(C_-^2-C_+^2)-\frac{n}{q}(C_-^{2q}-C_+^{2q})\right]. \tag{2.8}$$

据(2.8)式就可知 Liénard 方程(1.16)满足条件(2.1)的解具如下性质

(1) 若 $a(\xi)$是方程(1.16)满足条件(2.1)的解，则 r 与$\frac{q-1}{q+1}\left[l(C_-^2-C_+^2)-\frac{n}{q}(C_-^{2q}-C_+^{2q})\right]$同号.

(2) 若 $a(\xi)$是方程(1.16)满足条件(2.1)的解，则 $a'(\xi)$在$(-\infty,+\infty)$上平方可积.

(3) 当 $r\neq0$ 时，方程(1.16)只可能有$|C_+|\neq|C_-|$的解，不可能有渐近值相等的非平凡解，也不存在渐近值的绝对值相等而符号相反的非平凡解. 因为当$|C_+|=|C_-|$时必有 $\int_{-\infty}^{+\infty}[a'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=0$，可推知 $a(\xi)=$常数，它是平凡的. 进一步可知，当 $r\neq0$ 时，广义 PC 方程(1.3)和非线性波方程(1.4)只可能有渐近值$|C_+|\neq|C_-|$的扭状孤波解，不可能有渐近值相等的钟状孤波解，也不存在渐近值的绝对值相等而符号相反的扭状孤波解.

(4) 当 $r=0$ 时，Liénard 方程(1.15)既可以有渐近值相等的钟状解，也可以有满足

$$l(C_-^2-C_+^2)-\frac{n}{q}(C_-^{2q}-C_+^{2q})=0 \tag{2.9}$$

但 $C_+\neq C_-$ 的扭状解. 进一步可知，广义 BBM 型方程(1.1)，二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)和当 $r=0$ 时的广义 PC 方程(1.3)及非线性波方程(1.4)，既可以有渐近值相等的钟状孤波解，也可以有渐近值 $C_+\neq C_-$ 但满足等式(2.9)的扭状孤波解.

3 Liéard 方程(1.15)和(1.16)的精确解

我们首先求 Liénard 方程(1.15)的钟状解. 作变换[17]

$$a(\xi)=[\varphi(\xi)]^{\frac{1}{q-1}},\quad q\neq1, \tag{3.1}$$

代入(1.15)式可得

$$\frac{1}{q-1}\varphi(\xi)\varphi''(\xi)+\frac{2-q}{(q-1)^2}\varphi'^2(\xi)+l\varphi^2(\xi)+m\varphi^3(\xi)+n\varphi^4(\xi)=0. \tag{3.2}$$

假设方程(3.2)有解型如

$$\varphi(\xi)=\frac{Ae^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1+e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2+Be^{\alpha(\xi+\xi_0)}}=\frac{A\operatorname{sech}^2\frac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)}{4+B\operatorname{sech}^2\frac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)}, \tag{3.3}$$

其中 A、B、α 是待常数，ξ_0 是任意参数.

把(3.3)式代入(3.2)式，我们得

$$\begin{cases}\frac{1}{(q-1)^2}\alpha^2+l=0,\\ -\frac{1}{q-1}\alpha^2(2+B)+2l(2+B)+mA=0,\\ \frac{2(1-2q)}{(q-1)^2}\alpha^2+[2+(2+B)^2]l+mA(2+B)+nA^2=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

解之，得 A、B、α 的二组解

$$\begin{cases}\alpha=|q-1|\sqrt{-l}\quad(l<0),\\ A_{1,2}=\pm\frac{2|ql(1+q)|}{\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}},\\ B_{1,2}=-2\pm\frac{2m|q(1+q)|}{(1+q)\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}}.\end{cases} \tag{3.5}$$

注 1 由于(3.3)式中 $\operatorname{sech}x$ 是偶函数，$\alpha=-|q-1|\sqrt{-l}$时的解与 $\alpha=|q-1|\sqrt{-l}$时的解相同，所以已把 $\alpha=-|q-1|\sqrt{-l}$舍去了.

