2005,25A(2):237－244

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一阶脉冲泛函微分方程周期边值问题*

李建利　申建华
(湖南师范大学数学系　长沙 410081)

摘要:考虑脉冲泛函微分方程周期边值问题.利用一个新的比较结果，构造了一个近似解序列，并且获得了一个解的存在性结果.

关键词:比较结果;脉冲方程;周期边值问题;单调迭代方法.

MR(2000)主题分类:34A37; 34C25　　**中图分类号**:O175.8　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)02-237-08

1　引言和预备知识

随着科学技术的飞速发展，人们发现脉冲微分方程较之相应的不带脉冲的微分方程能更准确地描绘现实生活中的某些现象,如在生物学、医学、光学控制、经济学模型中出现的变量状态的突变就可通过带脉冲扰动的模型来更准确的描述[1,2]. 因此研究脉冲微分方程的一般理论是必要的.

我们也注意到，最近几年上下解方法和单调迭代方法已被广泛地用来研究一些非线性问题，尤其边值问题[2,3,4,6,8].

本文,我们考虑下面的一阶脉冲周期边值问题

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),[\varphi x](t)), & t \neq t_k,\ t \in J; \\ \Delta x(t_k) = I(t_k,x(t_k),[\varphi x](t_k)), & k = 1,\cdots,\ p; \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $J=[0,T]$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_p<t_{p+1}=T$, $J_0=J\setminus\{t_1,\ \cdots,t_p\}$, $f,I:J\times R\times R\to R$ 在 $J_0\times R\times R$ 上连续, $f(t_k^-,x,y)$, $f(t_k^+,x,y)$, $I(t_k^-,x,y)$, $I(t_k^+,x,y)$存在,且 $f(t_k^-,x,y)=f(t_k,x,y)$, $I(t_k^-,x,y)=I(t_k,x,y)$, $\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$, $\forall (x,y)\in R\times R$, φ: $PC(J)\to PC(J)$是连续的. 我们引入下面的函数空间:$PC(J)=\{x$: $J\to R$; 对 $t\in J_0$, $x(t)$是连续的, $x(0^+)$, $x(T^-)$, $x(t_k^-)$, $x(t_k^+)$ 存在，且 $x(t_k^-)=x(t_k)$, $k=1,\cdots,p\}$以及 $PC^1(J)=\{x\in PC(J)$; $x|_{(t_k,\ t_{k+1})}\in C^1(t_k,\ t_{k+1})$, $k=0,\cdots,p$, $x'(0^+)$, $x'(T^-)$, $x'(t_k^+)$, $x'(t_k^-)$ 存在$\}$. 很明显，对于下列范数

$$\|x\|_{PC(J)} = \sup\{|x(t)|,\ t\in J\},\ \ \|x\|_{PC^1(J)} = \|x\|_{PC(J)} + \|x'\|_{PC(J)},$$

$PC(J)$, $PC^1(J)$分别是 Banach 空间.

收稿日期:2003-04-23

E-mail:ljianli@sina.com; jhshenzca@yahoo.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10071018)和教育部优秀青年教师基金资助

我们说 $x(t)$ 是方程(1.1)的解意味着 $x\in PC^1(J)$ 满足方程(1.1)的各等式.

为了证明我们的比较结果,需要用到下面的引理[1].

引理 1.1 设 $s\in[0,T)$, $c_k\geqslant 0$, α_k, $k=1,\cdots,m$ 都是常数,且

$$p,q\in PC(J),x\in PC^1(J),$$

如果
$$\begin{cases} x'(t)\leqslant p(t)x(t)+q(t), & t\in[s,T],\ t\neq t_k, \\ x(t_k^+)\leqslant c_kx(t_k)+\alpha_k, & t_k\in[s,T], \end{cases}$$

那么 $\forall\, t\in[s,T]$ 有

$$x(t)\leqslant x(s^+)\Big(\prod_{s<t_k<t}c_k\Big)\exp\int_s^t p(u)\mathrm{d}u+\int_s^t\Big(\prod_{u<t_k<t}c_k\Big)\exp\Big(\int_u^t p(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)q(u)\mathrm{d}u$$
$$+\sum_{s<t_k<t}\Big(\prod_{t_k<t_i<t}c_i\Big)\exp\Big(\int_{t_k}^t p(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\alpha_k.$$

2 比较结果

在这一节,我们将证明一个比较结果,它在本节以后的部分中将扮演一个重要角色.

