2005, **25A**(5): 593－603

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

具无限时滞中立型泛函微分方程解的稳定性与有界性*

迪申加卜
(武警学院基础部　廊坊 065000)
范猛　王克
(东北师范大学数学系　植被生态教育部重点实验室　长春 130024)

摘要：以(C_h, $|\cdot|_h$)相空间为基础，研究了具有无限时滞中立型泛函微分方程解的稳定性和有界性，建立了方程解为一致稳定，一致渐近稳定的充要性判据；证明了当方程右端泛函满足 *Lipschitz* 条件时，解的一致渐近稳定性蕴涵了有界解的存在性，推广了文献[4－6]中已有的相关结果.

关键词：中立型微分方程；无限时滞；稳定性；有界性；充要条件.

MR(2000)主题分类：34C25；34K20　　**中图分类号**：O175.1　　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)05-593-11

1　引言

解的稳定性和有界性是微分方程研究中两个非常重要的研究课题，许多学者进行了深入而广泛的研究，已取得了丰硕的研究成果[1－3]. 对于稳定性而言，大部分结果都是充分性的，较少涉及必要性、充要性判据，对时滞微分方程(滞后型、中立型)尤为如此. 1994 年，林发兴[4]建立了常微分方程解的一致稳定、一致渐近稳定的充要条件，并进一步讨论了解的稳定性和有界性的关系；1997 年，迪申加卜，王克将文献[4]的结果推广到了滞后型泛函微分方程(有限时滞[5]、无限时滞[6])；2002 年范猛等[7]对于有限时滞中立型泛函微分方程研究了类似的问题，得到了解一致稳定，一致渐近稳定的充要判据，并证明了在 Lipschitz 假设下，解的一致渐近稳定性蕴涵了有界解的存在性. 迄今为止，对于无限时滞中立型泛函微分方程，尚未见到类似结果发表.

本文的目的就是建立无限时滞中立型泛函微分方程解的一致稳定、一致渐近稳定的充要判据，研究解的有界性与稳定性的关系.

2　准备工作

众所周知，无限时滞中立型泛函微分方程理论的发展依赖于相空间的选择. 为了克服无限时滞所引起的困难，首先我们引入(C_h, $|\cdot|_h$)空间.

收稿日期：2003-09-06；修订日期：2004-08-27

E-mail：dishen@126.com

* 基金项目：国家自然科学基金(10171010)和教育部科学技术重点项目(01061)资助

设 $C=C((-\infty,0],R^n)$ 表示所有连续函数 $\varphi:(-\infty,0]\to R^n$ 组成的 Banach 空间；$BC\subset C$ 表示所有有界连续函数组成的空间，其范数为上确界范数，即对任意 $\varphi\in BC$，我们有

$$\|\varphi\| = \sup_{-\infty<\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|.$$

设 $h\in C((-\infty,0],R)$ 为增函数满足 $h(s)>0$ 和 $l=\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<+\infty$。定义

$$C_h=\{\varphi\in C:\int_{-\infty}^{0}h(s)\|\varphi\|^{[s,0]}\mathrm{d}s<+\infty\},$$

对 $\varphi\in C_h$ 定义

$$|\varphi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)\|\varphi\|^{[s,0]}\mathrm{d}s,$$

其中 $\|\varphi\|^{[s,0]}=\sup\limits_{s\leqslant u\leqslant 0}|\varphi(u)|$. 显然，$BC\subset C_h$，容易证明 $(C_h,|\cdot|_h)$ 是 Banach 空间.

对任意给定的 $\alpha>0,\varphi\in C_h,t_0\in R$，定义

$$F_{\alpha,t_0}(\varphi)=\{x:(-\infty,t_0+\alpha]\to R^n,\ x_{t_0}=\varphi,\ x\text{ 在}[t_0,t_0+\alpha]\text{ 上连续}\},$$

$$F_{\alpha,t_0}(C_h)=\bigcup_{\varphi\in C_h}F_{\alpha,t_0}(\varphi).$$

由文[8]、[9] 可知，$(C_h,|\cdot|_h)$ 满足文[10]中关于相空间 B 的假设

(β_1) 对任意 $\varphi\in C_h$；有 $|\varphi(0)|\leqslant\dfrac{1}{l}|\varphi|_h$；

(β_2) 对任意 $t_0\in R,\alpha\geqslant 0,x\in F_{\alpha,t_0}(C_h),t\in[t_0,t_0+\alpha]$，我们有 $x_t\in C_h$，而且 x_t 在 $[t_0,t_0+\alpha]$ 上关于 t 连续；

(β_3) 对任意 $t_0\in R,\alpha\geqslant 0,x\in F_{\alpha,t_0}(C_h)$，有 $|x_{t_0+\alpha}|_h\leqslant 2l\sup\limits_{s\in[t_0,t_0+\alpha]}|x(s)|+|x_{t_0}|_h$.

容易证明，$(C_h,|\cdot|_h)$ 空间是文[11]所定义的相空间的特例.

