2005,**25A**(2):264－268

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

细胞神经网络的指数稳定性*

沈轶　江明辉　姚宏善

(华中科技大学控制科学与工程系　武汉 430074)

摘要:该文研究了具有可变时滞的随机细胞神经网络的指数稳定性,应用 Razumikhin 定理与 Lyapunov 函数,建立了这种细胞神经网络均方指数稳定与几乎必然指数稳定的两类判据,一类是时滞无关而另一类是时滞相关.

关键词:细胞神经网络;指数稳定性;Razumikhin 定理;Lyapunov 函数.

MR(2000)主题分类:93D　　**中图分类号:**TP13　　**文献标识码:**A

文章编号:1003-3998(2005)02-264-05

1　引言

Hopfield 神经网络要求每个神经元与其他神经元全联接,可是在真实神经网络里,并没有这种要求,在由 10^{11} 数量的神经细胞组成的人脑中,每个神经细胞只与其周围的 10^3 左右的神经细胞相联,在视觉初级加工的神经网络中,每个神经细胞与其相近的神经细胞之间的联接较强,而远离该神经细胞的联接较弱,视觉处理就是利用这种联接权的方向进行方向检测、边缘提取等工作。

1988 年美国加州大学贝克莱分校的 Chua 与 Yang 提出的细胞神经网络(Cellular Neural Network)[1]就是以神经细胞的这种联接方式为背景,来实现一种局部联接的、权可设计的人工神经网络.这种网络对二维图像的初级加工特别有用,现已形成了一个新的学科分支.它的实现也比 Hopfield 网络容易,网络的芯片也已不断出现,是一个值得注意的领域.细胞神经网络的基本单元称为人工细胞,它是由线性电容、线性电阻、线性控制元件和非线性控制元件组成,如同一个细胞自动机,它只同它周围的神经元相接,是一个连续的动态系统.细胞神经网络应用于运动图像处理时,需要引入细胞间信号传递的时间延迟,因此 1992 年 Chua 与 Roska 引入了带时滞的细胞神经网络[2],关于细胞神经网络与时滞细胞神经网络的动力学行为,已有许多作者进行研究[1-6],但对具有随机扰动的细胞神经网络与具有可变时滞的细胞神经网络却很少有人研究.

基于这种状况,本文研究了具有可变时滞的随机细胞神经网络的指数稳定性.利用 Razumikhin 定理、Lyapunov 函数与 Itô 公式,建立了这种细胞神经网络的均方指数稳定与几乎必然指数稳定[7]的判据,所得判据分为时滞无关与时滞相关两种.

收稿日期:2003-06-20

* 基金项目:国家自然科学基金(60074008,60274007)和湖北省自然科学基金(2004ABA055)资助

2 主要结果

考虑具有可变时滞的随机细胞神经网络

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) = & [-Dx(t) + A\sigma(x(t)) + B\sigma(x(t-\delta_1(t)))]\mathrm{d}t \\ & + f(t, x(t), x(t-\delta_2(t)))\mathrm{d}w(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$,$d_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,这里 $\delta_i(t)\in C(\mathbf{R}_+,[0,\tau])$,$i=1,2$,$\tau>0$ 是时滞. $\sigma(x)=(\sigma_1(x_1),\cdots,\sigma_n(x_n))^{\mathrm{T}}$,$\sigma_i(x_i)=1/2(|x_i+1|-|x_i-1|)(1\leqslant i\leqslant n)$,$f(t,x(t),x(t-\delta_2(t)))\mathrm{d}w(t)$表示随机扰动,$w=(w_1(t),\cdots,w_m(t))^{\mathrm{T}}$ 是定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上具自然滤波$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0}$的 m 维 Brown 运动,$f:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$是局部 Lipschitz 连续的且满足线性增长条件[7]. 并设系统(1)有初始条件 $x(s)=\xi(s)$,$-\tau\leqslant s\leqslant0$,$\xi\in L^2_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$,这里 $L^2_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$是 $\mathbf{R}^n$ 值的随机过程$\xi(s)$,$-\tau\leqslant s\leqslant0$,且 $\xi(s)$是 $\mathscr{F}_0$ 可测,$\int_{-\tau}^{0}E|\xi(s)|^2\mathrm{d}s<\infty$. 由文献[7]知系统(1)有唯一解,记为 $x(t;\xi)$或 $x(t)$,并且它也是平方可积的. 为研究系统(1)的稳定性,下面均设$\forall t\in\mathbf{R}_+$:$f(t,0,0)\equiv0$,并设存在 $a_1,a_2\geqslant0$,使

