2005,**25A**(4):473－481

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

线性退化的严格双曲组具慢衰减初值的 Cauchy 问题的经典解的整体存在唯一性*

闫萍　盛其荣　吕腾

(新疆大学数学与系统科学学院　乌鲁木齐 830046)

摘要:该文给出了线性退化的严格双曲组具慢衰减及小全变差初值的 Cauchy 问题的经典解的整体存在唯一性. 这个结果进一步推广了 A. Bressan 的相关结果.

关键词:线性退化；小全变差；慢衰减初值；拟线性双曲组.

MR(2000)主题分类:35L45　　**中图分类号**:O175.27　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)04-473-09

1　引言

考虑下面的一阶拟线性方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)^T$ 是(t,x)的未知向量函数，$A(u)=(a_{ij}(u))$是 $n\times n$ 阵，其元素 $a_{ij}(u)$ $(i,j=1,\cdots,n)$适当光滑.

假设在 $u=0$ 的某一个邻域内,方程组(1.1)是严格双曲的，即对该邻域内任意给定的 u 值,$A(u)$有 n 个互异的实特征值

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_n(u). \tag{1.2}$$

对 $i=1,\cdots,n,l_i(u)=(l_{i1}(u),\cdots,l_{in}(u))$(相应地,$r_i(u)=(r_{i1}(u),\cdots,r_{in}(u))^T$)为相应于特征值 $\lambda_i(u)$ $(i=1,\cdots,n)$的一个左(相应地,右)特征向量

$$l_i(u)A(u) = \lambda_i(u)l_i(u) \quad (\text{相应地},\ A(u)r_i(u) = \lambda_i(u)r_i(u)). \tag{1.3}$$

有

$$\det|\,l_{ij}(u)\,| \neq 0 \quad (\text{相应地},\ \det|\,r_{ij}(u)\,| \neq 0). \tag{1.4}$$

在严格双曲型的情况下,所有的 $\lambda_i(u),l_{ij}(u)$ 和 $r_{ij}(u)(i,j=1,\cdots,n)$ 有与 $a_{ij}(u)(i,j=1,\cdots,n)$相同的正则性.

不失一般性,可以假定

$$l_i(u)r_j(u) \equiv \delta_{ij} \quad (i,j=1,\cdots,n) \tag{1.5}$$

及

$$r_i^T(u)r_i(u) \equiv 1 \quad (i=1,\cdots,n), \tag{1.6}$$

其中 δ_{ij} 表示 Kronecker 符号.

给定下面的初始条件

收稿日期:2003-10-20

* 基金项目:新疆高校科研计划项目(XJEDU2004S04)和新疆大学博士基金资助

$$t=0: u=\varphi(x), \tag{1.7}$$

其中 $\varphi(x)$是一个"小"的 C^1 向量函数. 当 $\varphi\in C^2$ 具紧支集且全变差充分小时，A. Bressan 在[1]中对线性退化的严格双曲型方程组的 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)给出了其经典解的整体存在唯一性的证明. 而当初值 $\varphi(x)\in C^1$ 具有一定衰减性，即满足：存在 $\mu>0$ 使得

$$\sup_{x\in \boldsymbol{R}}\{(1+|x|)^{1+\mu}(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|)\}<+\infty, \tag{1.8}$$

且方程组(1.1)为弱线性退化时，李大潜、周忆和孔德兴在[2]—[4]中给出了 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的经典解的整体存在唯一性. 此外,孔德兴在[5]中给出反例说明在 $\mu=0$ 的情形下，弱线性退化、严格双曲方程组的 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的经典解可能在有限时间内破裂. 这说明初值条件足够的衰减阶数对于弱线性退化的严格双曲方程组的 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的经典解的整体存在唯一性是必要的.

本章将主要利用[1]中的证明方法,证明 Lax 意义下线性退化方程组(1.1)具慢衰减且小全变差初值 $\varphi(x)$的 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)必对一切 $t\in\boldsymbol{R}$ 存在唯一的整体经典解 $u=u(t,x)$. 这一结果不仅推广了 A. Bressan 关于紧致集的结果，而且也降低了[6]中关于初值的衰减要求.