把(3.5)式代入(3.3)式，我们就得方程(3.2)的两个解

$$\varphi_1(\xi)=\frac{\frac{|lq(1+q)|}{\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}|q-1|\sqrt{-l}(\xi+\xi_0)}{2+(-1+\frac{m|q(1+q)|}{(1+q)\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}})\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}|q-1|\sqrt{-l}(\xi+\xi_0)}, \tag{3.6}$$

$$\varphi_2(\xi)=\frac{-\frac{|lq(1+q)|}{\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}|q-1|\sqrt{-l}(\xi+\xi_0)}{2-(1+\frac{m|q(1+q)|}{(1+q)\sqrt{q[qm^2-nl(1+q)^2]}})\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}|q-1|\sqrt{-l}(\xi+\xi_0)}. \tag{3.7}$$

容易验证，在 $l<0$，$q\neq0,\pm1$ 条件下，当 $nq\geqslant0$ 时 $q[qm^2-nl(1+q)^2]>0$，且

当 $nq>0$ 或 $nq\geqslant0$ 且 $m(1+q)>0$ 时，$\varphi_1(\xi)>0$，$\forall\,\xi\in R$；

当 $nq>0$ 或 $nq\geqslant0$ 且 $m(1+q)<0$ 时，$\varphi_2(\xi)<0$，$\forall\,\xi\in R$.

综上我们可得如下定理

定理 1 设 $l<0$，$q\neq0,\pm1$.

(1) 若 $nq>0$ 或 $nq\geqslant0$ 且 $m(1+q)>0$ 时，Liénard 方程(1.15)有钟状解

$$a(\xi)=[\varphi_1(\xi)]^{\frac{1}{q-1}}; \tag{3.8}$$

(2) 若 q 使$(z)^{\frac{1}{q-1}}$有意义(z 为任一负数)，又条件 $nq>0$ 或条件 $nq\geqslant0$ 且 $m(1+q)<0$

成立，则 Liénard 方程(1.15)还有钟状解

$$a(\xi)=[\varphi_2(\xi)]^{\frac{1}{q-1}};\tag{3.9}$$

以上(3.8)和(3.9)式中的 $\varphi_1(\xi)$ 和 $\varphi_2(\xi)$ 分别由(3.6)和(3.7)式给定.

易验，以上所求方程(1.15)的解(3.8)(3.9)满足(2.1)式，且解的形状是钟状的.

现在我们求 Liénard 方程(1.16)的扭状解.

与解方程(1.15)时一样，先作变换(3.1)，则此时有

$$\frac{1}{q-1}\varphi(\xi)\varphi''(\xi)+\frac{2-q}{(q-1)^2}\varphi'^2(\xi)+\frac{r}{(q-1)}\varphi(\xi)\varphi'(\xi)+l\varphi^2(\xi)+m\varphi^3(\xi)+n\varphi^4(\xi)=0.\tag{3.10}$$

假设(3.10)式有解型如

$$\varphi(\xi)=\frac{Ae^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{1+e^{\alpha(\xi+\xi_0)}}=\frac{A}{2}\left[1+\tanh\frac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)\right].\tag{3.11}$$

把(3.11)式代入(3.10)式，经化简可得 A、α、l 应满足方程组

$$\begin{cases}\alpha^2+r(q-1)\alpha+(q-1)^2l=0,\\ -\alpha^2+r\alpha+2(q-1)l+(q-1)mA=0,\\ nA^2+mA+l=0.\end{cases}\tag{3.12}$$

解以上方程组，并经检验可知方程组(3.12)有两组解

$$\begin{cases}A_1=-\dfrac{q}{(q-1)(1+q)n}\left[(q-1)m-r\sqrt{-\dfrac{(q-1)^2n}{q}}\right],\\ \alpha_1=\sqrt{-\dfrac{(q-1)^2n}{q}}A_1,\\ l_1=-nA_1^2-mA_1,\end{cases}\tag{3.13}$$

$$\begin{cases}A_2=-\dfrac{q}{(q-1)(1+q)n}\left[(q-1)m+r\sqrt{-\dfrac{(q-1)^2n}{q}}\right],\\ \alpha_2=-\sqrt{-\dfrac{(q-1)^2n}{q}}A_1,\\ l_2=-nA_2^2-mA_2.\end{cases}\tag{3.14}$$

把(3.13)和(3.14)代入(3.11)式，即可得如下定理

定理 2 设 $nq<0$，$q\neq\pm1$.

