2009,**29A**(3):643–650

Mathematica Scientia Acta 数学物理学报

手性障碍电磁散射的 PML 有限元计算 *

[1] 高天玲 [2] 马富明

([1] 深圳大学数学与计算科学学院 广东深圳 518060; [2] 吉林大学数学学院 长春 130021)

摘要：该文建立了手性障碍电磁散射问题的二维模型，给出问题的有限元分析，并利用结合 PML(perfectly matched layers) 技术的有限元法进行数值模拟.

关键词：手性； PML; 有限元法.

MR(2000) 主题分类: 65N06 **中图分类号**: O242.21 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-643-08

1 问题模型

在各向同性手性介质中，电磁场遵循 Maxwell 方程组

$$\nabla\times\mathbf{E}-\frac{\mathrm{i}k}{\mu}\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{H}+\frac{\mathrm{i}k}{\varepsilon}\mathbf{D}=0, \tag{1}$$

以及 Drude-Born-Fedorov (DBF) 本构方程 [1]

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\mathbf{E}+\beta\nabla\times\mathbf{E}),\qquad \mathbf{B}=\mu(\mathbf{H}+\beta\nabla\times\mathbf{H}), \tag{2}$$

其中 $\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别表示电场、磁场、电位移和磁感应强度， ε 和 μ 分别是手性介质的介电系数和磁导率， $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 为波数， β 是手性导纳 (chirality admittance), 它在一定程度上可以反映手性介质的旋光性强度.

结合 (1) 和 (2) 式有在手性介质中 E,H 满足

$$\nabla\times\mathbf{E}=\gamma^2\beta\mathbf{E}+\mathrm{i}\frac{\gamma^2}{k}\mathbf{H},\qquad \nabla\times\mathbf{H}=\gamma^2\beta\mathbf{H}-\mathrm{i}\frac{\gamma^2}{k}\mathbf{E}, \tag{3}$$

其中 $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\gamma^2=\frac{k^2}{1-(k\beta)^2}$. 始终假设 $k\beta<1$.

下面建立有界手性障碍电磁散射问题的模型. 如图 1, 假设有界手性障碍是一个平行于 x_3 方向的柱体 $\tilde{D}=\{x\in\mathbb{R}^3|\,(x_1,x_2)\in D,x_3\in\mathbb{R}\}$. D 是柱体 $\tilde{D}$ 在 x_1-x_2 平面的截面，是单连通的，其边界 ∂D 是 $C^{2,\alpha}$ 的. $\tilde{D}$ 内是手性导纳为 β 的手性介质. $\tilde{D}$ 周围是介电常数 ε, 磁导率是 μ 的介质，距离 $\tilde{D}$ 充分远处为真空. 考虑以平面波形式入射的电磁场入射到有界手性介质障碍 $\tilde{D}$ 的电磁散射情况.

收稿日期：2007-10-30; 修订日期：2009-03-30

E-mail: tlgao@szu.edu.cn

* 基金项目：深圳大学校级基金 (200855) 和国家自然科学基金 (10726050, 10801063) 资助

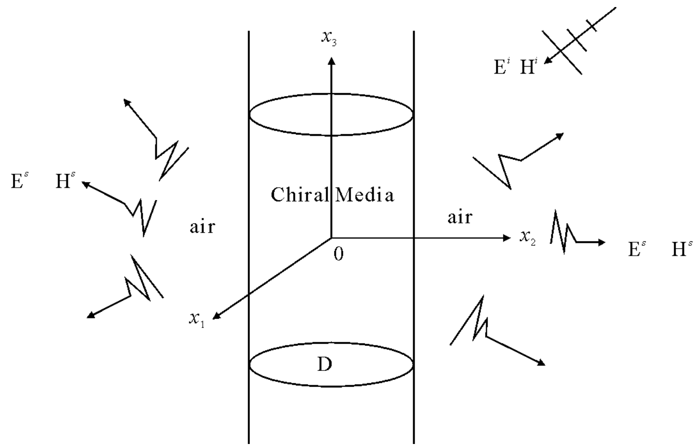

图 1 有界手性介质障碍电磁散射

假设所有的参数与 x_3 分量无关，电磁场 $\mathbf{E},\mathbf{H}$ 各个分量也都与 x_3 无关. 令 $\mathbf{E}=(e_1,e_2,e_3)^T,\mathbf{H}=(h_1,h_2,h_3)^T$. 代入 (3) 式，有

$$\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla e_3)-\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla h_3)=-\mathrm{i}\gamma^2\beta h_3-\frac{\gamma^2}{k}e_3,\tag{4}$$

$$\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla h_3)+\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla e_3)=\mathrm{i}\gamma^2\beta e_3-\frac{\gamma^2}{k}h_3.\tag{5}$$