$$\begin{gathered} \forall(t,x,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n, \\ \mathrm{trace}f^{\mathrm{T}}(t,x,y)f(t,x,y)\leqslant a_1|x|^2+a_2|y|^2. \end{gathered} \tag{2}$$

定理 1 若存在正定阵 G,使

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(GD+D^{\mathrm{T}}G) > & 2\|GA\| + 2\|GB\|\sqrt{\lambda_{\max}(G)\lambda_{\min}^{-1}(G)} \\ & + \|G\|(a_1+a_2\lambda_{\min}^{-1}(G)\lambda_{\max}(G)). \end{aligned} \tag{3}$$

则系统(1)的平凡解均方指数稳定,也几乎必然指数稳定.

证 作 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Gx$,则对$\forall(t,x,y_1,y_2)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$,有

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V(x(t)) &= V_x(x)(-Dx+A\sigma(x)+B\sigma(y_1))+\frac{1}{2}\mathrm{trace}f^{\mathrm{T}}(t,x,y_2)V_{xx}(x)f(t,x,y_2) \\ &= 2x^{\mathrm{T}}G(-Dx+A\sigma(x)+B\sigma(y_1))+\mathrm{trace}f^{\mathrm{T}}(t,x,y_2)Gf(t,x,y_2) \\ &\leqslant(-\lambda_{\min}(GD+D^{\mathrm{T}}G)+2\|GA\|+\|GB\|\beta+\|G\|a_1)|x|^2 \\ &\quad +\|GB\|\beta^{-1}|y_1|^2+\|G\|a_2|y_2|^2 \\ &\leqslant-\lambda_1V(x)+\lambda_2V(y_1)+\lambda_3V(y_2). \end{aligned}$$

这里

$$\lambda_1=(\lambda_{\min}(GD+D^{\mathrm{T}}G)-2\|GA\|-\|GB\|\beta-\|G\|a_1)\lambda_{\max}^{-1}(G),$$

$$\lambda_2=\|GB\|\beta^{-1}\lambda_{\min}^{-1}(G),\lambda_3=\|G\|a_2\lambda_{\min}^{-1}(G),\beta=\sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(G)\lambda_{\max}(G)}.$$

由已知条件(3),易推出 $\lambda_1>\lambda_2+\lambda_3$. 由随机泛函微分方程的 Razumikhin 定理[8]可推出,系统(1)的平凡解均方指数稳定,也几乎必然指数稳定. 证毕. ▌

显然定理 1 给出了系统(1)时滞无关的稳定条件,下面我们将建立系统(1)时滞相关的稳定条件. 为此首先证明下面的引理.

引理 1 设 $x(t)$为系统(1)的解,则$\forall i=1,2$,有

$$E|x(t)-x(t-\delta_i(t))|^2\leqslant N\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}E|x(t+\theta)|^2.$$

其中 $$N=[\tau(\|D\|+\|A\|+\|B\|)+\sqrt{\tau(a_1+a_2)}]^2.$$

证 由 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}&E\mid x(t)-x(t-\delta_i(t))\mid^2\\ \leqslant&(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)\Big(\varepsilon_1^{-2}E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^t-Dx(s)\mathrm{d}s\Big|^2\\ &+\varepsilon_2^{-2}E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tA\sigma(x(s))\mathrm{d}s\Big|^2+\varepsilon_3^{-2}E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tB\sigma(x(s-\delta_1(s)))\mathrm{d}s\Big|^2\\ &+\varepsilon_4^{-2}E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tf\mathrm{d}w(s)\Big|^2\Big),\end{aligned}\tag{4}$$