本章的主要定理为

定理 1.1 假定在 $u=0$ 的某个邻域内，$A(u)\in C^2$，方程组(1.1)是严格双曲且为 Lax 意义下线性退化的,即对一切 $i\in\{1,\cdots,n\}$，成立

$$\nabla\lambda_i(u)r_i(u)\equiv 0. \tag{1.9}$$

假设初值 $\varphi(x)$ 满足

(i) $\varphi(x)\in C^1$;

(ii) $\varphi(x)$ 具下述衰减性：存在 $\mu>0$ 使得

$$\bar\theta\triangleq\sup_{x\in \boldsymbol{R}}\{(1+|x|)^{\mu}(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|)\}<+\infty. \tag{1.10}$$

(iii) $\varphi(x)$的全变差充分小，即

$$\theta\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x<<1. \tag{1.11}$$

则存在充分小的 $\theta_0>0$，对任意给定的 $\theta\in[0,\theta_0]$，拟线性双曲型方程组的 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)对一切 $t\in\boldsymbol{R}$ 存在唯一的整体 C^1解 $u=u(t,x)$.

为了完整性,将在第二节中先简要回顾由 F. John 给出的波的分解公式见[7],[3]),它将在后面的证明中起到重要的作用,然后给出 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$的 C^0 模的一致先验估计;并将在第三节中分别给出 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$的一阶偏导数 $u_x(t,x)$的 C^0 模的一致先验估计，从而完成定理 1.1 的证明. 最后在第四节中给出定理 1.1 的一个应用.

2 C^0 模的一致先验估计

假设在所讨论的区域中,方程组(1.1)为严格双曲型,而且(1.5)—(1.6)成立.

令
$$v_i=l_i(u)u\quad(i=1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

及
$$w_i=l_i(u)u_x\quad(i=1,\cdots,n), \tag{2.2}$$

其中 $l_i(u)$ 表示与第 i 族特征值$\lambda_i(u)$对应的左特征向量. 由(1.5)式，容易得到

$$u=\sum_{k=1}^{n}v_kr_k(u) \tag{2.3}$$

及
$$u_x = \sum_{k=1}^{n} w_k r_k(u). \tag{2.4}$$
记
$$\frac{d}{d_i t} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i(u)\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5}$$
为沿第 i 族特征对 t 的方向导数.

我们有(见[7],[3])
$$\frac{dv_i}{d_i t} = \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{ijk}(u) v_j w_k \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{2.6}$$
其中
$$\beta_{ijk}(u) = (\lambda_k(u) - \lambda_i(u)) l_i(u) \nabla r_j(u) r_k(u). \tag{2.7}$$
因此，成立
$$\beta_{iji}(u) \equiv 0, \quad \forall\, i,\, j\,. \tag{2.8}$$

由(2.6)式可得
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda_i(u) v_i)}{\partial x} = \sum_{j,k=1}^{n} B_{ijk}(u) v_j w_k \quad (i = 1,\cdots,\, n), \tag{2.9}$$
其中
$$B_{ijk}(u) = \beta_{ijk}(u) + \nabla\lambda_i(u) r_k(u) \delta_{ij}. \tag{2.10}$$
成立
$$B_{iii}(u) = \nabla\lambda_i(u) r_i(u); \tag{2.11}$$
当方程组(1.1)为 Lax 意义下线性退化时，成立
$$B_{iii}(u) \equiv 0, \quad \forall\, i. \tag{2.12}$$