记 e^i,h^i 为入射场 $\mathbf{E}^i,\mathbf{H}^i$ 在 x_3 方向的分量， e^s,h^s 为散射场 $\mathbf{E}^s,\mathbf{H}^s$ 在 x_3 方向的分量. $e^s=e_3-e^i$, $h^s=h_3-h^i$, 这样得到 $\mathbb{R}^2$ 中关于 e^s 和 h^s 的微分方程

$$\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla e^s)-\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla h^s)+\mathrm{i}\gamma^2\beta h^s+\frac{\gamma^2}{k}e^s=-f_1,\tag{6}$$

$$\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla h^s)+\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla e^s)-\mathrm{i}\gamma^2\beta e^s+\frac{\gamma^2}{k}h^s=-f_2,\tag{7}$$

这里 f_1 和 f_2 如下

$$f_1=\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla e^i)-\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla h^i)+\mathrm{i}\gamma^2\beta h^i+\frac{\gamma^2}{k}e^i,$$

$$f_2=\nabla\cdot(\frac{1}{k}\nabla h^i)+\mathrm{i}\nabla\cdot(\beta\nabla e^i)-\mathrm{i}\gamma^2\beta e^i+\frac{\gamma^2}{k}h^i.$$

引入关于 e^s,h^s 的新向量 $\mathbf{u}^s=(e^s,h^s)^T$, 并定义符号 $\nabla\mathbf{u}^s=(\nabla e^s,\nabla h^s)^T$, 则 (6) 、 (7) 式可表达为如下向量形式的微分方程

$$\nabla\cdot(A_1\nabla\mathbf{u}^s)+B_1\mathbf{u}^s+\mathbf{f}=0,\qquad x\in\mathbb{R}^2,\tag{8}$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{k} & -\mathrm{i}\beta\\ \mathrm{i}\beta & \frac{1}{k}\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}\frac{\gamma^2}{k} & \mathrm{i}\gamma^2\beta\\ -\mathrm{i}\gamma^2\beta & \frac{\gamma^2}{k}\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=(f_1,f_2)^T.\tag{9}$$

另外要求散射场 $\mathbf{u}^s$ 在各个方向还一致地满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}(\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial \eta}-\mathrm{i}k\mathbf{u}^s)=0, \tag{10}$$

其中 $\eta=x/|x|,\ r=|x|$.

通过以上的表述，有界手性障碍电磁散射问题可叙述为：以平面波形式传播的入射电磁场 $\mathbf{u}^i=(e^i,h^i)^T$, 入射到有界手性介质障碍 D 上，求 $\mathbf{u}^s=(e^s,h^s)^T$, 满足 (8) 式以及辐射条件 (10).

2 问题的有限元分析

为了给出问题的变分形式，将 $\mathbb{R}^2$ 的问题转化为有界区域 B_R(假设 B_R 是一个以圆点为心半径为 R, 包含 D 的充分大的圆) 的问题，先讨论在 $\partial B_R(\partial B_R$ 为 B_R 的边界) 上 $\mathbf{u}^s$ 满足的条件. 以下总假设 R 充分大， $\mathbb{R}^2\backslash B_R$ 外是介电常数为 ε_0, 磁导率为 μ_0 的真空.

在 $\mathbb{R}^2\backslash B_R$ 上， $\beta=0$, 散射场 e^s 和 h^s 满足 Helmholtz 方程

$$(\Delta+k_0^2)\mathbf{u}^s=0, \tag{11}$$

这里 $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

注意到当 $r=|x|>R$ 时， Helmholtz 方程 (11) 的散射解 $\mathbf{u}^s=(e^s,h^s)^T$ 在极坐标 (r,θ) 下可表示为如下变量分离的级数形式 [2]

$$e^s(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nH_{|n|}^{(1)}(k_0r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{12}$$

这里 $H_n^{(1)}$ 是第一类 n 阶 Hankel 函数 [3]. 级数 (12) 在 $r>R$ 时一致收敛.