定理 2.1 假设 $m\in PC^1(J)$ 满足

$$\begin{cases} m'(t)\leqslant -Mm(t)-N[\varphi m](t), & t\in J_0, \\ \Delta m(t_k)\leqslant -L_km(t_k), & k=1,\cdots,p, \\ m(0)\leqslant m(T), \end{cases} \tag{2.1}$$

且 $[\varphi m](t)\geqslant L\inf\limits_{t\in J}m(t)$, $t\in J$, 其中 $M>0$, $N\geqslant 0$, $L>0$, $0\leqslant L_k<1$, $k=1,\cdots,p$, 并且

$$LN(\mathrm{e}^{MT}+1)\mathrm{e}^{MT}\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}(1-L_k)^2}{\int_0^T\prod\limits_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s}, \tag{2.2}$$

那么 $m(t)\leqslant 0$.

证 设 $h(t)=m(t)\mathrm{e}^{Mt}$, 那么(2.1)式可化为

$$\begin{cases} h'(t)\leqslant -N\mathrm{e}^{Mt}[\varphi m](t)=-N\mathrm{e}^{Mt}[\varphi(h(t)\mathrm{e}^{-Mt})], & t\neq t_k, \\ \Delta h(t_k)\leqslant -L_kh(t_k), & k=1,2,\cdots,p, \\ h(0)\leqslant h(T)\mathrm{e}^{-MT}. \end{cases}$$

很明显,我们只须证明 $h(t)\leqslant 0$, $t\in J$ 即可. 如果这一结论不成立,那么存在 $t^*\in J$, 使得 $h(t^*)>0$。我们分两种情形进行讨论.

情形 I $h(t)\geqslant 0$, $\forall\, t\in J$.

由 $h(t)\geqslant 0$ 可推出 $m(t)\geqslant 0$, 这样 $[\varphi m](t)\geqslant L\inf\limits_{t\in J}m(t)\geqslant 0$, 因此

$$h'(t)\leqslant 0,t\in J_0.$$

又因为 $h(t_k^+)\leqslant(1-L_k)h(t_k)\leqslant h(t_k)$, 那么 $h(t)$ 在 J 上是单调不增的,从而

$$h(0)\geqslant h(t^*)>0,\ 且\ h(0)\geqslant h(T).$$

另一方面, $h(0)=m(0)\leqslant m(T)<m(T)\mathrm{e}^{MT}=h(T)$. 矛盾!

情形 II 对某些 $t\in J$, $h(t)<0$. 设

$$\bar{t}=\max\{t\in J,\inf_{s\in J}h(s)=h(t)=-\lambda,\lambda>0\}.$$

不妨设 $\bar{t}\in(t_{m-1},t_m]$, $1\leqslant m\leqslant p+1$(当 $\bar{t}=t_{m-1}^+$ 时,其证明类似). 我们对 $h(T)$ 分两种情形,

$h(T)\geqslant 0$ 或 $h(T)<0$.

(1) 假定 $h(T)\geqslant 0$. 首先我们断言

$$h'(t)\leqslant \lambda LN\mathrm{e}^{MT},\ t\in J_0. \tag{2.3}$$

事实上，令 $J_1=\{t\in J_0, h(t)\geqslant 0\}$，$J_2=\{t\in J_0, h(t)<0\}$，那么

(i) 当 $t\in J_1$ 时，我们有 $m(t)\geqslant 0$，因而 $[\varphi m](t)\geqslant 0$，$h'(t)\leqslant 0$.