另一方面,有(见[7],[3])
$$\frac{dw_i}{d_i t} = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{ijk}(u) w_j w_k \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{2.13}$$
其中
$$\gamma_{ijk}(u) = \frac{1}{2}[(\lambda_j(u) - \lambda_k(u)) l_i(u) \nabla r_k(u) r_j(u) - \nabla\lambda_k(u) r_j(u) \delta_{ik} + (j \mid k)], \tag{2.14}$$
其中$(j|k)$ 表示在前面所有项中将 j,k 互换后所得到的项. 成立
$$\gamma_{ijj}(u) \equiv 0, \quad \forall\, j \neq i \tag{2.15}$$
及
$$\gamma_{iii}(u) = -\nabla\lambda_i(u) r_i(u), \quad \forall\, i. \tag{2.16}$$
从而当方程组(1.1)为 Lax 意义下线性退化时，成立
$$\gamma_{iii}(u) \equiv 0, \quad \forall\, i; \tag{2.17}$$
由(2.13)式可得
$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda_i(u) w_i)}{\partial x} = \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{ijk}(u) w_j w_k \quad (i = 1,\cdots,\, n), \tag{2.18}$$
其中
$$\Gamma_{ijk}(u) = \frac{1}{2}(\lambda_j(u) - \lambda_k(u)) l_i(u)[\nabla r_k(u) r_j(u) - \nabla r_j(u) r_k(u)]. \tag{2.19}$$
成立
$$\Gamma_{ijj}(u) \equiv 0, \quad \forall\, i,j. \tag{2.20}$$

对任意给定的 $T>0$,假设 $u=u(t,x)$是 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)在区域 $D(T)=\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant T,\ |x|<+\infty\}$上的 C^1 解，令
$$L(u(t)) = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, w_i(t,x)\,|\,\mathrm{d}x \tag{2.21}$$
及
$$Q(u(t)) = \sum_{i<j}\iint_{x>y} |\, w_i(t,x)\,\|\, w_j(t,y)\,|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.22}$$
其中 $w_i(i=1,\cdots,n)$由(2.2)式定义.

为证明 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$的 C^0 模的一致先验估计,引入如

下引理[4].

引理 2.1 假设方程组(1.1)在 $u=0$ 的某个邻域内为双曲型,(1.5)-(1.6)式成立,同时有

$$\lambda_1(u)\leqslant\lambda_2(u)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(u). \tag{2.23}$$

设 $u=u(t,x)$ 是 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)在区域 $D(T)$ 上的 C^1 解. 如果 $u=u(t,x)$ 的 C^0 模有界,而且(2.21)-(2.22)式中的积分有意义,则成立

$$\frac{dL(u(t)}{dt}\leqslant C_1\int_{\boldsymbol{R}}\Lambda(t,x)\mathrm{d}x,\quad \forall\, t\in[0,T] \tag{2.24}$$

及
$$\frac{dQ(u(t))}{dt}\leqslant(C_2L(u(t))-1)\int_{\boldsymbol{R}}\Lambda(t,x)\mathrm{d}x,\quad \forall\, t\in[0,T], \tag{2.25}$$

其中
$$\Lambda(t,x)=\sum_{i>j}(\lambda_i(u)-\lambda_j(u))\,|\,w_i(t,x)\,\|\,w_j(t,x)\,|, \tag{2.26}$$

而 C_1 及 C_2 是仅依赖于经典解 $u=u(t,x)$ 的 C^0 模、而与 T 无关的正常数.

于此及今后, $C_i(i=1,2,\cdots)$恒表示与 θ 和 T 无关的正常数.

由引理 2.1 容易得到

引理 2.2 在引理 2.1 的假设下,如果经典解 $u=u(t,x)$的全变差充分小(即 $L(u(t))$充分小),则存在仅依赖于经典解 $u=u(t,x)$的 C^0 模、而与 T 无关的正常数 M, 使得

$$F(u(t))\triangleq L(u(t))+MQ(u(t)) \tag{2.27}$$

是 t 的非增函数,即成立

$$\frac{dF(u(t))}{dt}\leqslant 0,\quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.28}$$

下面给出 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$的 C^0 模的一致先验估计.

引理 2.3 假设在 $u=0$ 的某个邻域内, 方程组(1.1)为双曲型且满足(2.23), $u=u(t,x)$为 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)在区域 $D(T)$上的 C^1 解, 初值 $\varphi(x)$满足定理 1.1 中的假设.