另一方面易知 e^s 在边界 ∂B_R 上是周期函数，因此 e^s 有如下的 Fourier 级数展开

$$e^s(R,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^n(R)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{13}$$

其中

$$e^{(n)}(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^s(R,\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta.$$

由 (12) 和 (13) 式，有

$$e^s(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(n)}H_{|n|}^{(1)}(k_0r)}{H_{|n|}^{(1)}(k_0R)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\quad r\ge R. \tag{14}$$

记 ν 为 ∂B_R 的外法向量，由 (14) 式可以求 e^s 在 ∂B_R 的外法方向导数

$$\frac{\partial e^s(r,\theta)}{\partial \nu}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{k_0e^{(n)}H_{|n|}^{'(1)}(k_0r)}{H_{|n|}^{(1)}(k_0R)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\quad r\ge R. \tag{15}$$

对于函数 $\varphi(r,\theta)$, 引入算子 T,

$$T(\varphi)\triangleq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{k_0\varphi^{(n)}H_{|n|}^{'(1)}(k_0r)}{H_{|n|}^{(1)}(k_0R)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{16}$$

其中

$$\varphi^{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta.$$

引理 2.1 算子 $T:H^{1/2}(\partial B_R)\to H^{-1/2}(\partial B_R)$ 如 (16) 式定义，则问题 (8)–(10) 的解满足

$$\frac{\partial e^s(r,\theta)}{\partial\nu}=Te^s,\qquad x\in\partial B_R,\tag{17}$$

$$\frac{\partial h^s(r,\theta)}{\partial\nu}=Th^s,\qquad x\in\partial B_R,\tag{18}$$

其向量形式， $T:(H^{1/2}(\partial B_R))^2\to(H^{-1/2}(\partial B_R))^2$,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^s(r,\theta)}{\partial\nu}=T\mathbf{u}^s,\qquad x\in\partial B_R.\tag{19}$$

边界截断算子 T 的引入，散射问题可描述为有界区域 B_R 上问题：以平面波形式传播的入射电磁场 $\mathbf{u}^i=(e^i,h^i)^T$, 入射到有界手性介质障碍 D 上，求 $\mathbf{u}^s\in H^1(B_R)\times H^1(B_R)$ 满足 (8) 式和边界条件 (19).

现给出有界域上散射问题 (8) 、 (19) 的变分形式. 令 $\mathbf{v}=(q,p)^T\in H^1(B_R)\times H^1(B_R)$. 分别用 $\bar q$, $\bar p$ 乘以 (6) 和 (7) 式，再在 B_R 上积分，并注意到在 $R^2\backslash D$ 上 $\beta=0$, 利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}\frac{1}{k}\nabla e^s\cdot\nabla\bar q\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{B_R}\beta\nabla h^s\cdot\nabla\bar q\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{B_R}\gamma^2\beta h^s\,\bar q\mathrm{d}x\\&-\int_{B_R}\frac{\gamma^2}{k}e^s\,\bar q\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R}\frac{1}{k_0}\frac{\partial e^s}{\partial\nu}\,\bar q\mathrm{d}s(x)=\int_{B_R}f_1\,\bar q\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}\frac{1}{k}\nabla h^s\cdot\nabla\bar p\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{B_R}\beta\nabla e^s\cdot\nabla\bar p\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{B_R}\gamma^2\beta e^s\,\bar p\mathrm{d}x\\&-\int_{B_R}\frac{\gamma^2}{k}h^s\,\bar p\mathrm{d}x-\int_{\partial B_R}\frac{1}{k_0}\frac{\partial h^s}{\partial\nu}\,\bar p\mathrm{d}s(x)=\int_{B_R}f_2\,\bar p\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{21}$$

则问题的变分形式为：求 $\mathbf{w}=(e^s,h^s)^T\in H^1(B_R)\times H^1(B_R)$, 使得

$$W(\mathbf{w},\mathbf{v})=(\mathbf{f},\mathbf{v}),\qquad\forall\,\mathbf{v}=(q,p)^T\in H^1(B_R)\times H^1(B_R).\tag{22}$$

这里 $W(\mathbf{w},\mathbf{v})$ 为 (20) 和 (21) 式左端的和，并且 $(\mathbf{f},\mathbf{v})=\int_{B_R}f_1\,\bar q\,\mathrm{d}x+\int_{B_R}f_2\,\bar p\,\mathrm{d}x$.