(1) 若 q 使 $A_1{}^{\frac{1}{q-1}}$ 有意义，取 $l=l_1=-nA_1^2-mA_1$，则 Liénard 方程(1.16)有扭状解

$$a_1(\xi)=\left\{\frac{A_1}{2}\left[1+\tanh\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(q-1)^2n}{q}}A_1(\xi+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{q-1}},\tag{3.15}$$

(2) 若 q 使 $A_2{}^{\frac{1}{q-1}}$ 有意义，取 $l=l_2=-nA_2^2-mA_2$，则 Liénard 方程(1.16)有扭状解

$$a_2(\xi)=\left\{\frac{A_2}{2}\left[1-\tanh\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(q-1)^2n}{q}}A_2(\xi+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{q-1}},\tag{3.16}$$

(3.15)和(3.16)式中的 A_1 和 A_2 分别由(3.13)和(3.14)式给定.

注 2 (1) 若 A_1、A_2 均大于 0，此时对 $q\neq0,\pm1$ 的一切实数均使 $A_i{}^{\frac{1}{q-1}}$ $(i=1,2)$ 有意义；(2) 当 A_1 或 A_2 中有一小于 0 时，如 $A_1<0$，则当 q 使 $\dfrac{1}{q-1}$ 是整数或者 $\dfrac{1}{q-1}=\dfrac{j}{2k+1}$ (k，j 都是整数)时 $A_1{}^{\frac{1}{q-1}}$ 有意义；对其它定理中的类似之处可作相仿的说明.

易验,以上所求 Liénard 方程(1.16)的解满足(2.1)式且解的渐近值满足代数方程

$$lx+mx^{q}+nx^{2q-1}=0, \tag{3.17}$$

运用广义积分的换元法我们还可验证,以上所求的解 $a_1(\xi)$ 和 $a_2(\xi)$ 满足等式(2.8).

当 $r=0$ 时,有

$$A_1=A_2=-\frac{qm}{(1+q)n},\ l_1=l_2=-\frac{qm^2}{(1+q)^2n},\ \alpha_{1,2}=\pm|q-1|\sqrt{-l},$$

所以我们又可得关于 Liénard 方程(1.15)的如下定理 3

定理 3 设 $q\neq0,\pm1,m\neq0,nq<0$ 且 q 使 $\left(-\frac{qm}{(1+q)n}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ 有意义,取 $l=\frac{qm^2}{(1+q)^2n}$,则方程(1.15)有扭状解

$$a(\xi)=\left\{-\frac{mq}{2n(1+q)}\left[1\pm\tanh\frac{1}{2}|q-1|\sqrt{-l}(\xi+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{q-1}}. \tag{3.18}$$

易验,以上所求(3.18)式满足(2.1)式且解的渐近值满足(2.9)式.

至此,我们不仅求出了期望的 Liénard 方程(1.15)的钟状解和扭状解,还得到了 Liénard 方程(1.16)的扭状解.

在以下第 4—5 节我们将根据定理 1—3 求出方程(1.1)—(1.4)的孤波解.

4 方程(1.1)、(1.2)和 $r=0$ 时方程(1.3)(1.4)的钟状及扭状孤波解

4.1 广义 BBM 方程(1.1)的钟状及扭状孤波解

据第 1 节知,广义 BBM 方程(1.1)满足条件(1.5)和(1.6)的孤波解 $u(x,t)=u(x-\nu t)=u(\xi)$ 满足(1.7)式. 对比 Liénard 方程(1.15),在定理 1 和定理 3 中令 $q=p+1,l=-\frac{1}{\delta}$,$m=\frac{a}{\delta\nu(p+1)},n=\frac{b}{\delta\nu(2p+1)}$,并经整理可得如下定理

定理 4 设 ν 是行波速度,$\delta>0$.