令
$$\gamma\triangleq L(\varphi). \tag{2.29}$$

则存在充分小的 $\gamma_0>0$, 对任意给定的 $\gamma\in[0,\gamma_0]$, 存在与 T 和 γ 无关的正常数 κ_1 及 κ_2,使得如下的一致先验估计成立

$$\|\,u(t,x)\,\|_{C^0}\triangleq\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|\,u(t,x)\,|\leqslant\kappa_1\gamma,\quad \forall\, t\in[0,T] \tag{2.30}$$

及
$$L(u(t))\leqslant\gamma+\kappa_2\gamma^2,\quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.31}$$

注 2.1 注意到(2.21),(1.10)-(1.11)及(2.2)式, 由(2.29)式可知

$$\gamma\leqslant C_0\theta. \tag{2.32}$$

其中 C_0 表示与 φ 无关的正常数.

引理 2.3 的证明 先暂时假定在整个 $D(T)$上

$$|\,u(t,x)\,|\leqslant\delta, \tag{2.33}$$

其中 $\delta>0$ 为某个适当小的数. 该假设的合理性将在引理 2.3 证明最后说明.

由(1.10)式知

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi'(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

于是由(2.4)及(2.29)可得

$$|\,\varphi(x)\,|\leqslant C_3\gamma. \tag{2.34}$$

由连续性, 一定存在充分小的 $\tau_0>0$, 使得

$$\| u(t,\cdot)\|_{C^0} \leqslant 2C_3\gamma, \quad \forall t\in[0,\tau_0] \tag{2.35}$$

及
$$\| w(t,\cdot)\|_{C^0} \leqslant C_4, \quad \forall t\in[0,\tau_0]. \tag{2.36}$$

现在证明:只要 $\tau_0>0$ 适当的小，就有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau_0}\sup_{x\in\boldsymbol{R}}\{(1+|x|)^{\mu}(|v(t,x)|+|w(t,x)|)\}\leqslant C\bar{\theta}<+\infty, \tag{2.37}$$

其中 $\mu>0$，$C>0$ 是仅与 τ_0 有关的正常数.

事实上，由(2.33)和(1.10)式可知，对于每一个 $i=1,\cdots,n$，有

$$\begin{cases}|v_i(0,x)|=|l_i(\varphi(x))\varphi(x)|\leqslant C_5\bar{\theta}(1+|x|)^{-\mu}, & \forall t\in\boldsymbol{R},\\ |w_i(0,x)|=|l_i(\varphi(x))\varphi'(x)|\leqslant C_5\bar{\theta}(1+|x|)^{-\mu}, & \forall t\in\boldsymbol{R}.\end{cases} \tag{2.38}$$

由Cauchy问题经典解的局部存在唯一性定理[8]可知，存在 $\tau_0>0$，使得Cauchy问题(1.1)和(1.7)在 $D(\tau_0)$ 上存在唯一的 C^1 解 $u=u(t,x)$.

令
$$V(0,\tau)=\max_{i=1,\cdots,n}\|(1+|x|)^{\mu}v_i(t,x)\|_{C^0(\{0\leqslant t\leqslant\tau\}\times\boldsymbol{R})} \tag{2.39}$$

及
$$W(0,\tau)=\max_{i=1,\cdots,n}\|(1+|x|)^{\mu}w_i(t,x)\|_{C^0(\{0\leqslant t\leqslant\tau\}\times\boldsymbol{R})}, \tag{2.40}$$

其中 $\tau\in[0,\tau_0]$.

对每一个 $i=1,\cdots,n$，设在区域 $D(\tau_0)$ 上，过任意给定的点 $(t,x)\in D(\tau_0)$ 的第 i 族特征线 $\xi=x_i(s;y)$，其与 x 轴的交点为 $(0,y)$. 其中 $\xi=x_i(s;y)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i(s,y)}{ds}=\lambda_i(u(s,x_i(s,y))), \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau_0,\\ x_i(t,y)=x.\end{cases} \tag{2.41}$$

注意到(2.33)式易知，在 $\tau_0>0$ 适当小时，成立

$$C_6(1+|y|)\leqslant 1+|x_i(s,y)|\leqslant C_7(1+|y|), \quad \forall s\in[0,\tau_0]. \tag{2.42}$$