(ii) 当 $t\in J_2$ 时，由 $m(t)=h(t)\mathrm{e}^{-Mt}\geqslant h(t)$ 得

$$\inf_{t\in J} m(t)\geqslant \inf_{t\in J} h(t)=-\lambda, \tag{2.4}$$

再根据 $[\varphi m](t)\geqslant L\inf\limits_{t\in J} m(t)$，我们有

$$-[\varphi m](t)\leqslant -L\inf_{t\in J} m(t), \tag{2.5}$$

由(2.4)式和(2.5)式推出 $-[\varphi m](t)\leqslant \lambda L$，$t\in J_0$. 因此

$$h'(t)\leqslant -N[\varphi m](t)\mathrm{e}^{Mt}\leqslant \lambda LN\mathrm{e}^{Mt}\leqslant \lambda LN\mathrm{e}^{MT}.$$

综合(i)，(ii)可知(2.3)式成立. 考虑下面的不等式

$$\begin{cases} h'(t)\leqslant \lambda LN\mathrm{e}^{MT}, & t\in J_0, \\ h(t_k^+)\leqslant (1-L_k)h(t_k), & k=1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{2.6}$$

根据引理 1.1，得

$$h(t)\leqslant h(\bar{t})\prod_{\bar{t}<t_k<t}(1-L_k)+\int_{\bar{t}}^{t}\prod_{s<t_k<t}(1-L_k)\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\mathrm{d}s.$$

令 $t=T$，得

$$\begin{aligned} h(T) &\leqslant h(\bar{t})\prod_{\bar{t}<t_k<T}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{\bar{t}}^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s \\ &=-\lambda\prod_{\bar{t}<t_k<T}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{\bar{t}}^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s \\ &\leqslant -\lambda\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

即
$$h(T)\leqslant -\lambda\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

考虑到 $h(T)\geqslant 0$，从而得 $\prod\limits_{k=1}^{p}(1-L_k)\leqslant LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{T}\prod\limits_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s$，这与(2.2)式矛盾.

(2) 假定 $h(T)<0$. 如果 $\bar{t}<t^*$，类似于(1)的证明可导出一个矛盾. 设 $\bar{t}>t^*$ 且 $t^*\in(t_q, t_{q+1}]$，$0\leqslant q<m$，我们再一次考虑不等式(2.6). 利用引理 1.1，我们有

$$h(t)\leqslant h(0)\prod_{0<t_k<t}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{t}\prod_{s<t_k<t}(1-L_k)\mathrm{d}s.$$

令 $t=t^*$，得

$$h(t^*)\leqslant h(0)\prod_{0<t_k<t^*}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{t^*}\prod_{s<t_k<t^*}(1-L_k)\mathrm{d}s,$$

计及 $h(0)\leqslant h(T)\mathrm{e}^{-MT}$，有

$$h(t^*)\leqslant h(T)\mathrm{e}^{-MT}\prod_{0<t_k<t^*}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_{0}^{t^*}\prod_{s<t_k<t^*}(1-L_k)\mathrm{d}s.$$

因为 $h(t^*)>0$，因此

$$0<h(T)\mathrm{e}^{-MT}\prod_{0<t_k<t^*}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{t^*}\prod_{s<t_k<t^*}(1-L_k)\mathrm{d}s\,.$$

由于
$$\frac{\int_0^{t^*}\prod_{s<t_k<t^*}(1-L_k)\mathrm{d}s}{\prod_{0<t_k<t^*}(1-L_k)}\leqslant\frac{\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s}{\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)},$$

进而有
$$0<h(T)\mathrm{e}^{-MT}\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s.\tag{2.8}$$

