2005,**25A**(6):789－798

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

# 随机脉冲微分系统指数稳定性*

吴述金

（华东师范大学统计系　上海 200062）

**摘要**:该文首先给出了具有随机脉冲时刻影响的非线性微分系统模型,然后得到了该模型零解的 p 阶矩指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件,在所得结果中不要求$\frac{dV(t,x(t))}{dt}$定负.最后,给出一个例子说明所得结果的应用.

**关键词**:随机脉冲微分系统;p 阶矩指数稳定;几乎必然指数稳定;*Liapunov* 函数。

**MR(2000)主题分类**:34A37;34D20　　**中图分类号**:O175.13　　**文献标识码**:A

**文章编号**:1003-3998(2005)06-789-10

## 1　引言

脉冲微分系统在研究或数值模拟生物及物理现象时具有广泛应用[1－3],因此,脉冲微分系统定性研究具有重要意义.近 20 年,许多数学工作者热衷于脉冲微分系统定性研究,并且取得了很多非常好的结果[4－11],其中文[8－11]讨论了脉冲微分系统的稳定性.M. U. Akhmetov 和 A. Zafer (2000)利用 Liapunov 第二方法得到了变脉冲时刻的微分系统零解的稳定、渐近稳定及不稳定判据[8];文[9]中,C. H. Kou,S. N. Zhang 和 S. J. Wu (2002)通过变异 Liapunov 方法讨论了变脉冲时刻微分系统零解基于两种测度稳定性和不稳定性;A. A. Soliman (2002, 2003)利用 Liapunov 直接法和比较原理研究了扰动脉冲微分系统的最终稳定性以及最终 Lipschtz 稳定性[10, 11].

对于脉冲微分系统,已知文献主要处理脉冲时刻是一列给定点的情形[1－3,10].然而实际中脉冲发生的时刻不总是在固定时刻而往往是随机的,也就是说,脉冲时刻是随机变量.由于随机脉冲时刻的影响,随机脉冲微分系统的任意解均为一个随机过程,这与固定脉冲时刻微分系统的解相去甚远,该系统的解是分段连续函数.自然地,我们想知道随机脉冲微分系统的定性性质是否有所变化,比如稳定性、有界性和周期解的存在性,等等.事实上,S. J. Wu 和 X. Z. Meng(2004)在文[12]中通过 Liapunov 方法已经研究了随机脉冲微分系统的 $p$ 阶矩有界性.本文首先给出了具有随机脉冲时刻影响的非线性微分系统模型,然后得到了该模型零解的 $p$ 阶矩指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件,在所得结果中不要求$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}$定负.最后,给出一个例子说明所得结果的应用.

---

收稿日期:2004-01-28

E-mail:sjwu@stat.ecnu.edu.cn

* 基金项目:本文受国家自然科学基金部分资助(10371074)

## 2 准备知识

假设 $\tau_k$ 是定义在 $D_k\equiv(0,d_k)$ 上的随机变量, $k=1,2,\cdots$, 其中 $0<d_k<+\infty$。进一步, 假设当 $i\neq j$ 时, $\tau_i$ 和 $\tau_j$ 相互独立, $i,j=1,2,\cdots$; $\tau\in q$, $R$ 为常数。为了叙述简单起见, 记

$$\mathcal{N}=\{1,2,\cdots\},\ R_+=[0,+\infty),\ R_\tau=[\tau,+\infty)$$

和

$$R^n(H)=\{x\in R^n:\|x\|\leqslant H\},\quad \forall H\in R_+,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 $R^n$ 空间中的欧氏范数.

考虑非线性随机脉冲微分系统

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)),\ \text{a.e.}\ \xi_{k-1}<t<\xi_k,\ \forall k\in\mathcal{N},\\ \Delta x(\xi_k)=I_k(\tau_k,x(\xi_k^-)),\ \text{a.e.}\ \forall k\in\mathcal{N},\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

和相应的没有脉冲的微分系统

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)),\quad t\in R_\tau;\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{2}$$

其中 $f:R_\tau\times R^n\to R^n$ 满足 $f(t,0)=0$ 对所有 $t\in R_\tau$ 成立; $\xi_0=t_0$, $\xi_k=\xi_{k-1}+\tau_k$, $k=1,2,3,\cdots$; $\Delta x(\xi_k)\equiv x(\xi_k)-x(\xi_k^-)$; $I_k$: $D_k\times R^n\to R^n$ 满足 $I_k(\cdot,0)=0$ 对所有 $k=1,2,\cdots$; $t_0\in R_\tau$ 且 $x_0\in R^n$; "a. e."表示"几乎必然".

在给出主要结论之前,需要下面定义.

**定义 1** 假设 $p>0$, 系统(1)的零解被称为 $p$ 阶矩指数稳定, 如果存在 $c,\mu>0$ 使得

$$E\|x(t)\|^p<c\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0,$$

这里及以后, $E(\cdot)$ 表示数学期望.