沿特征线 $\xi=x_i(s,y)$ 分别积分(2.6)和(2.13)式，得

$$v_i(t,x)=v_i(0,y)+\int_0^t\sum_{j,k=1}^n\beta_{ijk}(u)v_jw_k(s,x_i(s,y))\mathrm{d}s, \quad \forall t\in[0,\tau_0] \tag{2.43}$$

及
$$w_i(t,x)=w_i(0,y)+\int_0^t\sum_{j,k=1}^n\gamma_{ijk}(u)w_jw_k(s,x_i(s,y))ds, \quad \forall t\in[0,\tau_0]. \tag{2.44}$$

用 $(1+|x|)^{\mu}$ 分别乘上面两式并相加，注意到(2.42),(2.38)和(2.33)式，易得

$$Z(t)\leqslant C_8(\bar{\theta}+\int_0^t Z^2(s)\mathrm{d}s), \quad \forall t\in[0,\tau_0], \tag{2.45}$$

其中
$$Z(t)=V(0,t)+W(0,t).$$

从而
$$Z(t)\leqslant\frac{C_8\bar{\theta}}{1-C_8{}^2\bar{\theta}\,t}, \quad \forall t\in[0,\tau_0]. \tag{2.46}$$

因此，可选取 $\tau_0>0$ 适当小，使得(2.37)式在 $[0,\tau_0]$ 上成立. 从而可保证(2.24)-(2.25)式中的积分在区域 $D(\tau_0)=\{(t,x)\,|\,0\leqslant t\leqslant\tau_0,\ |x|<+\infty\}$ 上有意义.

为了应用引理2.2，必须说明：在区域 $D(\tau_0)$ 上，Cauchy问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的全变差(即 $L(u(t))$)充分小.

用 $\mathrm{sgn}w_i$ 乘(2.18)式的两端，并关于 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，注意到(2.37)式，可得

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|w_i(t,x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j,k=1}^n|\Gamma_{ijk}(u)w_jw_k(t,x)|\mathrm{d}x, \ \forall t\in[0,\tau_0]. \tag{2.47}$$

注意到(2.33)和(2.36)式，将上式两边关于 i 求和，可得

$$\frac{dL(u(t))}{dt}\leqslant C_9L(u(t)), \quad \forall t\in[0,\tau_0]. \tag{2.48}$$

注意到(2.29)式，由此可得

$$L(u(t)) \leqslant \gamma e^{C_9 \tau_0}, \quad \forall t \in [0, \tau_0]. \tag{2.49}$$

因此，只要取 $\tau_0 > 0$ 充分小，就有

$$L(u(t)) \leqslant 2\gamma, \quad \forall t \in [0, \tau_0]. \tag{2.50}$$

这样，当 $\gamma_0 > 0$ 充分小时，对任意给定的 $\gamma \in [0, \gamma_0]$，总可以保证在区域 $D(\tau_0)$ 上引理 2.2 中的条件满足，故有

$$L(u(t)) \leqslant L(u(t)) + MQ(u(t)) \leqslant \gamma + M\gamma^2, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \tag{2.51}$$

其中 M 由引理 2.2 给出.

注意到(2.35)和(2.51)式，只须取 $\kappa_1 \geqslant 2C_3$ 和 $\kappa_2 \geqslant M$，就可保证引理 2.3 的结论在区域 $D(\tau_0)$ 上成立.

利用连续性推导，容易得到：只要 $\gamma_0 > 0$ 充分小，总可以取到与 γ 和 T 无关的正常数 κ_1 和 κ_2，使引理 2.3 在区域 $D(T)$ 上成立.

由(2.30)式，当 $\gamma_0 > 0$ 充分小时，对任意给定的 $\gamma \in [0, \gamma_0]$，总有

$$\| u(t, \cdot) \|_{C^0} \leqslant \kappa_1 \gamma < \frac{\delta}{2}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{2.52}$$

由此可知，假设(2.33)式是合理的. 引理 2.3 证毕. ▌

注 2.2 由(2.30)和(2.32)式可知，当 $\theta_0 > 0$ 充分小时，对任意给定的 $\theta \in [0, \theta_0]$，在 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u = u(t, x)$ 的任意存在区域 $D(T)$ 上，恒成立(2.33)式. 这正是 C^1 解 $u = u(t, x)$ 的 C^0 模的一致先验估计.