由(2.7)式和(2.8)式得
$$\begin{aligned}0<&\Big[-\lambda\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s\Big]\,\mathrm{e}^{-MT}\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)\\&+\lambda LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}0<&\Big[-\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{e}^{-MT}\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)\\&+LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s\\=&-\mathrm{e}^{-MT}\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)^2+\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)LN\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s\\&+LN\mathrm{e}^{MT}\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)^2&<\Big[\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)+\mathrm{e}^{MT}\Big]\mathrm{e}^{MT}\,LN\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s\\&<[\mathrm{e}^{MT}+1]\mathrm{e}^{MT}LN\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

从而
$$LN(\mathrm{e}^{MT}+1)\mathrm{e}^{MT}>\frac{\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)^2}{\int_0^{T}\prod_{s<t_k<T}(1-L_k)\mathrm{d}s},$$

这与(2.2)式矛盾.

综上所述,假设不成立.因此必有 $h(t)\leqslant 0, t\in J$,从而 $m(t)\leqslant 0, t\in J$.证毕. ▌

3 单调迭代方法

在这节,我们利用上下解方法和单调迭代方法,建立边值问题(1.1)的解的存在性判据.首先给出下面的定义.

定义 3.1 函数 $w\in PC^1(J)$称为周期边值问题(1.1)的上解,如果
$$\begin{cases}w'(t)\geqslant f(t,w(t),[\varphi w](t)), & t\in J_0,\\ \Delta w(t)\geqslant I(t,w(t),[\varphi w](t)), & t=t_k,\\ w(0)\geqslant w(T).\end{cases}\tag{3.1}$$

类似地，$v\in PC^1(J)$称为周期边值问题(1.1)的下解，如果(3.1)式中的各不等号反向.

为了方便，我们列出下列条件

(H_1) $v,\ w\in PC^1(J)$分别是方程(1.1)的下上解，且 $v(t)\leqslant w(t),\ t\in J$.

(H_2) 存在常数 $M>0, N\geqslant 0$ 使得

$$f(t,x,\ \varphi x)-f(t,\bar{x},\ \varphi\bar{x})\geqslant -M(x-\bar{x})-N[\varphi x-\varphi\bar{x}],$$

其中 $v(t)\leqslant \bar{x}(t)\leqslant x(t)\leqslant w(t), t\in J$.

(H_3) 存在函数 $L: J\to[0,1)$使得

$$I(t_k,x(t_k),[\varphi x](t_k))-I(t_k,\ \bar{x}(t_k),[\varphi\bar{x}](t_k))\geqslant -L(t_k)(x-\bar{x}),$$

其中 $v(t_k)\leqslant \bar{x}(t_k)\leqslant x(t_k)\leqslant w(t_k), k=1,2,\cdots,\ p$.

(H_4) 函数 φ 满足

$$\|\varphi x-\varphi\bar{x}\|\leqslant Q\|x-\bar{x}\|,\quad \varphi x-\varphi\bar{x}\geqslant\varphi(x-\bar{x}),\quad [\varphi x](t)\geqslant L\inf_{t\in J}x(t),$$

其中 $v(t)\leqslant \bar{x}(t)\leqslant x(t)\leqslant w(t), t\in J$ 且 $L>0, Q>0$ 是常数.

定义区间 $\langle v,\ w\rangle=\{x\in PC(J):\ v(t)\leqslant x(t)\leqslant w(t), t\in J\}$.

对任意 $\eta\in\langle v,\ w\rangle$，我们考虑周期边值问题

$$\begin{cases}x'(t)+Mx(t)+N[\varphi x](t)=\sigma(t), & t\in J_0,\\ \Delta x(t)+L(t)(x-\eta(t))=I(t,\eta(t),[\varphi\eta](t)), & t=t_k, k=1,\cdots,p,\\ x(0)=x(T).\end{cases}\tag{3.2}$$

为了证明随后的定理，我们需要下面的引理[4].