考虑具有无限时滞中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Dx_t}{\mathrm{d}t}=f(t,x_t),\tag{1}$$

其中

$$x_t(s)=x(t+s),\ s\in(-\infty,0].$$

定义 1[9] 称方程(1)中的算子 D 是 h 一致稳定的，如果存在常数 $k_1>0,k_2>0$ 使得广义差分方程 $Dx_t=g(t),t\geqslant t_0,x_{t_0}=\varphi$ 的解 $x_t(t_0,\varphi)$ 满足

$$|x(t_0,\varphi)(t)|\leqslant k_1\sup_{\theta\in[t_0,t]}|g(\theta)|+k_2|x_{t_0}|_h,$$

其中

$$\varphi\in C_h,x_t\in C_h,g\in C([t_0,+\infty),R^n).$$

在方程(1)中，我们假设

(H_1) $f:R\times C_h\to R^n$ 连续；

(H_2) $D:C_h\to R^n$ 是线性、一致有界连续算子且 h 一致稳定的；

(H_3) 存在正常数 k,M，使得对任意 $(t,\varphi),(t,\psi)\in R\times C_h$，有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant k|\varphi-\psi|_h,\tag{2}$$

$$|f(t,0)|\leqslant M,\tag{3}$$

由 D 算子的假设，存在常数 $R>0$，使得对任意 $\varphi\in C_h$，均有 $|D\varphi|\leqslant R|\varphi|_h$. 方程(1)过 $(t_0,\varphi)\in R\times C_h$ 的解记为 $x_t(t_0,\varphi)$，则在上述假设之下，由文[11]易知，对任意 $(t_0,\varphi)\in R\times C_h$，方程(1)存在唯一解 $x_t(t_0,\varphi)$，而且满足解对初始条件的连续相依性. 此外，如果解是有界的，则延拓到无穷.

定义 2 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $(t_0,\varphi),(t_0,\psi)\in R^+\times C_h$，当 $|\varphi-\psi$

$|_h<\delta$ 时,对一切 $t\geqslant t_0$ 有 $|x_t(t_0,\varphi)-x_t(t_0,\psi)|_h<\varepsilon$,则称(1)的解是 h 一致稳定的.

定义 3　如果方程(1)的解是 h 一致稳定的,而且存在 $\delta_0>0$,对于任给 $\varepsilon>0$,总有 $T=T(\varepsilon)>0$,当 $|\varphi-\psi|_h<\delta_0$ 时 $|x_t(\tau,\varphi)-x_t(\tau,\psi)|_h<\varepsilon(t\geqslant\tau+T)$ 成立,则称方程(1)的解是 h 一致渐近稳定的.

定义 4　如果 $W:R^+\to R$ 连续且当 $x>0$ 时 $W(x)>0$,$W(0)=0$,则称 $W(x)$ 为正定函数.

定义 5　如果 $V:R^+\times C_h\times C_h\to R$ 连续,而且存在正定函数 $W(x)$,使得对于任意 $t\in R^+$,$\varphi,\psi\in C_h$ 均有 $V(t,\varphi,\psi)\geqslant W(|\varphi-\psi|_h)$,则称 $V(t,\varphi,\psi)$ 为正规泛函.

定义 6　如果 $V:R^+\times C_h\times C_h\to R$ 连续,而且存在正定函数 $W(x)$,使得对于任意 $t\in R^+$,$\varphi,\psi\in C_h$ 均有 $V(t,\varphi,\psi)\leqslant W(|\varphi-\psi|_h)$,则称 $V(t,\varphi,\psi)$ 为可控泛函.

3　解的一致稳定性、一致渐近稳定性与有界性

引理 1[6]　泛函 $V(t,\varphi,\psi)$ 为正规泛函的充要条件是:对于 C_h 的任一有界集 D 以及任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $\varphi-\psi\in D$,$|\varphi-\psi|_h\geqslant\varepsilon$ 时 $V(t,\varphi,\psi)\geqslant\delta$ 成立.

引理 2[6]　泛函 $V(t,\varphi,\psi)$ 为可控泛函的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $|\varphi-\psi|_h\leqslant\delta$时,对一切 $t\in R^+$,$|V(t,\varphi,\psi)|\leqslant\varepsilon$.

如果方程(1)的解是 h 一致渐近稳定的,令

$$V(t,\varphi,\psi)=\sup_{\tau\geqslant 0}\Big(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\Big).\tag{4}$$

在此假设下,我们容易证明:$V(t,\varphi,\psi)$ 是正规、可控泛函,而且有 $|\varphi-\psi|_h\leqslant V(t,\varphi,\psi)$.

由上述 V 泛函的定义及解的 h 一致渐近稳定的定义,我们容易得到

引理 3　对于 $\varepsilon:0<\varepsilon<\dfrac{\delta_0}{4}$,$\delta>0$,当 $|\varphi-\psi|_h\geqslant 2\varepsilon$ 时,由(4)式定义的 V 泛函满足

$$V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi),x_{t+\delta}(t,\psi))\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\Big(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta}\Big),$$

特别当 $\delta=0$ 时有

$$V(t,\varphi,\psi)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\Big(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\Big),$$

其中 δ_0,$T=T(\varepsilon)$ 与定义 3 相同.