这里 $\varepsilon_1=\sqrt{\|D\|\tau}$,$\varepsilon_2=\sqrt{\|A\|\tau}$,$\varepsilon_3=\sqrt{\|B\|\tau}$,$\varepsilon_4=\sqrt[4]{\tau(a_1+a_2)}$,再一次应用 Hölder 不等式,有

$$E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^t-Dx(s)\mathrm{d}s\Big|^2\leqslant\tau^2\|D\|^2\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\mid x(t+\theta)\mid^2,\tag{5}$$

$$E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tA\sigma(x(s))\mathrm{d}s\Big|^2\leqslant\tau^2\|A\|^2\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\mid x(t+\theta)\mid^2,\tag{6}$$

$$E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tB\sigma(x(s-\delta_1(s)))\mathrm{d}s\Big|^2\leqslant\tau^2\|B\|^2\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\mid x(t+\theta)\mid^2,\tag{7}$$

由文献[9]中引理 2.3 与条件(2),有

$$E\Big|\int_{t-\delta_i(t)}^tf\mathrm{d}w(s)\Big|^2\leqslant\tau(a_1+a_2)\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\mid x(t+\theta)\mid^2.\tag{8}$$

将式(5)一式(8)及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 代入式(4)即得引理 1. 证毕. ▌

定理 2 若存在正定阵 G,使

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(GD+D^{\mathrm T}G)>&2\|G(A+B)\|+2\|GB\|\sqrt{N\lambda_{\max}(G)\lambda_{\min}^{-1}(G)}\\ &+\|G\|(a_1+a_2\lambda_{\max}(G)\lambda_{\min}^{-1}(G)).\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $N=[\tau(\|D\|+\|A\|+\|B\|)+\sqrt{\tau(a_1+a_2)}]^2$,则系统(1)的平凡解均方指数稳定,也几乎必然指数稳定.

证 作 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm T}Gx$,则由 Itô 公式,并应用条件(2),有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(x(t))=&2x^{\mathrm T}(t)G(-Dx(t)+(A+B)\sigma(x(t)))\\ &+2x^{\mathrm T}(t)GB(\sigma(x(t-\delta_1(t)))-\sigma(x(t)))+\mathrm{trace}f^{\mathrm T}Gf\\ \leqslant&-\lambda_1\mid x(t)\mid^2+\lambda_2\mid x(t-\delta_1(t))-x(t)\mid^2+\lambda_3\mid x(t-\delta_2(t))\mid^2,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_{\min}(GD+D^{\mathrm T}G)-2\|G(A+B)\|-\|GB\|\beta-\|G\|a_1$,$\lambda_2=\|GB\|\beta^{-1}$,$\lambda_3=\|G\|a_2$,$\beta=\sqrt{N\lambda_{\max}(G)\lambda_{\min}^{-1}(G)}$,由引理 1 与式(9),从式(10)可推出

$$E\mathscr{L}V(x(t))\leqslant-\lambda_1\lambda_{\max}^{-1}(G)EV(x(t))+(\lambda_2N+\lambda_3)\lambda_{\min}^{-1}(G)\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}V(x(t+\theta)),\tag{11}$$

由已知条件(9),可推出存在 $q>1$,使

$$-\lambda=-\lambda_1\lambda_{\max}^{-1}(G)+(\lambda_2N+\lambda_3)\lambda_{\min}^{-1}(G)q<0,\tag{12}$$

从而当 $EV(x(t+\theta))<qEV(x(t))(-2\tau\leqslant\theta\leqslant0)$ 时,从式(11)与式(12)可推出

$$E\mathscr{L}V(x(t))\leqslant-\lambda EV(x(t)).$$

由随机泛函微分方程的 Razumikhin 定理[8],可推出系统(1)的平凡解均方指数稳定,也几乎必然指数稳定. 证毕. ▌

若系统(1)中 $f=0$,则对具有可变时滞的细胞神经网络

$$\dot{x}(t)=-Dx(t)+A\sigma(x(t))+B\sigma(x(t-\delta_1(t))).\tag{13}$$

我们有更精细的时滞相关的稳定性判据.