引理 3.1 设 $E_0\subset PC(J)$，对 $\alpha\in[0,1)$，算子 $B: E_0\to R$ 满足

$$|B\phi-B\bar{\phi}|\leqslant\alpha\|\phi-\bar{\phi}\|_{PC},\quad \forall\phi,\bar{\phi}\in E_0,$$

那么 $\forall t_0\in J$，存在 $\phi\in E_0$ 使得 $B\phi=\phi(t_0^+)$.

定理 3.1 记 $L_k=L(t_k), k=1,2,\cdots,p$，如果条件($H_3$)—($H_4$)以及不等式(2.2)成立，

且
$$\frac{NQ}{M}+\frac{1}{e^{MT}-1}\sum_{k=1}^{p}L_k e^{Mt_k}<1.\tag{3.3}$$

那么方程(3.2)有唯一解.

证 $x(t)$是(3.2)式的解当且仅当它满足积分方程

$$\begin{aligned}x(t)=&\frac{1}{e^{MT}-1}\int_0^T(\sigma(s)-N[\varphi x](s))e^{Ms}ds\\&+\frac{1}{e^{MT}-1}\sum_{k=1}^{p}[I(t_k,\eta(t_k),[\varphi\eta](t_k))-L_k(x(t_k)-\eta(t_k))e^{Mt_k}].\end{aligned}\tag{3.4}$$

让 E_0 表示方程(3.2)的解集，定义算子 $B: E_0\to R$ 为

$$\begin{aligned}Bx=&\frac{1}{e^{MT}-1}\int_0^T(\sigma(s)-N[\varphi x](s)e^{Ms}ds\\&+\frac{1}{e^{MT}-1}\sum_{k=1}^{p}[I(t_k,\ \eta(t_k),[\varphi\eta](t_k))-L_k(x(t_k)-\eta(t_k))e^{Mt_k}].\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|Bx-B\bar{x}|&\leqslant\frac{1}{e^{MT}-1}\Big[\int_0^T N|[\varphi x](s)-[\varphi\bar{x}](s)|e^{Ms}ds+\sum_{k=1}^{p}L_k|x(t_k)-\bar{x}(t_k)|e^{Mt_k}\Big]\\&\leqslant\frac{1}{e^{MT}-1}\Big[NQ\frac{e^{MT}-1}{M}\|x-\bar{x}\|_{PC}+\sum_{k=1}^{p}L_k e^{Mt_k}\|x-\bar{x}\|_{PC}\Big]\end{aligned}$$

$$\leqslant (\frac{NQ}{M} + \frac{1}{e^{MT}-1}\sum_{k=1}^{P} L_k e^{Mt_k})\ \| x-\bar{x}\|_{PC},$$

由(3.3)式和引理 3.1 知，$\exists x\in E_0$ 使得 $Bx=x(0)$，这说明方程(3.4)有解，从而方程(3.2)有解. 设 $x(t)$，$\bar{x}(t)$是(3.2)式的两个解，令 $m(t)=x(t)-\bar{x}(t)$，我们能得到

$$\begin{cases} m'(t)\leqslant -Mm(t)-N[\varphi m](t), & t\in J_0,\\ \Delta m(t)\leqslant -L_k m(t), & t=t_k,\\ m(0)=m(T). \end{cases}$$

根据不等式(2.2)以及定理 2.1，得 $m(t)\leqslant 0$，$t\in J$，即 $x(t)\leqslant\bar{x}(t)$. 同理可得 $x(t)\geqslant\bar{x}(t)$. 因此 $x(t)\equiv\bar{x}(t)$，$t\in J$. 证毕. ▍