定理 1　方程(1)的解是 h 一致稳定的充要条件是:存在正规、可控泛函 $V(t,\varphi,\psi)$,使得 $V(t,x_t(t_0,\varphi),x_t(t_0,\psi))$ 对于任意 $t_0\in R^+$,$\varphi,\psi\in C_h$ 关于 t 是单调不增的.

对于 $V:R^+\times C_h\times C_h\to R$ 连续,我们定义

$$V'_{(1)}(t,\varphi,\psi)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\delta}[V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi),x_{t+\delta}(t,\psi))-V(t,\varphi,\psi)].$$

定理 2　方程(1)的解是 h 一致渐近稳定的充要条件是:存在正规、可控泛函 $V(t,\varphi,\psi)$,使得 $-V'_{(1)}(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

利用文献[6]中所使用的方法以及引理 1、引理 2、引理 3,我们容易完成定理 1、定理 2 的证明,这里省去它们的证明.

引理 4　如果(2)、(3)式成立,则对于任意 $\tau,t\in R^+$,$\varphi\in C_h$,有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)|_h\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1M\tau\}\exp(2lk_1k\tau).$$

证 对于任意 $u\geqslant t$，有

$$Dx_u(t,\varphi)=D\varphi+\int_t^u f(s,x_s(t,\varphi))\mathrm{d}s=g(u).$$

由 D 算子的一致稳定的定义，有

$$\begin{aligned}|x(t,\varphi)u|&\leqslant k_1\sup_{\theta\in[t,u]}\left|D\varphi+\int_t^\theta f(s,x_s)\mathrm{d}s\right|+k_2|\varphi|_h\\&\leqslant k_1R|\varphi|_h+k_1\int_t^u|f(s,x_s)|\mathrm{d}s+k_2|\varphi|_h\\&=(k_1R+k_2)|\varphi|_h+k_1\int_t^u|f(s,x_s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由(β_3)，对任意 $r:0\leqslant r\leqslant\tau$，我们有

$$\begin{aligned}|x_{t+r}|_h&\leqslant 2l\sup_{u\in[t,t+r]}|x(u)|+|\varphi|_h\\&\leqslant 2l(k_1R+k_2)|\varphi|_h+2lk_1\sup_{u\in[t,t+r]}\int_t^u|f(s,x_s)|\mathrm{d}s+|\varphi|_h\\&\leqslant[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1\int_t^{t+r}|f(s,x_s)|\mathrm{d}s\\&=[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1\int_0^r|f(s+t,x_{s+t})|\mathrm{d}s\\&\leqslant[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1\int_0^r|f(s+t,x_{s+t})-f(s+t,0)|\mathrm{d}s\\&\quad+2lk_1\int_0^r|f(s+t,0)|\mathrm{d}s\\&\leqslant[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1k\int_0^r|x_{s+t}|_h\mathrm{d}s+2lk_1M\tau.\end{aligned}$$

即

$$|x_{t+r}|_h\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1M\tau\}+2lk_1k\int_0^r|x_{s+t}|_h\mathrm{d}s.$$

由 Bellman 不等式，有

$$|x_{t+r}|_h\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1M\tau\}\exp(2lk_1kr),$$

取 $r=\tau$，则有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)|_h\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1M\tau\}\exp(2lk_1k\tau).$$ ▌

引理 5 如果(2)式成立，则对于任意 $\tau,t\in R^+,\varphi,\psi\in C_h$，有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\leqslant[(2lk_1R+2lk_2+1)|\varphi|_h]\exp(2lk_1k\tau).$$

证 对于任意 $u\geqslant t$，有

$$Dx_u(t,\varphi)=D\varphi+\int_t^u f(s,x_s(t,\varphi))\mathrm{d}s,$$

$$Dx_u(t,\psi)=D\psi+\int_t^u f(s,x_s(t,\psi))\mathrm{d}s,$$

所以

$$Dx_u(t,\varphi)-Dx_u(t,\psi)=D\varphi-D\psi+\int_t^u[f(s,x_s(t,\varphi))-f(s,x_s(t,\psi))]\mathrm{d}s.$$

注意到 D 是线性算子，故

$$D[x_u(t,\varphi)-x_u(t,\psi)]=D(\varphi-\psi)+\int_t^u[f(s,x_s(t,\varphi))-f(s,x_s(t,\psi))]\mathrm{d}s.$$