3 定理 1.1 的证明

只须证明 Cauchy 问题(1.1)和(1.7)在 $t \geqslant 0$ 上存在唯一的整体 C^1 解 $u = u(t, x)$.

首先，引入[1]

$$\begin{aligned} R_i(u) = & \sum_{i>j} \int_x^{+\infty} | w_j(t, y) | \mathrm{d}y + \sum_{i<j} \int_{-\infty}^x | w_j(t, y) | \mathrm{d}y \\ & + \alpha \sum_{j<k} \iint_{y<z} | w_j(t, z) \| w_k(t, y) | \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\alpha > 0$ 为一个待定常数.

定义

$$M_1 = \max\{ \sup_{|u| \leqslant \delta} \sum_{i,j,k} | \gamma_{ijk}(u) |, \sup_{|u| \leqslant \delta} \sum_{i,j,k} | \gamma_{ijk}(u) | \} > 0 \tag{3.2}$$

及

$$\sigma = \min_{j<k} \inf_{|u| \leqslant \delta} \{ \lambda_k(u) - \lambda_j(u) \} > 0. \tag{3.3}$$

由(2.5)式，并注意到(2.33)式，有[1]

$$\begin{aligned} \frac{dR_i(u)}{d_i t} & = \frac{\partial R_i(u)}{\partial t} + \lambda_i(u) \frac{\partial R_i(u)}{\partial x} \\ & = -\sigma \sum_{j \neq i} | w_i(t, x) | - [\alpha\sigma - nM_1 - \alpha n M_1 L(u(t))] \\ & \quad \cdot \sum_{j<k} \int_{-\infty}^{+\infty} | w_j(t, x) \| w_k(t, x) | \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.4}$$

取 $\alpha = \frac{2nM_1}{\sigma} > 0$ 及 $V_0 \in (0, 1)$，使得 $\alpha n M_1 V_0 \leqslant \frac{\alpha\sigma}{2}$. 则只要 $L(u(t)) \leqslant V_0$，就有

$$\alpha\sigma - nM_1 - \alpha nM_1 L(u(t)) \geqslant 0. \tag{3.5}$$

这样，由(3.4)式可得

$$\frac{dR_i(u)}{d_i t} \leqslant -\sigma \sum_{j\neq i} |w_j(t,x)|. \tag{3.6}$$

为了证明的需要，取 $\beta=\frac{5nM_1}{\sigma}>0$ 及 $V_1=\min\{V_0,\frac{1}{2nM_1}\}>0$，使得当 $V_0>0$ 充分小时，有

$$\beta[V_1+\alpha V_1^{\ 2}] \leqslant \ln 2. \tag{3.7}$$

而由(3.1)式可知

$$R_i(u) \leqslant L(u(t)) + \alpha(L(u(t)))^2, \tag{3.8}$$

因此只要 $L(u(t))\leqslant V_1$，就有

$$\exp(\beta R_i(u)) \leqslant 2. \tag{3.9}$$

现在证明在 $t\geqslant 0$ 上，Cauchy 问题(1.1)和(1.7)的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的一阶偏导数 $u_x(t,x)$ 的 C^0 模一致有界.

令

$$L = \max_i \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |w_i(0,x)|, \tag{3.10}$$

$$T = \sup\{t\geqslant 0 \mid \max_{i=1,\cdots,n} \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |w_i(t',x)| \leqslant 3L,\quad \forall t'\in[0,t]\} \tag{3.11}$$

及

$$\widetilde{w}_i(t,x) = |w_i(t,x)| \exp(\beta R_i(u)),\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3.12}$$

由(3.9)式可知

$$|w_i(t,x)| \leqslant \widetilde{w}_i(t,x) \leqslant 2|w_i(t,x)|,\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3.13}$$