(1) 若 $b\nu>0$ 或 $b\nu\geq0$ 且 $a\nu>0$,则广义 BBM 方程(1.1)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{\frac{|\nu|(p+1)(p+2)\sqrt{2p+1}}{\sqrt{a^2(2p+1)+b\nu(p+1)(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x-\nu t+\xi_0)}{2+\left(-1+\frac{a|\nu|\sqrt{2p+1}}{\nu\sqrt{a^2(2p+1)+b\nu(p+1)(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}}; \tag{4.1}$$

(2) 若 p 使 $(z)^{\frac{1}{p}}$ 有意义(z 为任一负数),又 $b\nu>0$ 或 $b\nu\geq0$ 且 $a\nu<0$ 成立,则广义 BBM 方程(1.1)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{-\frac{|\nu|(p+1)(p+2)\sqrt{2p+1}}{\sqrt{a^2(2p+1)+b\nu(p+1)(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x-\nu t+\xi_0)}{2-\left(1+\frac{a|\nu|\sqrt{2p+1}}{\nu\sqrt{a^2(2p+1)+b\nu(p+1)(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}}; \tag{4.2}$$

(3) 设 $a\neq0,b\neq0$,且 p 使 $(-ab)^{\frac{1}{p}}$ 有意义,则广义 BBM 方程(1.1)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{-\frac{a(2p+1)}{2b(p+2)}\left[1\pm\tanh\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x-\nu t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{4.3}$$

其中波速 $\nu=-\dfrac{a^2(2p+1)}{b(p+1)(p+2)^2}$.

在(4.1)式中令 $p=1,a=1,b=0$,就可得[7]中对 BBM 方程所求出的钟状孤波解.

4.2　二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)的钟状及扭状孤波解

据第 1 节知,若我们求二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)型如(1.8),而 μ、ν 满足条件(1.9)的孤波解,则振幅 $a(\xi)$满足方程(1.10). 对比 Liénard 方程(1.15),在定理 1 和定理 3 中令 $q=2p+1,l=\dfrac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)},m=\dfrac{b_2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)},n=\dfrac{b_3}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}$, 可得如下定理

定理 5　设 μ、ν 满足$[k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2][\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)]<0$,且 $\mu\nu=k(p_1l_1+p_2l_2)$,记

$$Q=\frac{1}{\sqrt{(2p+1)b_2^2-4(p+1)^2b_3(k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2)}}.$$

(1) 若 $b_3(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))>0$ 或 $b_3(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))\geqslant 0$ 且 $b_2(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))>0$,则方程(1.10)有解

$$a_1(\xi)=\left[\frac{2Q\,|\,k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2\,|\,(p+1)\sqrt{2p+1}\operatorname{sech}^2 p\sqrt{-\dfrac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}}(l_1x+l_2y-\nu t+\xi_0)}{2+\left(-1+\dfrac{b_2Q\,|\,v^2-k(l_1^2+l_2^2)\,|\,\sqrt{2p+1}}{v^2-k(l_1^2+l_2^2)}\right)\operatorname{sech}^2 p\sqrt{\dfrac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}}(l_1x+l_2y-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2p}},\tag{4.4}$$

进而二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)有孤波解 $u(x,y,t)=e^{i(p_1x+p_2y-\mu t)}a_1(l_1x+l_2y-\nu t)$,其中 $a_1(\xi)$由(4.4)式给出.