由 D 算子的一致稳定的定义,有

$$\begin{aligned}&|x(t,\varphi)u-x(t,\psi)u|\\ \leqslant&k_1\sup_{\theta\in[t,u]}|D(\varphi-\psi)|+k_1\sup_{\theta\in[t,u]}\int_t^\theta[f(s,x_s(t,\varphi))-f(s,x_s(t,\psi))]\mathrm{d}s+k_2|\varphi-\psi|_h\\ \leqslant&k_1R|\varphi-\psi|_h+k_1k\int_t^u|x_s(t,\varphi)-x_s(t,\psi)|_h\mathrm{d}s+k_2|\varphi-\psi|_h,\end{aligned}$$

即

$$|x(t,\varphi)u-x(t,\psi)u|\leqslant(k_1R+k_2)|\varphi-\psi|_h+k_1k\int_t^u|x_s(t,\varphi)-x_s(t,\psi)|_h\mathrm{d}s.$$

由(β_3),对任意 $r\geqslant0$,我们有

$$\begin{aligned}&|x_{t+r}(t,\varphi)-x_{t+r}(t,\psi)|_h\\ \leqslant&2l\sup_{u\in[t,t+r]}|x(t,\varphi)u-x(t,\psi)u|+|\varphi-\psi|_h\\ \leqslant&2l(k_1R+k_2)|\varphi-\psi|_h+2lk_1k\int_t^{t+r}|x_s(t,\varphi)-x_s(t,\psi)|_h\mathrm{d}s+|\varphi-\psi|_h,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&|x_{t+r}(t,\varphi)-x_{t+r}(t,\psi)|_h\\ \leqslant&(2lk_1R+2lk_2+1)|\varphi-\psi|_h+2lk_1k\int_0^r|x_{s+t}(t,\varphi)-x_{s+t}(t,\psi)|_h\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 Bellman 不等式得到

$$|x_{t+r}(t,\varphi)-x_{t+r}(t,\psi)|_h\leqslant[(2lk_1R+2lk_2+1)|\varphi-\psi|_h]\exp(2lk_1kr).$$

取 $r=\tau$ 就有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\leqslant[(2lk_1R+2lk_2+1)|\varphi-\psi|_h]\exp(2lk_1k\tau).$$ ▌

引理 6　如果(2)式成立,且(1)式的解是一致渐近稳定的,则对于任意 $t\in R^+,\varphi,\psi_1,\psi_2\in C_h$ 以及 $\varepsilon>0$,当 $|\varphi-\psi_1|_h\geqslant2\varepsilon,|\varphi-\psi_2|_h\geqslant2\varepsilon$ 时有

$$|V(t,\varphi,\psi_1)-V(t,\varphi,\psi_2)|\leqslant2(2lk_1R+2lk_2+1)|\psi_1-\psi_2|_h\exp(2lk_1kT).$$

证　由引理 3 和引理 5,有

$$\begin{aligned}&|V(t,\varphi,\psi_1)-V(t,\varphi,\psi_2)|\\ =&|\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi_1)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau})\\ &-\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi_2)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau})|\\ \leqslant&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,\psi_1)-x_{t+\tau}(t,\psi_2)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}|)\\ \leqslant&2(2lk_1R+2lk_2+1)|\psi_1-\psi_2|_h\exp(2lk_1kT).\end{aligned}$$ ▌

引理 7　如果(2)、(3)式成立,且 $x_t(0,\varphi)$ 在$[0,+\infty)$上无界,则存在数列$\{\tau_m\}$,$\{t_m\}$满足:$\tau_m\leqslant t_m$,且当 $m\to+\infty$ 时 $t_m-\tau_m\to+\infty$,$|x_{\tau_m}(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h$;当 $t\in[\tau_m,t_m]$ 时 $|x_t(0,\varphi)|_h\geqslant|\varphi|_h$,且当 $m\to+\infty$ 时,$|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to+\infty$.

证　因为 $x_t(0,\varphi)$ 在$[0,+\infty)$上无界,所以存在正项数列$\{t_m\}$,使得当 $m\to+\infty$ 时 $t_m\to+\infty$ 且 $|\varphi|_h\leqslant|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to+\infty$. 对于每个 m,令 $G_m=\{\tau\in[0,t_m]:|x_\tau(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h\}$,显然 G_m 有界、非空,从而有上确界,设 $\tau_m=\sup G_m$.

下面证明$\{\tau_m\}$,$\{t_m\}$满足要求. 由于当$m\to+\infty$时$|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to+\infty$,由$\tau_m$的选取以及$x_t(0,\varphi)$关于$t$的连续性,$|x_{\tau_m}(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h$,且当$t\in[\tau_m,t_m]$时,$|x_t(0,\varphi)|_h\geqslant|\varphi|_h$. 剩下的要证明当$m\to+\infty$时$t_m-\tau_m\to+\infty$. 用反证法.