一般地, 2 阶矩指数稳定被称为均方指数稳定.

**定义 2** 系统(1)的零解被称为几乎必然指数稳定, 如果存在 $c,\mu>0$ 使得

$$\|x(t)\|<c\|x_0\|\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}\quad \text{a.e.},\quad t\geqslant t_0.$$

**注 1** 几乎必然指数稳定一定是 $p$ 阶矩指数稳定($p>0$).

令 $C(R_\tau\times R^n,R_+)$ 表示所有定义在 $R_\tau\times R^n$ 上的非负函数 $V(t,x)$ 集合, 并且 $V(t,x)$ 关于 $t$ 和 $x$ 均连续可微. 对于 $V\in C(R_\tau\times R^n,R_+)$, 定义从 $R_\tau\times R^n$ 到 $R$ 上的算子 $\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}=V_t(t,x)+V_x(t,x)f(t,x),$$

其中

$$V_t(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$$

且
$$V_x(t,x)=\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1},\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right).$$

下文中, 我们总是假设系统(1)的解存在且唯一, 并且系统(1)的所有解均为右连左极的.

下面给出两个引理.

**引理 1** 对于系统(2), 如果存在函数 $V\in C(R_\tau\times R^n,R_+)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant\lambda(t)V(t,x(t)),\quad\forall t\in[t_{k-1},t_k),$$

其中 $\lambda:[t_{k-1},t_k)\to R$, $t_k,t_{k-1}\in R_\tau$ 且 $t_k>t_{k-1}$. 则

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_{k-1},x_{t_{k-1}})\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s},$$

对所有 $t\in[t_{k-1},t_k)$成立.

证明比较容易,略.

**引理 2** 对于系统(2),如果存在函数 $V\in C(R_\tau\times R^n,R_+)$和常数 $\rho>0$ 满足下列条件

(i) $V(t,x)\geqslant u(\|x\|)$,其中 $u\in\mathscr{K}$;

(ii) 当 $x(t)\in R^n(\rho)$时,

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant\lambda(t)V(t,x(t)),\quad\forall t\in[t_{k-1},t_k),$$

其中 $\lambda:[t_{k-1},t_k)\to R$;

(iii) $\int_{t_{k-1}}^{t_k}\lambda^+(s)\mathrm{d}s<+\infty$, 其中 $\lambda^+(s)=\max\{\lambda(s),0\}$.

则对任意的 $V(t_{k-1},x(t_{k-1}))<u(\rho)\mathrm{e}^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\lambda^+(s)\mathrm{d}s}$,有

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s},\quad t\in[t_{k-1},t_k).$$

**证** 我们宣称:如果 $V(t_{k-1},x(t_{k-1}))<u(\rho)\mathrm{e}^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\lambda^+(s)\mathrm{d}s}$,则

$$V(t,x(t))<u(\rho),\quad\forall t_{k-1}\leqslant t<t_k.\tag{3}$$

显然 $V(t_{k-1},x(t_k))<u(\rho)$. 如果(3)式不真,则存在 $t_1\in[t_{k-1},t_k)$使得

$$V(t_1,x(t_1))=u(\rho)\quad\text{和}\quad V(t,x(t))<u(\rho),\quad\forall t_{k-1}\leqslant t<t_1,$$

即

$$\|x(t)\|\leqslant\rho,\quad\forall t\in[t_{k-1},t_1].\tag{4}$$

对任意的 $t\in[t_{k-1},t_1]$,由(4)式和假设(ii)得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant\lambda(t)V(t,x(t)),$$

故

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&=V(t_{k-1},x(t_{k-1}))+\int_{t_{k-1}}^{t}\frac{\mathrm{d}V(s,x(s))}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\&\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))+\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)V(s,x(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\\&\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\lambda^+(s)\mathrm{d}s}\\&<u(\rho),\quad\forall t\in[t_{k-1},t_1],\end{aligned}$$

因此 $V(t_1,x(t_1))<u(\rho)$,这导致矛盾,所以(3)式为真.

由(3)式得 $\|x(t)\|<\rho$ 对所有 $t\in[t_{k-1},t_k)$成立,进一步,对于任意的 $t\in[t_{k-1},t_k)$,由假设(ii)得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant\lambda(t)V(t,x(t)).$$

对上式积分可得

$$V(t,x(t))=V(t_{k-1},x(t_{k-1}))+\int_{t_{k-1}}^{t}\frac{\mathrm{d}V(s,x(s))}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))+\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)V(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

再由 Gronwall 不等式得

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_{k-1},x(t_{k-1}))\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s},\quad \forall t\in[t_{k-1},t_k).$$