定理 2.2 对于所有 k, 手性障碍电磁散射问题的变分问题 (22) 有唯一解

$$\mathbf{u}^s\in H^1(B_R)\times H^1(B_R).$$

设 $\{S_h;h\in(0,1]\}$ 表示 $H^1(B_R)\times H^1(B_R)$ 的有限元子空间族，其中 h 代表将 B_R 三角剖分后单元的最大直径. 进一步，假设，对任意的 $\mathbf{v}\in H^1(B_R)\times H^1(B_R)$, 有

$$\lim_{h\to0}\inf_{\mathbf{v}_h\in S_h}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_1=0.\tag{23}$$

为了记号的方便，用 $\|\cdot\|_l$ 来表示范数 $\|\cdot\|_{H^l\times H^l}$.

定义 (8) 的解 $\mathbf{u}^s=(e^s,h^s)^T$ 的有限元逼近 $\mathbf{u}_h=(e_h,h_h)^T\in S_h$,

$$W(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)=(\mathbf{f},\mathbf{v}_h),\qquad\forall\,\mathbf{v}_h=(p_h,q_h)\in S_h.\tag{24}$$

定理 2.3 假设对任意的 $\mathbf{f} \in (H^1(B_R)\times H^1(B_R))'$, (8) 和 (19) 式有唯一解 $\mathbf{u}^s \in H^1(B_R)\times H^1(B_R)$. 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $h_0 = h_0(\epsilon)$, 使得对 $0 < h < h_0$, 问题 (8) 和 (19) 的有限元解 $\mathbf{u}_h$ 唯一存在，且有估计

$$\|\mathbf{u}^s - \mathbf{u}_h\|_0 \le \epsilon \|\mathbf{u}^s - \mathbf{u}_h\|_1. \tag{25}$$

此外，如果 $\mathbf{f} \in L^2(B_R) \times L^2(B_R)$, 则存在一个 $h_1 = h_1(\epsilon)$, 使得对 $0 < h < h_1$, 有

$$\|\mathbf{u}^s - \mathbf{u}_h\|_1 \le \epsilon \|\mathbf{f}\|_0. \tag{26}$$

定理 2.2 和定理 2.3 的证明见文献 [4].

由定理 2.3 注意到

(i) 由于 h_0, h_1 与 $\mathbf{u}^s$ 无关，从而估计关于 $\mathbf{u}^s$ 是一致的.

(ii) 如果手性材料的各项参数是光滑函数，并且当界面 ∂D 是 $C^{1,1}$ 时，则由经典椭圆估计知，解 $\mathbf{u}^s$ 的正则性可以提高，比如由经典的有限元理论，可得到比定理 2.3 更好的误差估计和收敛性结果. 然而，由于实际应用中经常是分段光滑，并且很多物理参数是分片常数，故在通常情况下我们只能得到定理 2.3 的结果.

3 数值实验问题模型

在实际数值计算中，由于边界算子 T 无穷级数的引入，直接用有限元来实现较为困难，我们通过结合 PML 技术 [5] 的有限元法对有界手性介质电磁散射问题进行数值计算.

例 1 入射场为平面波 $e^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sin(\theta)x_1 - \mathrm{i}k\cos(\theta)x_2}$, $h^i = 0$, 取入射角度 $\theta = \pi/6$, 入射到障碍物 D 上. 介电常数 ε 和磁导率 μ 如下

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1.96, & x \in \bar{D}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}^2 \backslash D, \end{cases} \qquad \mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{D}, \\ 2, & x \in \mathbb{R}^2 \backslash D. \end{cases} \tag{27}$$

数值试验中分以下两种情况

(I) D 为手性导纳 $\beta = 0.5$ 的手性介质障碍.