(2) 若 p 使$(z)^{\frac{1}{2p}}$有意义(z 为任一负数),又 $b_3(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))>0$ 或 $b_3(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))\geqslant 0$ 且 $b_2(v^2-k(l_1^2+l_2^2))<0$ 成立,则方程(1.10)有解

$$a_2(\xi)=\left[\frac{-2Q\,|\,k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2\,|\,(p+1)\sqrt{2p+1}\operatorname{sech}^2 p\sqrt{-\dfrac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}}(l_1x+l_2y-\nu t+\xi_0)}{2-\left(1+\dfrac{b_2Q\,|\,v^2-k(l_1^2+l_2^2)\,|\,\sqrt{2p+1}}{v^2-k(l_1^2+l_2^2)}\right)\operatorname{sech}^2 p\sqrt{\dfrac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}}(l_1x+l_2y-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2p}},\tag{4.5}$$

进而二维广义 Klein-Gordan 方程(1.2)有孤波解 $u(x,y,t)=e^{i(p_1x+p_2y-\mu t)}a_2(l_1x+l_2y-\nu t)$,其中 $a_2(\xi)$由(4.5)式给出.

(3) 设 $b_2\neq 0,b_3(\nu^2-k(l_1^2+l_2^2))<0$,取 $\mu^2=k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\dfrac{(2p+1)b_2^2}{(2p+2)^2b_3}$,且 p 使$(-b_2b_3)^{\frac{1}{2p}}$有意义,则方程(1.10)有解

$$a_3(\xi)=\left\{-\frac{(2p+1)b_2}{4(p+1)b_3}\left[1\pm\tanh p\sqrt{-\frac{k(p_1^2+p_2^2)+b_1-\mu^2}{\nu^2-k(l_1^2+l_2^2)}}(l_1x+l_2y-\nu t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2p}},\tag{4.6}$$

进而二维广义 Klein-Gordon 方程(1.2)有孤波解 $u(x,y,t)=e^{i(p_1x+p_2y-\mu t)}a_3(l_2x+l_2y-\nu t)$,其中 $a_3(\xi)$由(4.6)式给出.

4.3　$r=0$ 时广义 PC 方程(1.3)的钟状及扭状孤波解

据第 1 节知,$r=0$ 时广义 PC 方程(1.3)满足条件(1.11)和(1.12)的孤波解满足

$$u''(\xi)-\frac{(\nu^2-b_1)}{\nu^2}u(\xi)+\frac{b_2}{\nu^2}u^{p+1}(\xi)+\frac{b_3}{\nu^2}u^{2p+1}(\xi)=0.\tag{4.7}$$

对比方程(1.15),在定理 1—3 中令 $q=p+1, l=-\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}, m=\frac{b_2}{\nu^2}, n=\frac{b_3}{\nu^2}$,可得如下定理

定理 6 设行波速度 ν 满足 $\nu^2>b_1$.

(1) 若 $b_3>0$ 或 $b_3\geqslant 0$ 且 $b_2>0$,则广义 PC 方程(1.3)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{\frac{(\nu^2-b_1)(p+2)\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2+b_3(\nu^2-b_1)(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}}(x-\nu t+\xi_0)}{2+\left(-1+\frac{b_2\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2+b_3(\nu^2-b_1)(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.8}$$

(2) 若 p 使 $(z)^{\frac{1}{p}}$ 有意义(z 为任一负数),又 $b_3>0$ 或 $b_3\geqslant 0$ 且 $b_2<0$ 成立,则广义 PC 方程(1.3)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{-\frac{(\nu^2-b_1)(p+2)\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2+b_3(\nu^2-b_1)(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}}(x-\nu t+\xi_0)}{2-\left(1+\frac{b_2\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2+b_3(\nu^2-b_1)(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.9}$$

(3) 若 $b_2\neq 0, b_3<0$ 且 p 使 $b_2{}^{\frac{1}{p}}$ 有意义,则广义 PC 方程(1.3)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{-\frac{b_2(p+1)}{2b_3(p+2)}\left[1\pm\tanh\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}}(x-\nu t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{4.10}$$

其中 $\nu^2=b_1-\frac{(p+1)b_2^2}{b_3(p+2)^2}>0$.

在(4.8)和(4.9)式中令 $p=2$ 就可得文[18]中(5.4)—(5.6)式对具 5 次非线性项的广义 PC 方程所求出的孤波解.