若不然,存在$\{t_m-\tau_m\}$的子列$\{t_{m_k}-\tau_{m_k}\}$有界,设存在正常数L,使$t_{m_k}-\tau_{m_k}\leqslant L$,由解的唯一性及引理4,我们得到

$$
\begin{aligned}
|x_{t_{m_k}}(0,\varphi)|_h&=|x_{t_{m_k}}(\tau_{m_k},x_{\tau_{m_k}}(0,\varphi))|_h\\
&\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|x_{\tau_{m_k}}(0,\varphi)|_h+2lk_1M(t_{m_k}-\tau_{m_k})\}\\
&\quad\cdot\exp(2lk_1k(t_{m_k}-\tau_{m_k}))\\
&\leqslant\{[2l(k_1R+k_2)+1]|\varphi|_h+2lk_1ML\}\exp(2lk_1kL).
\end{aligned}
$$

这与当$m\to+\infty$时$|x_{t_{m_k}}(0,\varphi)|_h\to+\infty$相矛盾,所以当$m\to+\infty$时$t_m-\tau_m\to+\infty$. ▌

定理3 如果(2)、(3)式成立,且(1)式的解是h一致渐近稳定的,则对于任意$\varphi\in C_h$,(1)式的解$x_t(0,\varphi)$在$[0,+\infty)$上有界.

证 取$\varphi_0\in C_h$,满足$|\varphi_0|_h=\delta_0$,其中δ_0与定义3相同. 先证$x_t(0,\varphi_0)$在$[0,+\infty)$上有界. 用反证法. 若不然,由引理7,存在数列$\{\tau_m\}$,$\{t_m\}$满足:$\tau_m\leqslant t_m$,且当$m\to+\infty$时$t_m-\tau_m\to+\infty$,而$|x_{\tau_m}(0,\varphi_0)|_h=|\varphi_0|_h=\delta_0$,$|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h\to+\infty$,且当$t\in[\tau_m,t_m]$时$|x_t(0,\varphi_0)|_h\geqslant\delta_0$. 取$\delta$充分小使$2lk_1M\delta\exp(2lk_1k\delta)\leqslant\frac{\delta_0}{2}$,任取$t,t+\delta\in[\tau_m,t_m]$,则$|x_{t+\delta}(0,\varphi_0)|_h\geqslant\delta_0$. 由引理4,$|x_{t+\delta}(t,0)|_h\leqslant2lk_1M\delta\exp(2lk_1k\delta)\leqslant\frac{\delta_0}{2}$,所以$|x_{t+\delta}(0,\varphi_0)-x_{t+\delta}(t,0)|_h\geqslant\frac{\delta_0}{2}$. 取$\varepsilon=\frac{\delta_0}{4}$,由引理6得到

$$
\begin{aligned}
&|V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)-V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))|\\
&\leqslant2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT),
\end{aligned}
$$

其中$T=T(\frac{\delta_0}{4})$随δ_0确定而确定. 由上式及引理6、引理3,当$t,t+\delta\in[\tau_m,t_m]$时

$$
\begin{aligned}
&V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)\\
&=V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))\\
&\quad+[V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)-V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))]\\
&\leqslant V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT)\\
&=V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,x_t(0,\varphi_0)),x_{t+\delta}(t,0))+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT)\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta})\\
&\quad+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT)\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h(\frac{1+2\tau}{1+\tau})(1-\frac{\delta}{(1+2\tau)(1+\tau-\delta)}))\\
&\quad+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT)\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}(|x_{t+\tau}(t,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h(\frac{1+2\tau}{1+\tau})(1-\frac{\delta}{(1+2T)^2}))\\
&\quad+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT)\\
&\leqslant V(t,x_t(0,\varphi_0),0)(1-\frac{\delta}{(1+2T)^2})+2(2lk_1R+2lk_2+1)|x_{t+\delta}(t,0)|_h\exp(2lk_1kT).
\end{aligned}
$$

当 $t\in[\tau_m,t_m]$时，由上式及引理 4 可得

$$
\begin{aligned}
&V'_{(1)}\quad(t,x_t(0,\varphi_0),0)\\
=&\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta}[V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)-V(t,x_t(0,\varphi_0),0)]\\
\leqslant&-\frac{1}{(1+2T)^2}V(t,x_t(0,\varphi_0),0)\\
&+\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta}2(2lk_1R+2lk_2+1)\mid x_{t+\delta}(t,0)\mid_h\exp(2lk_1kT)\\
\leqslant&-\frac{1}{(1+2T)^2}V(t,x_t(0,\varphi_0),0)\\
&+\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta}2(2lk_1R+2lk_2+1)2lk_1M\delta\exp(2lk_1k\delta)\exp(2lk_1kT)\\
\leqslant&-\frac{1}{(1+2T)^2}V(t,x_t(0,\varphi_0),0)+4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT).
\end{aligned}
$$

因而当 $t\in[\tau_m,t_m]$时，由比较定理，有

$$
\begin{aligned}
&V(t,x_t(0,\varphi_0),0)\\
\leqslant&\exp\left(-\frac{t-\tau_m}{(1+2T)^2}\right)[V(\tau_m,x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0)\\
&-(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT)]\\
&+(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT)\\
\leqslant&V(\tau_m,x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0)+(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT).
\end{aligned}
$$