定理 3 设$(A+B-D)$对角稳定,即存在正对角阵 $Q=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$,正定阵 G,使
$$Q(A+B-D)+(A+B-D)^{\mathrm{T}}Q=-G,$$
记
$$\alpha=\min_i d_i,\ k=\lambda_{\min}^{-1}(G)\alpha^{-1}(\|A\|+\|B\|)^2,$$
$$\beta=\sqrt{1+k\|Q\|}(\|D\|+\|A\|+\|B\|)\tau.$$
如果
$$\alpha>2\|B\|(1+k\|Q\|)\beta, \tag{14}$$
则系统(13)的平凡解指数稳定.

证 作 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}x+2k\sum_{i=1}^{n}q_i\int_0^{x_i}\sigma_i(\theta)\mathrm{d}\theta$. 因此有
$$|x|^2\leqslant V(x)\leqslant(1+k\|Q\|)|x|^2, \tag{15}$$
$$\begin{aligned}\dot V(x(t))=&2(x^{\mathrm{T}}(t)+k\sigma^{\mathrm{T}}(x(t))Q)(-Dx(t)+(A+B)\sigma(x(t)))\\&+2(x^{\mathrm{T}}(t)+k\sigma^{\mathrm{T}}(x(t))Q)B(\sigma(x(t-\delta_1(t)))-\sigma(x(t))).\end{aligned} \tag{16}$$
因
$$\begin{aligned}&2(x^{\mathrm{T}}(t)+k\sigma^{\mathrm{T}}(x(t))Q)(-Dx(t)+(A+B)\sigma(x(t)))\\\leqslant&-2\alpha|x(t)|^2+\alpha|x(t)|^2+\alpha^{-1}(\|A\|+\|B\|)^2|\sigma(x(t))|^2-k\lambda_{\min}(G)|\sigma(x(t))|^2\\=&-\alpha|x(t)|^2,\end{aligned} \tag{17}$$
$$\begin{aligned}&2(x^{\mathrm{T}}(t)+k\sigma^{\mathrm{T}}(x(t))Q)B(\sigma(x(t-\delta_1(t)))-\sigma(x(t)))\\&\leqslant(1+k\|Q\|)\|B\|(\beta|x(t)|^2+\beta^{-1}|x(t-\delta_1(t))-x(t)|^2),\end{aligned} \tag{18}$$
这里 $\beta=\sqrt{1+k\|Q\|}(\|D\|+\|A\|+\|B\|)\tau$,将式(17),式(18)代入式(16),有
$$\begin{aligned}\dot V(x(t))\leqslant&(-\alpha+(1+k\|Q\|)\|B\|\beta)|x(t)|^2\\&+(1+k\|Q\|)\|B\|\beta^{-1}|x(t-\delta_1(t))-x(t)|^2.\end{aligned} \tag{19}$$
取 $\varepsilon_1=\sqrt{\tau\|D\|}$,$\varepsilon_2=\sqrt{\tau\|A\|}$,$\varepsilon_3=\sqrt{\tau\|B\|}$,并应用 Hölder 不等式,有
$$\begin{aligned}&|x(t-\delta_1(t))-x(t)|^2\\&\leqslant(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)\Big(\varepsilon_1^{-2}\left|\int_{t-\delta_1(t)}^{t}-Dx(s)\mathrm{d}s\right|^2\\&\quad+\varepsilon_2^{-2}\left|\int_{t-\delta_1(t)}^{t}A\sigma(x(s))\mathrm{d}s\right|^2+\varepsilon_3^{-2}\left|\int_{t-\delta_1(t)}^{t}B\sigma(x(s-\delta_1(s)))\mathrm{d}s\right|^2\Big)\\&\leqslant(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)(\varepsilon_1^{-2}\tau^2\|D\|^2+\varepsilon_2^{-2}\tau^2\|A\|^2+\varepsilon_3^{-2}\tau^2\|B\|^2)\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}|x(t+\theta)|^2\\&=\tau^2(\|D\|+\|A\|+\|B\|)^2\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}|x(t+\theta)|^2,\end{aligned} \tag{20}$$
将式(20)代入式(19),并应用式(14)与式(15),有
$$\dot V(x(t))\leqslant-\lambda_1V(x(t))+\lambda_2\sup_{-2\tau\leqslant\theta\leqslant0}V(x(t+\theta)). \tag{21}$$
这里 $\lambda_1=(\alpha-(1+k\|Q\|)\|B\|\beta)(1+k\|Q\|)^{-1}$,$\lambda_2=\|B\|\beta^{-1}\tau^2(1+k\|Q\|)(\|D\|+\|A\|+\|B\|)^2$. 由已知条件(14)存在 $q>1$,使
$$-\lambda=-\lambda_1+\lambda_2q<0, \tag{22}$$
从而当 $V(x(t+\theta))<qV(x(t))(-2\tau\leqslant\theta\leqslant0)$时,从式(21)与式(22)可推出
$$\dot V(x(t))<-\lambda V(x(t)).$$
由泛函微分方程的 Razumikhin 定理[8]可推出系统(13)的平凡解指数稳定. ▌