4.4 $r=0$ 时非线性波方程(1.4)的钟状及扭状孤波解

据第 1 节知, $r=0$ 时的非线性波方程(1.4)的孤波解 $u(x,t)=u(x-\nu t)=u(\xi)$满足

$$u''(\xi)+\frac{b_1}{\nu^2-k}u(\xi)+\frac{b_2}{\nu^2-k}u^{p+1}(\xi)+\frac{b_3}{\nu^2-k}u^{2p+1}(\xi)=0. \tag{4.11}$$

对比 Liénard 方程(1.15),在定理 1 和定理 3 中令 $q=p+1, l=\frac{b_1}{\nu^2-k}, m=\frac{b_2}{\nu^2-k}, n=\frac{b_3}{\nu^2-k}$,经整理可得如下定理

定理 7 设波速 ν 满足 $b_1(\nu^2-k)<0$.

(1) 若 $b_3(\nu^2-k)>0$ 或 $b_3(\nu^2-k)\geqslant 0$ 且 $b_2(\nu^2-k)>0$,则 $r=0$ 时方程(1.4)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{\frac{|b_1|(p+2)\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_1}{\nu^2-k}}(x-\nu t+\xi_0)}{2+\left(-1+\frac{b_2|\nu^2-k|\sqrt{p+1}}{(\nu^2-k)\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_1}{\nu^2-k}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.12}$$

(2) 若 p 使 $(z)^{\frac{1}{p}}$ 有意义(z 为任一负数),又 $b_3(\nu^2-k)>0$ 或 $b_3(\nu^2-k)\geqslant 0$ 且 $b_2(\nu^2-k)<0$,则 $r=0$ 时的非线性波方程(1.4)有钟状孤波解

$$u(x,t)=\left[\frac{-\frac{|b_1|(p+2)\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}}\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_1}{\nu^2-k}}(x-\nu t+\xi_0)}{2-\left(1+\frac{b_2|\nu^2-k|\sqrt{p+1}}{(\nu^2-k)\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}}\right)\operatorname{sech}^2\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_1}{\nu^2-k}}(x-\nu t+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{p}},\tag{4.13}$$

(3) 设 $b_2\neq0$，$b_3(\nu^2-k)<0$ 且 p 使 $(-b_2b_3)^{\frac{1}{p}}$ 有意义，b_1、b_2、b_3 满足 $b_1=\frac{(p+1)b_2^2}{(p+2)^2b_3}$，则非线性波方程(1.4)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{-\frac{b_2(p+1)}{2b_3(p+2)}\left[1\pm\tanh\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_1}{\nu^2-k}}(x-\nu t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.\tag{4.14}$$

在(4.12)和(4.14)式中令 $p=2$ 就可得[18]对具 5 次非线性项的波方程所求出的解.

5　$r\neq0$ 时广义 PC 方程(1.3)和非线性波方程(1.4)的扭状孤波解

5.1　$r\neq0$ 时广义 PC 方程(1.3)的扭状孤波解

广义 PC 方程(1.3)满足条件(1.11)和(1.12)的孤波解 $u(x,t)=u(x-\nu t)=u(\xi)$ 满足(1.13)式. 对比 Liénard 方程(1.16)，在定理 2 中令 $q=p+1$，$l=-\frac{\nu^2-b_1}{\nu^2}$，$m=\frac{b_2}{\nu^2}$，$n=\frac{b_3}{\nu^2}$，并用 $\frac{r}{\nu}$ 代替 r，经整理可得如下定理

定理 8　设 $b_3<0$，

$$A_1=-\frac{p+1}{(p+2)b_3}\left(b_2-r\sqrt{\frac{-b_3}{p+1}}\right),\ A_2=-\frac{p+1}{(p+2)b_3}\left(b_2+r\sqrt{\frac{-b_3}{p+1}}\right).$$