用反证法. 假设 $T<+\infty$. 由 T 的定义(3.11)式，注意到(2.56)式，可知一定存在一点$(\bar{t},\bar{x})$和指标 $i_0\in\{1,\cdots,n\}$，使得

$$0<\bar{t}<T,\quad \widetilde{w}_{i_0}(\bar{t},\bar{x}) > 2L\ ; \tag{3.14}$$

$$\widetilde{w}_j(t,x) < \widetilde{w}_{i_0}(\bar{t},\bar{x}),\quad \forall x\in\boldsymbol{R},\quad \forall t<\bar{t},\quad \forall j. \tag{3.15}$$

设 $x=x(t)$ 为过点$(\bar{t},\bar{x})$的第 i_0 族特征线. 由连续性，在此特征线上一定存在 $\tau\in(0,\bar{t})$，使得

$$\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t)) \geqslant \frac{1}{2}\widetilde{w}_{i_0}(\bar{t},\bar{x}) > L,\quad \forall t\in[\tau,\bar{t}]. \tag{3.16}$$

沿此特征线 $x=x(t)$ 对 $\widetilde{w}_{i_0}(t,x)$ 求关于 t 的方向导数. 注意到(2.13),(3.6)式和方程组(1.1)为线性退化的假设，由(3.12)式，对任意给定的 $t\in[\tau,\bar{t}]$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t))}{d_{i_0}t} &= \Big[\frac{d|w_{i_0}(t,x(t))|}{d_{i_0}t} + \beta\frac{dR_{i_0}(u)}{d_{i_0}t}|w_{i_0}(t,x)|\Big]\exp(\beta R_{i_0}(u))\\ &\leqslant \Big[\sum_{j,k=1}^n |\gamma_{ijk}(u)w_jw_k| - \beta\sigma\sum_{j\neq i_0}|w_{i_0}(t,x)w_j(t,x)|\Big]\exp(\beta R_{i_0}(u))\\ &\leqslant \Big[M_1\Big(\sum_{\substack{j,k\neq i_0\\ j<k}}|w_j\|w_k| + \sum_{j\neq i_0}|w_{i_0}\|w_j|\Big) - \beta\sigma\sum_{j\neq i_0}|w_{i_0}\|w_j|\Big]\exp(\beta R_{i_0}(u)).\end{aligned} \tag{3.17}$$

注意到(3.13)式及(3.15)−(3.16)式，对 $\forall x\in\boldsymbol{R}$, $\forall t\in[\tau,\bar{t}]$ 和 $\forall j\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$|w_j(t,x(t))| \leqslant \widetilde{w}_j(t,x(t)) \leqslant \widetilde{w}_{i_0}(\bar{t},\bar{x}) \leqslant 2\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t)) \leqslant 4|w_{i_0}(t,x(t))|. \tag{3.18}$$

于是，由(3.17)式可得

$$\frac{d\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t))}{d_{i_0}t} \leqslant -[\beta\sigma - 4nM_1 - M_1]\sum_{j\neq i_0} |w_{i_0}\| w_j|(t,x(t))\exp(\beta R_{i_0}(u)), \quad t\in[\tau,\bar{t}]. \tag{3.19}$$

由 β 的选取可知

$$\beta\sigma - 4nM_1 - M_1 \geqslant 0, \tag{3.20}$$

从而得到

$$\frac{d\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t))}{d_{i_0}t} \leqslant 0, \quad \forall\, t\in[\tau,\bar{t}]. \tag{3.21}$$

因此

$$\widetilde{w}_{i_0}(t,x(t)) \geqslant \widetilde{w}_{i_0}(\bar{t},\bar{x}), \quad \forall\, t\in[\tau,\bar{t}]. \tag{3.22}$$

这与(3.15)式矛盾.

这就证明了 $T=+\infty$，从而 Cauchy 问题(1.1)－(1.7)对一切 $t\in\boldsymbol{R}$ 存在唯一的整体 C^1 解 $u=u(t,x)$. 定理 1.1 证毕.