注 1 文献[3,4,6]在系统(13)中取 $D=I$(单位阵),$\delta_1(t)$为常数时,讨论了系统的渐近稳定,其中条件分别是(i) B 可逆,$G=-I+A+B$ 对称,且 $\|B\|<\frac{2}{3}\tau$[3];(ii) 存在正对角

阵 Q,使 QA,QB 对称,$\|B\|<\frac{2}{3}\tau$[4];(iii) $\|A\|+\|B\|<1$[6]. 显然在定理 1 条件式(3)中取 $G=D=I$,$\alpha_1=\alpha_2=0$,则条件式(3)变成 $\|A\|+\|B\|<1$,因而定理 1 包含文献[6]的主要结果作为特例. 若系统(13)中取 $D=I$,$\delta_1(t)$为常数,$A=0$,$B=\begin{bmatrix}0 & -1/3\\ 1/3 & 0\end{bmatrix}$,则不能利用文献[3,4]的结果判断系统(13)的稳定性,但可以用本文的定理 2 与定理 3 判断系统(13)的稳定性,并且可以给出时滞上界.

参 考 文 献

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural network: theory. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, **35**(10): 1257-1272

[2] Chua L O, Roska. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements. Int J Circuit Theory Appl, 1992, **20**: 469-481

[3] Civalleri P P, Gilli M, Pandolfi L. On stability of cellular neural networks with delay. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 1993, **40**(3): 157-165

[4] Gilli M. Stability of cellular networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions. IEEE Trans Circuits Syst Ⅰ, 1994, **41**(8): 518-528

[5] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅰ). 中国科学(A 辑), 1994, **24**(9): 902-910

[6] 卢宏涛, 何振亚. 带时延的细胞神经网络的无条件稳定性. 电子学报, 1997, **25**(1): 1-4

[7] Mao X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 1994

[8] Mao X. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations. Stochastic Processes and their Applications, 1996, **65**: 233-250

[9] Mao X, Shah A. Exponential stability of stochastic differential delay equations. Stochastics and Stochastics Reports, 1997, **60**: 135-153

[10] Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks. Neural Parallel & Scientific Computations, 1996, **4**: 205-224

[11] Liao X X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastic neural networks. Stochastic Analysis and Applications, 1996, **14**(2): 165-185

Exponential Stability of Cellular Neural Networks

Shen Yi   Jiang Minghui   Yao Hongshan

(*Department of Control Science and Engineering*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074)

Abstract: In this paper the authors investigate the exponential stability of stochastic cellular neural networks with variable delay. By using the Razumikhin theorems and Lyapunov functions, the authors present two types of criteria for the exponential stability in the mena square and almost surely exponential stability of cellular neural networks. One type involves delay independent results while the other involves delay dependent results.

Key words: Cellular neural network; Exponential stability; Razumikhin theorem; Lyapunov function.

MR(2000) Subject Classification: 93D