令 $t=t_m$，有

$$
\begin{aligned}
&V(t_m,x_{t_m}(0,\varphi_0),0)\\
\leqslant&V(\tau_m,x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0)+(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT).
\end{aligned}
$$

由于 $V(t,\varphi,\psi)$是可控泛函，且 $|x_{\tau_m}(0,\varphi_0)|_h=\delta_0$，由引理 2 存在 $L>0$，使得 $V(\tau_m,x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0)\leqslant L$. 因此

$$V(t_m,x_{t_m}(0,\varphi_0),0)\leqslant L+(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT),$$

由于 $|\varphi-\psi|_h\leqslant V(t,\varphi,\psi)$，所以

$$|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h\leqslant L+(1+2T)^2 4(2lk_1R+2lk_2+1)lk_1M\exp(2lk_1kT).$$

这与当 $m\to+\infty$时 $|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h\to+\infty$相矛盾，从而 $x_t(0,\varphi_0)$在$[0,+\infty)$上有界.

任取 $\varphi\in C_h$，可选取 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in C_h$，使得 $|\varphi_0-\varphi_1|_h<\delta_0$，$|\varphi_1-\varphi_2|_h<\delta_0$，…，$|\varphi_m-\varphi|_h<\delta_0$，因此由(1)式的解的一致渐近稳定性的定义，当 $t\to+\infty$时

$$|x_t(0,\varphi_0)-x_t(0,\varphi)|_h\leqslant|x_t(0,\varphi_0)-x_t(0,\varphi_1)|_h+\cdots+|x_t(0,\varphi_m)-x_t(0,\varphi)|_h\to0,$$

所以 $x_t(0,\varphi)$在$[0,+\infty)$上有界. ▎

4　对 Volterra 积分微分方程的应用

考虑具有无限时滞中立型积分微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)-\int_{-\infty}^{t}C(t-s)x(s)\mathrm{d}s\right)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}E(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t),\tag{5}$$

其中 $x\in R^n$，$A(t)$在 R 上连续，$C(t-s)$和 $E(t,s)$在 $R\times R$ 上连续，$f:R\to R$ 连续.

考虑(5)式所定义的算子 D

$$Dx_t = x(t) - \int_{-\infty}^{0} C(-s)x_t(s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

引理 8[12] 若 $|C(-s)| \leqslant h(s), s \in R^-$, $\int_{-\infty}^{0} C(-s)\mathrm{d}s = m < 1$, 则(6)式所定义的算子 D 为 h 一致稳定的.

对于(5)式,右端泛函为

$$F(t,\varphi) = A(t)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} E(t,s+t)\varphi(s)\mathrm{d}s + f(t). \tag{7}$$

引理 9 假设存在常数 $M_1 > 0$,使得 $|A(t)| \leqslant M_1$. 如果存在连续函数 $h: R^- \rightarrow R^+$ 恒正,且满足 $l = \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < +\infty$ 以及有界连续函数 $H: R \times R \rightarrow R^+$,使得 $|E(u, v+r)| \leqslant H(u, v)h(r), u, v \in R, r \in R^-$,则 $F(t,\varphi)$ 在 $R \times C_h$ 上连续且满足条件(2).

证 易证 $F(t,\varphi)$ 在 $R \times C_h$ 上连续. 设存在常数 $M_2 > 0$,使得 $|H(u,v)| \leqslant M_2$. 对于 $(t, \varphi), (t, \psi) \in R^+ \times C_h$

$$\begin{aligned} |F(t,\varphi) - F(t,\psi)| &\leqslant |A(t)\varphi(0) - A(t)\psi(0)| + \Big| \int_{-\infty}^{0} E(t,s+t)\varphi(s)\mathrm{d}s \\ &\quad - \int_{-\infty}^{0} E(t,s+t)\psi(s)\mathrm{d}s \Big| \\ &\leqslant M_1 l^{-1} |\varphi - \psi|_h + \int_{-\infty}^{0} E(t,s+t) |\varphi(s) - \psi(s)| \mathrm{d}s \\ &\leqslant M_1 l^{-1} |\varphi - \psi|_h + H(t,t)\int_{-\infty}^{0} h(s) |\varphi(s) - \psi(s)| \mathrm{d}s \\ &\leqslant M_1 l^{-1} |\varphi - \psi|_h + M_2 |\varphi - \psi|_h \\ &\leqslant (M_1 l^{-1} + M_2) |\varphi - \psi|_h. \end{aligned}$$

即条件(2)成立. ∎

引理 10 如果存在常数 $M_3 > 0$,使得任意 $t \in R^+$ 有 $|f(t)| \leqslant M_3$,则 $|F(t,0)| \leqslant M_3$,即 $F(t,\varphi)$ 满足条件(3).

于是方程(5)满足初始条件的解的存在、唯一性,而且满足解对初始条件的连续相依性. 此外,如果解是有界的,则延拓到无穷.