(1) 若 p 使 $A_1^{\frac{1}{p}}$ 有意义，$b_1+b_2A_1+b_3A_1^2>0$，并取 $\nu_1=\sqrt{b_1+b_2A_1+b_3A_1^2}$，则广义 PC 方程(1.3)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{\frac{A_1}{2}\left[1+\tanh\frac{p}{2\nu_1}\sqrt{\frac{-b_3}{p+1}}A_1(x\pm\nu_1t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}};\tag{5.1}$$

(2) 若 p 使 $A_2^{\frac{1}{p}}$ 有意义，$b_2+b_2A_2+b_3A_2^2>0$，并取 $\nu_2=\sqrt{b_1+b_2A_1+b_3A_2}$，则广义 PC 方程(1.3)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{\frac{A_2}{2}\left[1-\tanh\frac{p}{2\nu_2}\sqrt{\frac{-b_3}{p+1}}A_2(x\pm\nu_2t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.\tag{5.2}$$

5.2　$r\neq0$ 时非线性波方程(1.4)的扭状孤波解

据第 1 节知，非线性波方程(1.4)的孤波解 $u(x,t)=u(x-\nu t)=u(\xi)$ 满足(1.14)式. 对比 Liénard 方程(1.16)，在定理 2 中令 $q=p+1$，$l=\frac{b_1}{\nu^2-k}$，$m=\frac{b_2}{\nu^2-k}$，$n=\frac{b_3}{\nu^2-k}$，并用 $-\frac{r\nu}{\nu^2-k}$ 代替 r，经整理可得如下定理

定理 9　设 $b_2^2-4b_1b_3\geqslant0$，$A_1=\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-4b_1b_3}}{2b_3}$，$A_2=\frac{-b_2-\sqrt{b_2^2-4b_1b_3}}{2b_3}$.

(1) 若 p 使 $A_1^{\frac{1}{p}}$ 有意义，$k[((p+2)b_1+b_2A_2)^2+b_3r^2(p+1)A_1^2]>0$，则非线性波方程(1.4)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{\frac{A_1}{2}\left[1\pm\tanh\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_3A_1^2}{(p+1)(\nu_1^2-k)}}(x-\nu_1 t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}},\tag{5.3}$$

其中

$$\nu_1^2=\frac{k((p+2)b_1+b_2A_1)^2}{((p+2)b_1+b_2A_1)^2+b_3r^2(p+1)A_1^2};$$

(2) 若 p 使 $A_2^{\frac{1}{p}}$ 有意义，$k[((p+2)b_1+b_2A_2)^2+b_3r^2(p+1)A_2^2]>0$，则非线性波方程(1.4)有扭状孤波解

$$u(x,t)=\left\{\frac{A_2}{2}\left[1\pm\tanh\frac{p}{2}\sqrt{\frac{-b_3A_2^2}{(p+1)(\nu_2^2-k)}}(x-\nu_2 t+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{p}},\tag{5.4}$$

其中

$$\nu_2^2=\frac{k((p+2)b_1+b_2A_2)^2}{((p+2)b_1+b_2A_2)^2+b_3r^2(p+1)A_2^2}.$$

易验以上定理 9 中 $b_3(\nu_i^2-k)<0$，$i=1,2$. 在(5.3)(5.4)中令 $p=1$,$b_2=0$,可得波方程 $u_{tt}-ku_{xx}+ru_t+b_1u+b_3u^3=0$ 的扭状孤波解

$$u(x,t)=\pm\frac{\sqrt{-b_1b_3}}{2b_3}\left[1\pm\tanh\left(\frac{b_1}{4r}\sqrt{\frac{9b_1-2r^2}{kb_1}}x\pm\frac{3b_1}{4r}t+\xi_0\right)\right].\tag{5.5}$$

6 注

本文第 4—5 节的结果基于关于 Liénard 方程(1.15)和(1.16)的定理 1—3,还有许多偏微分方程求精确解的问题可化为 Liénard 方程(1.15)和(1.16),因而可作为定理 1—3 的推论求出其精确解,例如还有具任意次非线性项的组合 KdV 方程

$$u_t+au^pu_x+bu^{2p}u_x+\delta u_{xxx}=0\quad(\delta\neq0,\ p>0),\tag{6.1}$$

组合 KdV-Burgers 型方程

$$u_t+au^pu_x+bu^{2p}u_x+ru_{xx}+\delta u_{xxx}=0\quad(\delta\neq0,\ p>0),\tag{6.2}$$