(II) D 是非手性的，即 $\beta = 0$, 其他的参数取法不变. 也就是在 TM 情况下一般的介质问题.

设置 PML 如图 2 所示，在 B_R 外为 PML 层 $\Omega^{\mathrm{PML}} = \{x \in \mathbb{R}^2 : R < |x| < \rho\}$. 实际计算中的误差有两部分组成，一部分是加 PML 层所引起的 PML 解与真解的误差，另一部分就是进行有限元计算剖分所带来的误差.

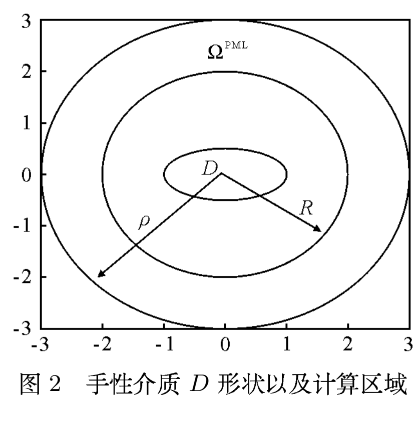

图 2 手性介质 D 形状以及计算区域

具体算法如下

1) 限制 PML 解与真解的误差，来确定 PML 中的 σ, ρ. 通常取 $\sigma=\sigma_0\left(\frac{r-R}{\rho-R}\right)^m$, 其中常数 $\sigma_0>0$, 整数 $m\geq 1$.

在数值试验中取 $m=2$, $R=2$, 限制

$$\mathrm{e}^{-k\ \mathrm{Im}(\tilde{\rho})(1-\frac{R^2}{|\tilde{\rho}|^2})^{1/2}}\leq 10^{-9},$$

由此确定 $\rho=3$, 故 PML 厚度 $\delta=\rho-R=1$.

2) 在计算区域上 $\Omega^\rho=B_R\cup\Omega^{\mathrm{PML}}$ 上剖分，利用 Matlab 进行有限元计算.

图 3 和图 4 分别给出了 (I) 、 (II) 条件下 B_R 中电场和磁场的实部. 图 5 和图 6 分别给出在 (I) 、 (II) 条件下电场磁场在边界 ∂B_R 上振幅的比较.

由此例看出，在情况 (I) 下入射磁场为零，通过手性介质 D 后，入射场的振动面发生变化，产生了磁场，见图 3. 而在情况 (II) 下， D 内非手性时，没有入射磁场时，通过 D 的散射场也没有磁场产生，见图 4.