方程(5)的等价形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dx_t = A(t)Dx_t + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)\mathrm{d}s + f(t),$$

其中 $D(t,s) = E(t,s) + A(t)C(t-s)$. (5)式的伴随系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dx_t = A(t)Dx_t + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)\mathrm{d}s + f(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dy_t = A(t)Dy_t + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} D(t,s)y(s)\mathrm{d}s + f(t). \end{cases} \tag{8}$$

定义泛函

$$\begin{aligned} V(t,x_t,y_t) = &|Dx_t - Dy_t| + k_5 \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} |D(u,s)| |x(s) - y(s)| \mathrm{d}u\mathrm{d}s \\ &+ k_6 \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} |C(u-s)| |x(s) - y(s)| \mathrm{d}u\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{9}$$

定理 4 如果引理 8、9、10 的条件满足,且

(a) 存在 $R\times R\to R^{+}$ 的连续函数 $Q_1(u,v)$ 和 $Q_2(u,v)$,使得

$$Q_1(u,v)h(r)\leqslant|C(u-(v+r))|\leqslant Q_2(u,v)h(r)$$

且存在正常数 b,c,使得 $b\leqslant\int_t^{+\infty}Q_1(u,t)\mathrm{d}u<+\infty,\int_t^{+\infty}Q_1(u,t)\mathrm{d}u\leqslant c<+\infty$;

(b) 存在 $R\times R\to R^{+}$ 的连续函数 $H(u,v)$,使得

$$|E(u,v+r)|\leqslant H(u,v)h(r),\quad u,v\in R,r\in R^{-}$$

且存在正常数 a,使得 $\int_t^{+\infty}H(u,t)\mathrm{d}u\leqslant a<+\infty$;

(c) 存在正常数 k_6,使得 $k_7=k_5\int_t^{+\infty}|D(u,t)|\mathrm{d}u+k_6\int_t^{+\infty}C(u-t)\mathrm{d}u\leqslant k_6$;

(d) 存在正常数 k_8,使得 $\int_t^{+\infty}|C(u-s)|\mathrm{d}u\leqslant k_8|C(t-s)|$;

(e) 存在正常数 δ,及 $k_5:1<k_5<2$,使得 $(2-k_5)A(t)+k_7\leqslant-\delta$,

则(5)式的解是 h 一致稳定和 h 一致渐近稳定的.

证　首先证明由(9)式所定义的泛函 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规、可控泛函. 由 $V(t,\varphi,\psi)$ 的定义、C_h 空间的性质以及条件(a),有

$$V(t,x_t,y_t)\geqslant k_6\int_{-\infty}^0\int_t^{+\infty}|C(u-(s+t))||x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$\geqslant k_6b\int_{-\infty}^0 h(s)|x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

所以 $V(t,x_t,y_t)\geqslant k_6b\int_{-\infty}^0 h(s)|x_t(s)-y_t(s)|^{[s,0]}\mathrm{d}s\geqslant k_6b|x_t-y_t|_h$, 即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

$$\begin{aligned}
&V(t,x_t,y_t)\\
&\leqslant|D(x_t-y_t)|+k_5\int_{-\infty}^0\int_t^{+\infty}|D(u,s+t)||x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
&\quad+k_6\int_{-\infty}^0\int_t^{+\infty}|C(u-(s+t))||x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
&\leqslant|D(x_t-y_t)|+k_5\int_t^{+\infty}[|A(t)|H(u,t)+Q_2(u,t)]\mathrm{d}u\int_{-\infty}^0 h(s)|x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}s\\
&\quad+k_6\int_t^{+\infty}Q_2(u,t)\mathrm{d}u\int_{-\infty}^0 h(s)|x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}s\\
&\leqslant[R+k_5(a+M_1c)+k_6c]|x_t-y_t|_h,
\end{aligned}$$

即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函.

下面证明 $V(t,x_t(t_0,\varphi),x_t(t_0,\psi))$ 对 $t_0\in R^{+},\varphi,\psi\in C_h$ 关于 t 是单调不增的.