4 对弹性弦平面运动方程组的应用

考虑下面弹性弦平面运动方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - \left(\dfrac{T(r)}{r}u\right)_x = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$t=0: u = \tilde{u}_0 + u_0(x), \quad v = v_0(x), \tag{4.2}$$

其中 $u=(u_1,u_2)^T$，$v=(v_1,v_2)^T$，$r=|u|=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}$,而 $T(r)$ 为 $r>1$ 的适当光滑的函数且满足

$$T'(\tilde{r}_0) > \frac{T(\tilde{r}_0)}{\tilde{r}_0} > 0, \tag{4.3}$$

其中 $\tilde{r}_0=|\tilde{u}_0|=\sqrt{|\tilde{u}_0{}^1|^2+|\tilde{u}_0{}^2|^2}>1$, $\tilde{u}_0=(\tilde{u}_0{}^1,\tilde{u}_0{}^2)^T$ 为给定的常向量. $(u_0(x),v_0(x))$为 C^1 向量函数.

令

$$U = (u_1,u_2,v_1,v_2)^T = (u,v)^T. \tag{4.4}$$

由(4.3)式易知,方程组(4.1)有实特征值

$$\lambda_1 = -\sqrt{T'(r)} < \lambda_2 = -\sqrt{\frac{T(r)}{r}} < \lambda_3 = \sqrt{\frac{T(r)}{r}} < \lambda_4 = \sqrt{T'(r)}. \tag{4.5}$$

从而，方程组(4.1)为严格双曲型方程组.

容易验证 λ_2 和 λ_3 恒为线性退化特征. 且如果

$$T''(r) \equiv 0, \quad \forall\, r>1. \tag{4.6}$$

则 λ_1 和 λ_4 亦为线性退化特征. 此时，所有的特征均为线性退化的，当然亦为弱线性退化的. 由定理 1.1 可知

定理 4.1 如果$(u_0(x),v_0(x))$满足定理 1.1 中关于初值的假设，而且假设(4.6)满足. 则当 $\theta_0>0$ 充分小时，对任意给定的 $\theta\in[0,\theta_0]$，Cauchy 问题(4.1)－(4.2)对一切 $t\in\boldsymbol{R}$ 存在唯一的整体 C^1 解 $u=u(t,x)$.

参 考 文 献

[1] Bressan A. Contractive metrics for nonlinear hyperbolic systems. Indiana University Mathematics Journal，1988，**372**：409－420

[2] Li Tatsien，Zhou Yi，Kong Dexing. Global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems with decay initial data. Nonlinear Analysis，Theory，Methods & Application，1997，**28**(8)：1299－1332

[3] Li Tatsien，Zhou Yi，Kong Dexing. Weak Linear degeneracy and global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems. Comm in PDE，1994，**19**(7&8)：1263－1317

[4] Li Tatsien，Kong Dexing. Global Classical Solutions with Small Amplitude for General Quasilniear Hyperbolic Systems. New Approaches in Nonlinear Analysis，FL USA：Hadronic Press，1999. 203－237

[5] Kong Dexing. Breakdown of classical solutions for quasilinear hyperbolic systems with slow decay initial data. Chin Ann of Math，2000，**21**B(4)：413－440

[6] Yan PIng. Global existence of classical solution with small initial total variation for quasilinear linearly degenerate Hyperbolic Systems. Journal of PDE，2003，**16**(4)：321－334

[7] John F. Formation of sigularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. Comm. Pure Appl Math，1974，**27**：377－405

[8] Li Tatsien，Yu Wenci. Boundary Wave Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems. Duck University Mathematics Series NC USA：Duke University，1985. 64－72

Global Existence of Classical Solution with Slowly Decaying Initial Data for Quasilinear Linearly Degenerate Hyperbolic Systems

Yan Ping　Sheng Qirong　Lv Teng

(*College of Mathematics and System Technology*, *Xinjiang University*, *Urumqi* 830046)

Abstract: In this paper, the authors prove the global existence of classical solution to the cauchy problem with slowly decaying initial data with small initial total variation for general first order quasilinear linearly degenerate hyperbolic systems. This generalizes the corresponding result of A. Bressan for initial data with compact support.

Key words: Linear degeneracy; Small initial total variation; Slowly decaying initial data; Quasilinear hyperbolic system.

MR(2000) Subject Classification: 35L45