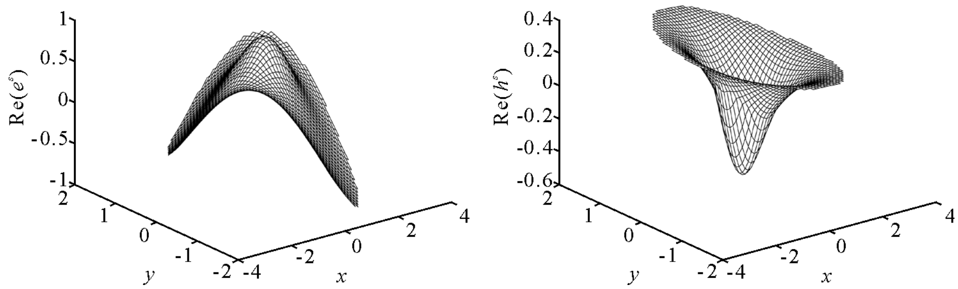

图 3 (I) 条件下 B_R 中电磁场 e^s, h^s 的实部

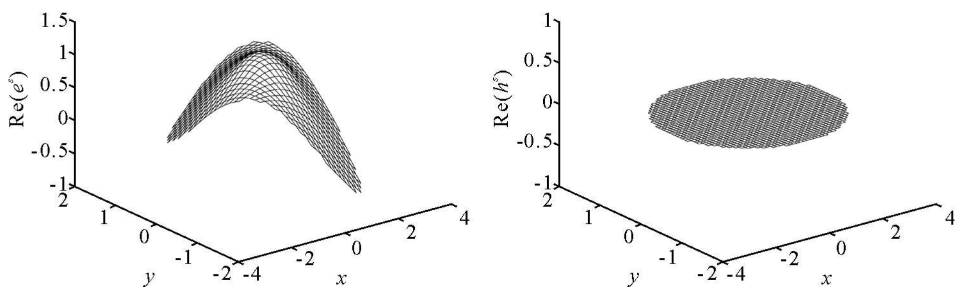

图 4 (II) 条件下 B_R 中电磁场 e^s, h^s 的实部

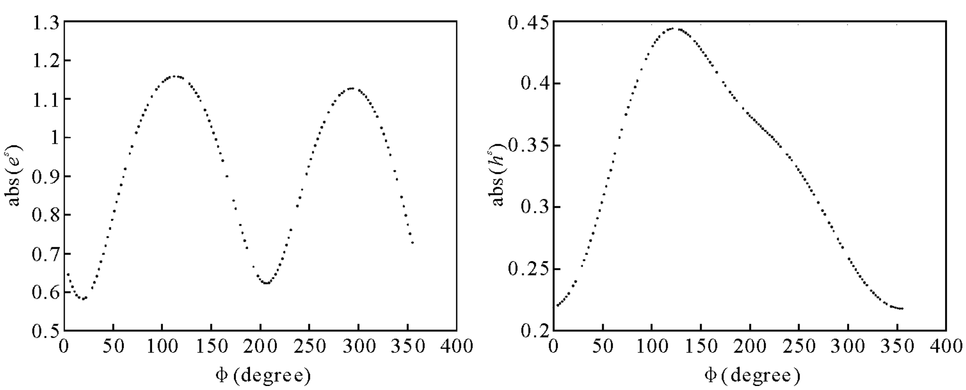

图 5 (I) 条件下 B_R 中电磁场 e^s, h^s 的振幅

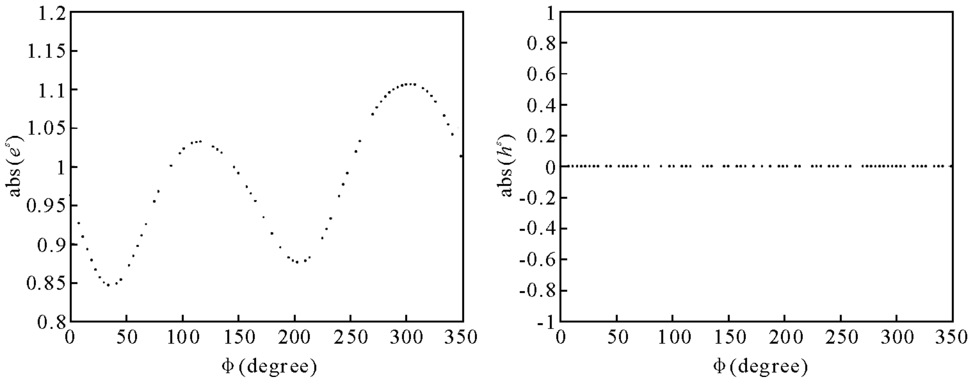

图 6 (II) 条件下 B_R 中电磁场 e^s, h^s 的振幅

这也表明了手性介质的性质：使通过它的偏振光的振动面发生变化，即表现出旋光性 (optical activity).

例 2 如图 7 手性介质 D 不为单连通的情况．其他参数不变．入射场以平面波 $e^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sin(\theta)x_1 - \mathrm{i}k\cos(\theta)x_2}$，$h^i = 0$ 形式入射，以 $\theta = \pi/6$ 角度入射到手性介质障碍 $D = D_1 \cup D_2$ 上． D 的手性导纳为

$$\beta = \begin{cases} 0.5, & x \in D_1, \\ 0.2, & x \in D_2, \end{cases} \tag{28}$$

介电常数 ε 和磁导率 μ 如下

$$\varepsilon = \begin{cases} 1.96, & x \in \bar{D}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}^2 \backslash D, \end{cases} \qquad \mu = \begin{cases} 1, & x \in \bar{D}, \\ 2, & x \in \mathbb{R}^2 \backslash D. \end{cases} \tag{29}$$

具体的算法以及 PML 的设置同例 1, 图 8 给出 B_R 上电场磁场的实部，图 9 给出 ∂B_R 上电场磁场的振幅.