定理 3.2 假设$(H_1)-(H_4)$以及不等式(2.2)，(3.3)成立，那么存在单调序列$\{v_n\}$，$\{w_n\}$，其中 $v_0=v$，$w_0=w$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=\rho(t)$，$\lim\limits_{n\to\infty}w_n(t)=\gamma(t)$在 J 上一致成立。这里 ρ，γ 分别是方程(1.1)在区间$\langle v,w\rangle$上的最小解和最大解，也就是说，如果 x 是(1.1)任一解，且 $v(t)\leqslant x(t)\leqslant w(t)$，$t\in J$，那么

$$v\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\rho\leqslant x\leqslant\gamma\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_1\leqslant w,\ \forall t\in J,\ \forall n.$$

证 $\forall\eta\in\langle v,w\rangle$，考虑方程

$$\begin{cases} x'+Mx+N[\varphi x](t)=M\eta(t)+N[\varphi\eta](t)+f(t,\eta(t),[\varphi\eta](t)), & t\in J_0,\\ \Delta x+L(t)x=L(t)\eta(t)+I(t,\eta(t),[\varphi\eta](t)), & t=t_k,k=1,\cdots,p,\\ x(0)=x(T). \end{cases}\tag{3.5}$$

由定理 3.1 知，方程(3.5)有唯一解 $x\in PC^1(J)$. 我们定义算子 $A:\langle v,w\rangle\to PC^1(J)$为 $A\eta=x$，那么我们可以证明算子 A 具有下列性质

(a) $v\leqslant Av$，$Aw\leqslant w$；(b) $\eta\geqslant\xi\Rightarrow A(\eta)\geqslant A(\xi)$，其中 $\eta,\xi\in\langle v,w\rangle$.

性质(a)的证明. 设 $v_1=Av$，$m(t)=v(t)-v_1(t)$，$t\in J$，根据(H_4)我们有

$$\begin{aligned} m'(t)&=v'(t)-v_1'(t)\\ &\leqslant f(t,v(t),[\varphi v](t))+Mv_1+N[\varphi v_1](t)-Mv-N[\varphi v](t)-f(t,v(t),[\varphi v](t))\\ &\leqslant -M(v-v_1)-N[\varphi(v(t)-v_1(t))]\\ &\leqslant -Mm(t)-N[\varphi m](t),\quad t\neq t_k, \end{aligned}$$

当 $t=t_k$ 时

$$\begin{aligned} \Delta m(t_k)&=\Delta v(t_k)-\Delta v_1(t_k)\\ &\leqslant I(t_k,v(t_k),[\varphi v](t_k))-L(t_k)[v(t_k)-v_1(t_k)]-I(t_k,v(t_k),[\varphi v](t_k))\\ &=-L_k m(t_k), \end{aligned}$$

且
$$m(0)=v(0)-v_1(0)\leqslant v(T)-v_1(T)=m(T),$$

由定理 2.1 知 $m(t)\leqslant 0$，$t\in J$，即 $v(t)\leqslant v_1(t)$. 类似地可证 $w_1(t)=Aw(t)\leqslant w(t)$，$t\in J$.

性质(b)的证明. 设 $\eta_1,\eta_2\in\langle v,w\rangle$且 $\eta_1(t)\leqslant\eta_2(t)$，令 $m(t)=x_1(t)-x_2(t)$，其中 $x_1=A\eta_1$，$x_2=A\eta_2$，利用$(H_1)-(H_4)$推出

$$\begin{aligned} m'(t)&=x'_1(t)-x'_2(t)\\ &=M(\eta_1(t)-x_1(t))+N([\varphi\eta_1](t)-[\varphi x_1](t))+f(t,\eta_1(t),[\varphi\eta_1](t))\\ &\quad -M(\eta_2(t)-x_2(t))-N([\varphi\eta_2](t)-[\varphi x_2](t))-f(t,\eta_2(t),[\varphi\eta_2](t))\\ &\leqslant -Mm(t)-N([\varphi x_1](t)-[\varphi x_2](t))\\ &\leqslant -Mm(t)-N[\varphi m](t),\quad t\neq t_k, \end{aligned}$$