广义 Boussinesq 方程

$$u_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}(u_x+au^pu_x+bu^{2p}u_x+ru_{xx}+\delta u_{xxx})=0\quad(\delta\neq0,\ p>0)\tag{6.3}$$

和广义 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t+au^pu_x+bu^{2p}u_x+ru_{xx}+\delta u_{xxx})+3k^2u_{yy}=0\quad(\delta\neq0,\ p>0)\tag{6.4}$$

等等. 不过限于篇幅,这里我们就不一一加以细述了.

参 考 文 献

[1] Villari G. On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation. J Diff Equ, 1987, **67**(2): 269—277

[2] Dumortier F, Rousseau C. Cubic Liénard equations with linear damping. Nonlinearity, 1990, **3**: 1015—1039

[3] 韩茂安. 一类广义 Liénard 方程的有界性. 科学通报,1995, **40**(21): 1925—1928

[4] 黄立宏,庾建设. 广义 Liénard 方程非平凡周期解的存在性. 应用数学,1995, **8**(2): 172—176

[5] Benjamin T B, Bona J L, Mahong J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos Trans R Soc(Ser A), 1972, **272**: 47—78

[6] Medeiros L A, Perla G M. Existance and uniqueness for periodic solutions of the Benjamin-Bona-Mahony equation.

SIAM J Math Anal, 1977, **8**(5): 792－799

[7] 张卫国,王明亮. B-BBM 方程的一类准确行波解及结构. 数学物理学报,1992,**12**(3):325－331

[8] Ablowitz M J. Lectures on the inverse scattering transform. Studies in Applied Mathematics, 1978, **58**(11): 17－94

[9] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley, 1974

[10] Bogolubsky I L. Some examples of inelastic soliton interaction. Computer Physics Communications, 1977, **13**(2): 149－155

[11] Clarkson P A, Le Veque R J, Saxton R. Solitary-wave interactions in elastic rods. Studies in Applied Mathematics, 1986, **75**(1): 95－122

[12] Saxton R. Existence of solutions for a finite nonlinearly hyperelastic rod. J Math Anal Appl, 1985, **105**(1): 59－75

[13] Wadati M. Wave propagation in nonlinear lattice (Ⅰ), (Ⅱ). J Phys Soc Japan, 1975, **38**(3): 673－680

[14] Dodd R K, et al. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic Press, 1982

[15] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. London: Cambridge University Press, 1991

[16] Farlow S J. Partial Differential Equation for Scientists and Engineers. New York: Wiley Interscience, 1982

[17] Kamke E 著,张鸿林 译. 常微分方程手册. 北京:科学出版社,1980

[18] 张卫国. 几类具 5 次强非线性项的发展方程的显式精确孤波解. 应用数学学报,1998, **21**(2): 249－256

[19] 范恩贵,张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解. 物理学报,1997, **46**(7): 1254－1258

Explicit Exact Solutions for Liénard Equation with Nonlinear Terms of any Degree and its Applications

Zhang Weiguo

(*College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093)

Chang Qianshun

(*Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Sciences, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Li Yongsheng

(*Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract: In this paper, the authors first establish some properties of solutions for Liénard equation with nonlinear terms of any order. Then, explicit exact solutions for the Liénard equation are obtained by proper transformation and undetermined assumption method. By means of these solutions, the authors obtain explicit exact bell and kink profile solitary wave solutions for many nonlinear evolution equation with nonlinear terms of any degree. These nonlinear equations include generalized BBM type, generalized Klein-Gordon, generalized Pochhammer-Chree and generalized wave equation.

Key words: Solitary wave; Liénard equation; Nonlinear evolution equation exact solution; Undetermined assumption method.

MR(2000) Subject Classification: 35Q20; 35Q53