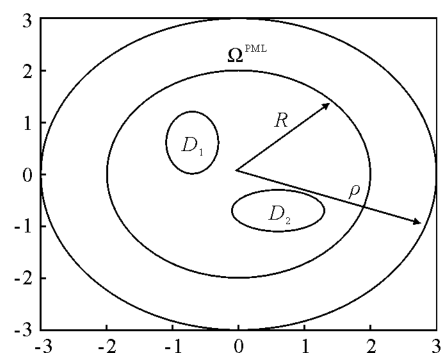

图 7 两个障碍物 D 形状以及计算区域

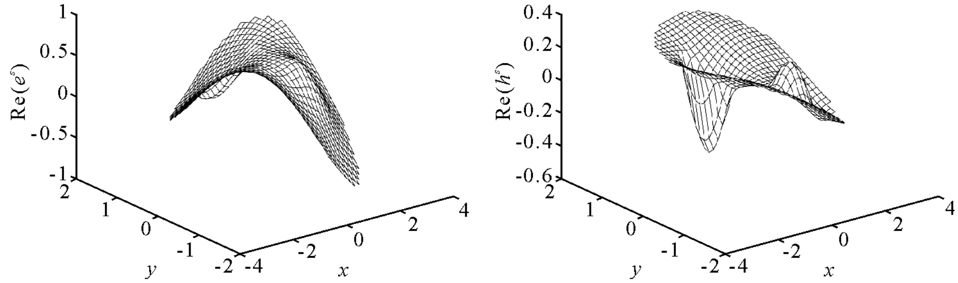

图 8 B_R 中电磁场 e^s, h^s 的实部

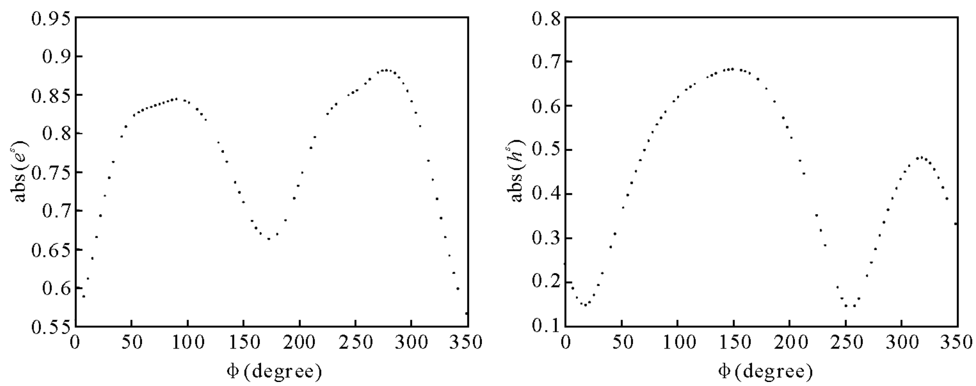

图 9 ∂B_R 上电场 e^s, h^s 的振幅

参 考 文 献

[1] Athanasiadis C, Costakis G, Stratis I G. Electromagnetic scattering by a homogeneous chiral obstacle in a chiral environment. SIMA J Appl Math, 2000, **64**: 245–258

[2] Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York: Springer-Verlag, 1992

[3] John F. Partial Differential Equations. Fourth Edition. New York: Springer-Verlag, 1982

[4] 高天玲．某些手性介质电磁散射和反散射数学问题的分析与计算．长春：吉林大学， 2007

[5] Collino F, Monk P B. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. SIAM J Sci Comput, 1998, **19**: 2061–2090

The Finite Element Method with Perfectly Matched Layers for the Electromagnetic Scattering by a Chiral Obstacle

[1]Gao Tianling [2]Ma Fuming

([1]*College of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, Guangdong Shenzhen 518060;*
[2]*Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130021*)

Abstract: This paper is concerned with the electromagnetic scattering by a chiral obstacle. A two-dimensional mathematical model is established. The existence and uniqueness of the problem is discussed by a variational approach. A finite element method with perfectly matched layers(PML) is developed for solving the problem.

Key words: Chiral media; Perfectly matched layers(PML); Finite element method.

MR(2000) Subject Classification: 65N06