当 $t=t_k$ 时

$$\begin{aligned}\Delta m(t_k) &= L(t_k)[\eta_1(t_k)-x_1(t_k)]+I(t_k,\eta_1(t_k),[\varphi\eta_1](t_k)) \\ &\quad -L(t_k)[\eta_2(t_k)-x_2(t_k)]-I(t_k,\eta_2(t_k),[\varphi\eta_2](t_k)) \\ &\leqslant -L(t_k)[x_1(t_k)-x_2(t_k)] \\ &= -L_k m(t_k),\end{aligned}$$

且 $$m(0)=x_1(0)-x_2(0)=x_1(T)-x_2(T)=m(T),$$

那么根据定理 2.1 得 $m(t)\leqslant 0, t\in J$,即 $A\eta_1\leqslant A\eta_2$.

定义序列$\{v_n(t)\},\{w_n(t)\}$为

$$v_{n+1}=Av_n, w_{n+1}=Aw_n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

其中 $v_0=v, w_0=w$. 从性质(a)和(b),我们可得

$$v_0\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_2\leqslant w_1\leqslant w_0,\quad \forall n, t\in J.$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}v_n(t)=\rho(t),\quad \lim_{n\to\infty}w_n(t)=\gamma(t). \tag{3.6}$$

考虑下面的方程

$$\begin{cases} v_{n+1}(t)+Mv_{n+1}(t)+N[\varphi v_{n+1}](t) \\ =Mv_n(t)+N[\varphi v_n](t)+f(t,v_n(t),[\varphi v_n](t)),\quad t\neq t_k, \\ \Delta v_{n+1}(t)+L(t)v_{n+1}(t)=L(t)v_n(t)+I(t,v_n,[\varphi v_n](t)),\quad t=t_k, k=1,\cdots,p, \\ v_{n+1}(0)=v_{n+1}(T),\end{cases}$$

计及(3.6)式可推知,$\rho(t)$是(1.1)式的解.同理,$\gamma(t)$也是(1.1)式的解.

为了证明 ρ 和 γ 是方程(1.1)的最小解和最大解,我们将说明,如果 $x\in\langle v, w\rangle$是(1.1)式的一个解,那么 $v\leqslant\rho\leqslant x\leqslant\gamma\leqslant w, t\in J$. 为此,假定对某个 n 有 $v_n(t)\leqslant x(t)\leqslant w_n(t)$,那么由性质(b),我们有 $v_{n+1}(t)\leqslant x(t)\leqslant w_{n+1}(t), t\in J$. 由归纳法可得

$$v_n(t)\leqslant x(t)\leqslant w_n(t), t\in J, \forall n,\ 令\ n\to\infty,\ 得\ v\leqslant\rho\leqslant x\leqslant\gamma\leqslant w.$$ ▌

4 例子

考虑下列方程

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{1}{10}(-|\sin t|+x-2)^5-\dfrac{e^{-3\pi}}{16(e^\pi+1)}(x^2-1)^2+\dfrac{9e^{-3\pi}}{16(e^\pi+1)},\quad t\in[0,2\pi], t\neq\pi, \\ \Delta x=-\dfrac{2}{3}(x-2)+(x^2-1)^{\frac{1}{5}}+\cos t,\quad t=\pi, \\ x(0)=x(2\pi).\end{cases} \tag{4.1}$$