$$\begin{aligned}
&V'_{(8)}\quad(t,x_t,y_t)\\
&\leqslant(Dx_t-Dy_t)^T(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dx_t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dy_t)/|Dx_t-Dy_t|\\
&\quad+k_5\int_t^{+\infty}|D(u,t)||x(t)-y(t)|\mathrm{d}u-k_5\int_{-\infty}^t|D(t,s)||x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\
&\quad+k_6\int_t^{+\infty}|C(u-t)||x(t)-y(t)|\mathrm{d}u-k_6\int_{-\infty}^t|C(t-s)||x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\
&\leqslant|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dx_t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Dy_t|+k_5\int_t^{+\infty}|D(u,t)||x(t)-y(t)|\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-k_5\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
&+k_6\int_{t}^{+\infty}|C(u-t)||x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}u-k_6\int_{-\infty}^{t}|C(t-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&A(t)|Dx_t-Dy_t|+\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
&+k_5\int_{t}^{+\infty}|D(u,t)||x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}u-k_5\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
&+k_6\int_{t}^{+\infty}|C(u-t)||x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}u-k_6\int_{-\infty}^{t}|C(t-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&A(t)|Dx_t-Dy_t|+(1-k_5)\Big[\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Dx_t-Dy_t)\Big|-A(t)|Dx_t-Dy_t|\Big]\\
&-k_6\int_{-\infty}^{t}|C(t-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
&+\Big[k_5\int_{t}^{+\infty}|D(u,t)|\,\mathrm{d}u+k_6\int_{t}^{+\infty}|C(u-t)|\,\mathrm{d}u\Big]|x(t)-y(t)|\\
\leqslant{}&(2-k_5)A(t)|Dx_t-Dy_t|+(1-k_5)\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Dx_t-Dy_t)\Big|\\
&+k_7|x(t)-y(t)|-k_6\int_{-\infty}^{t}|C(t-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&[(2-k_5)A(t)+k_7]|Dx_t-Dy_t|+(1-k_5)\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Dx_t-Dy_t)\Big|\\
&+(k_7-k_6)\int_{-\infty}^{t}|C(t-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&[(2-k_5)A(t)+k_7]|Dx_t-Dy_t|\\
&+(k_6-k_7)k_8^{-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
\leqslant{}&-\delta|Dx_t-Dy_t|+(k_6-k_7)k_8^{-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

于是 $V(t,x_t(t_0,\varphi),x_t(t_0,\psi))$ 对 $t_0\in R^+,\varphi,\psi\in C_h$ 关于 t 是单调不增的，由定理 1 知，(5)的解是 h 一致稳定的.

由于

$$
\begin{aligned}
-V'_{(8)}(t,x_t,y_t)&\geqslant\delta|Dx_t-Dy_t|+(k_6-k_7)k_8^{-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
&\geqslant(k_6-k_7)k_8^{-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u-s)||x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

所以 $-V'_{(8)}(t,x_t,y_t)\geqslant(k_6-k_7)k_8^{-1}k_6 b|x_t-y_t|_h$，即 $-V'_{(8)}(t,x_t,y_t)$ 是正规泛函. 由定理 2，方程(5)的解是 h 一致渐近稳定的. ▍

定理 5 若引理 8、9、10 的条件满足，且(5)式的解是 h 一致渐近稳定的，那么(5)式的解 $x_t(0,\varphi)(\varphi\in C_h)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

由定理 3 直接得到结论，从略.

参 考 文 献

[1] Burton T A. Volterra Integral and Differential Equations. Orlando：Acedemic Press，1983

[2] Burton T A. Boundedness in functional differential equations. Funkcialaj Ekvacioj，1982，**25**(1)

[3] Haddock J R. Liapunov functions and boundedness and global existence of solutions. Applicable Anal，1972，**1**：321－330

[4] 林发兴. 一致稳定性和周期解、概周期解的存在性. 中国科学(A 辑)，1994，**4**：361－370

[5] Di S，Wang K. Uniformly asymptotic stability and existence of almost periodic solutions for functional differential equations. Northeast Math J，1999，**15**(1)：32－38

[6] 迪申加卜，王克. 无限时滞泛函微分方程解的稳定性与有界性. 数学学报，1997，**40**(4)：511－520

[7] Fan M，Di S，Wang K. Stability and boundedness of the solutions to neutral functional differential equations with finite delay. J Math Anal Appl，2002，**276**：545－560

[8] 王克，黄启昌. C_h 空间与具无限时滞泛函微分方程的有界性与周期解. 中国科学(A 辑)，1987，**3**：242－252

[9] 范猛，王克. 无限时滞线性中立型泛函微分方程的周期解. 数学学报，2000，**43**(4)：695－702

[10] Sawano K. Exponentioal asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations. Tohoku Math J，1979，**31**：363－382

[11] 吴建宏. 无限时滞中立型泛函微分方程的局部理论. 应用数学学报，1985，**8**(4)：472－481.

[12] 石磊. 具无穷时滞中立型泛函微分方程的解的有界性与周期性. 科学通报，1990，**6**：409－411.

[13] 李森林，温立志. 泛函微分方程. 长沙：湖南科学技术出版社，1987

Stability and Boundedness of Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delay

Di Shenjiabu

(*The Chinese People's Armed Police Forces Academy*，*Langfang* 065000)

Fan Meng　Wang Ke

(*Department of Mathematics*，*Key Laboratory for Vegetation Ecology of the Education Ministry of China*，*Northeast Normal University*，*Changchun* 130024)

Abstract：With the help of the phase space (C_h，$|\cdot|_h$)，sufficient and necessary criterias are established for the uniform stability and uniformly asymptotic stability of solutions to neutral functional differential equations with infinite delay. In addition，the author also prove that the uniformly asymptotic stability of solutions implies the existence of the bounded solutions when the equation satisfies Lipschitz assumption.

Key words：Neutral differential equations；Infinite delay；Stability；Boundedness；Necessary and sufficient conditions.

MR(2000) Subject Classification：34C25；34K20