设 $\varphi(x)=x^2-1, f(t,x,y)=-\dfrac{1}{10}(-|\sin t|+x-2)^5-\dfrac{e^{-3\pi}}{16(e^\pi+1)}y^2+\dfrac{9e^{-3\pi}}{16(e^\pi+1)}, I(t,x,y)=-\dfrac{2}{3}(x-2)+y^{\frac{1}{5}}+\cos t$,易证 $v(t)\equiv 2, w(t)\equiv 3$ 分别 是下解和上解. 当 $2\leqslant\bar{x}\leqslant x\leqslant 3$,我们有 $3\leqslant y=x^2-1\leqslant 8$, $\varphi(x)=x^2-1\geqslant x, \varphi(x)-\varphi(\bar{x})\geqslant\varphi(x-\bar{x}), |\varphi(x)-\varphi(\bar{x})|=|x^2-\bar{x}^2|=|x+\bar{x}\|x-\bar{x}|\leqslant 6|x-\bar{x}|, f_x=-\dfrac{1}{2}(-|\sin t|+x-2)^4\geqslant-\dfrac{1}{2}, f_y=-\dfrac{e^{-3\pi}}{8(e^\pi+1)}y\geqslant-\dfrac{e^{-3\pi}}{e^\pi+1}$, $I_x=-\dfrac{2}{3}$, $I_y=\dfrac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}>0$. 取 $M=\dfrac{1}{2}, N=\dfrac{e^{-3\pi}}{e^\pi+1}, L=1, Q=6, L_k=\dfrac{2}{3}$,这样条件($H_1$)-($H_4$)满足,且

$$\int_0^{2\pi}\prod_{s<t_k<2\pi}(1-L_k)\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}(1-\frac{2}{3})\mathrm{d}s+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}s=\frac{4\pi}{3},\prod_{k=1}^{p}(1-L_k)^2=\frac{1}{9},$$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}(1-L_k)^2}{\int_0^{2\pi}\prod\limits_{s<t_k<2\pi}(1-L_k)\mathrm{d}s}=\frac{1}{9}/\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{12\pi},$$

$$LN(\mathrm{e}^{MT}+1)\mathrm{e}^{MT}=\mathrm{e}^{-2\pi}\leqslant\frac{1}{12\pi},$$

$$\frac{NQ}{M}+\frac{1}{\mathrm{e}^{MT}-1}\prod_{k=1}^{p}L_k\mathrm{e}^{Mt_k}=\frac{12\mathrm{e}^{-3\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}+1}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\times\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$$

以上说明(2.2)式和(3.3)式成立. 根据定理3.2,方程(4.1)存在最小解 $\rho(t)$ 和最大解 $\gamma(t)$,且 $2\leqslant\rho(t)\leqslant\gamma(t)\leqslant3$, $\forall\, t\in[0,2\pi]$.

参 考 文 献

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989

[2] Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive Differential Equations: Periodic Solution and Applications. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1993

[3] Franco D, Liz E, Nieto J J, Rogovchenko Y V. A contribution to the study of functional differential equations with impulses. Math Nachr, 2000, **218**(1): 49—60

[4] Liu Xinzhi. Periodic boundary value problem for impulsive systems containing Hammerstein type integrals. Dynamic Systems and Appl, 1997, **6**(3): 517—528

[5] Nieto J J. Basic theory for nonresonance impulsive periodic problem of first order. J Math Anal Appl, 1997, **205**(2): 423—433

[6] Liu X, Guo D. Initial value problems for first order impulsive integro-differential equations in Banach spaces. Communications on Applied Nonlinear Analysis, 1995, **2**(1): 65—83

[7] Liu X. Nonlinear boundary value problems for first order impulsive integro-differential equations. Appl Anal, 1990, **36**(1): 119—130

[8] Hristova S G, Bainov D D. Monotone-iterative techniques of V. Lakshmikantham for a boundary value problem for systems of impulsive differential-difference equations. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 1—13

Periodic Boundary Value Problems for Functional Differential Equations with Impulses

Li Jianli Shen Jianhua

(*Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha* 410081)

Abstract: This paper is concerned with the periodic boundary value problem for functional differential equations with impulses. By developing a comparison result, the authors are able to construct a sequence of approximate solutions and to give an existence result.

Key words: Comparison result; Impulsive equation; Periodic boundary value problem; Monotone iterative technique.

MR(2000) Subject Classification: 34A37; 34C25