证毕. ∎

## 3 主要结果

**定理 1** 假设存在函数 $V\in C(R_\tau\times R^n,\ R_+)$ 和正常数 $c_1,c_2$ 满足下列条件

(i) $c_1\|x\|^p\leqslant V(t,x)\leqslant c_2\|x\|^p$;

(ii) 存在 $\mu>0$ 和 $\lambda:R_\tau\to R_+$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant[-\mu+\lambda(t)]V(t,x(t))\quad \text{a. e.},\ 当\ \xi_{j-1}<t<\xi_j\quad,\forall j\in\mathcal{N};$$

(iii) 存在 $w_j:D_j\to R_+$,使得

$$V(\xi_j,x(\xi_j))\leqslant w_j(\tau_j)V(\xi_j,x(\xi_j^-))\quad \text{a. e.},\quad \forall j\in\mathcal{N},$$

这里及以后,$V(\xi_j,x(\xi_j))\equiv V(\xi_j,x(\xi_j^-)+I_j(x(\xi_j^-)))\quad$ a. e., $j\geqslant 1$;

(iv) $\int_{\tau}^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s<+\infty$;

(v) 存在 $M_1>0$,使得

$$E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]+\prod_{i=1}^{+\infty}E[w_i(\tau_i)]\leqslant M_1$$

对所有 $t\in R_\tau$ 成立,其中约定当 $i=1$ 时,$\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\cdot)=1$;$\chi_A(t)$ 为示性函数,即:当 $t\in A$ 时,$\chi_A(t)=1$;当 $t\notin A$ 时,$\chi_A(t)=0$.

则系统(1)的零解是 $p$ 阶矩指数稳定的.

**证** 对任意的 $t_0\in R_\tau$,由假设(i)得 $V(t_0,x_0)\leqslant c_2\|x_0\|^p$. 进一步,由引理 1 得

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\quad \text{a. e.}\tag{5}$$

对所有 $t\in[t_0,\xi_1)$ 成立.

下面我们将证明

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\quad \text{a. e.}\tag{6}$$

对所有 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$ 成立,$i=1,2,3,\cdots$,这里约定:当 $i=1$ 时,$\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\cdot)=1$.

当 $i=1$ 时,由(5)式得(6)式为真. 假设当 $i=k(k\geqslant 1)$ 时,(6)式为真,即

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}w_j(\tau_j)\quad \text{a. e.}$$

对所有 $t\in[\xi_{k-1},\xi_k)$ 成立. 由假设(iii)得

$$V(\xi_k,x(\xi_k))\leqslant w_k(\tau_k)V(\xi_k,x(\xi_k^-))$$
$$\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(\xi_k-t_0)+\int_{t_0}^{\xi_k}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\prod_{j=1}^{k}w_j(\tau_j)\quad \text{a. e.}\ .\tag{7}$$

由(7)式根据引理1易得

$$V(t,x(t))\leqslant V(\xi_k,x(\xi_k))\mathrm{e}^{\int_{\xi_k}^{t}[-\mu+\lambda(s)]\mathrm{d}s}$$

$$\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\prod_{j=1}^{k}w_j(\tau_j)\quad \text{a. e.}$$

对所有 $t\in[\xi_k,\xi_{k+1})$ 成立,即:当 $i=k+1$ 时,(6)式也成立.由数学归纳法知,(6)式对所有 $i=1,2,3,\cdots$ 均成立.

令 $\xi_\infty=(P)\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n$.对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$,如果存在 $i\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$,由(6)式得

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)$$

$$\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\Big]\quad \text{a. e.}.$$

否则,不存在 $i\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$,则 $\xi_\infty(\omega)<+\infty$ a. e. 且 $t\in[\xi_\infty,+\infty)$,由(6)式得

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\chi_{[\xi_\infty,+\infty)}(t)$$

$$\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\Big]\quad \text{a. e.}.$$

总之,对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$,我们有

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\Big]\quad \text{a. e.}.$$

进一步,由假设(i)得

$$\|x(t)\|^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\Big]\quad \text{a. e.}$$

对所有 $t\geqslant t_0$ 均成立.因此,

$$E\|x(t)\|^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s}\cdot E\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\Big]$$

对所有 $t\geqslant t_0$ 成立.由假设(iv, v)和(8)式得

$$E\|x(t)\|^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}M_1\mathrm{e}^{M_0}\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$$

对所有 $t\geqslant t_0$ 成立,其中 $M_0=\int_{\tau}^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s$.令 $c<\frac{c_2}{c_1}M_1\mathrm{e}^{M_0}$,则 $E\|x(t)\|^p\leqslant c\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$ 对所有 $t\geqslant t_0$ 成立.证毕. ▌

**注 2** 定理1中的条件(iii)等价于

$$V(\xi_j,x(\xi_j))\leqslant w_j(\xi_j-\xi_{j-1})V(\xi_j,x(\xi_j^-)),$$

即:在随机时刻 $\xi_j$ 脉冲的影响与 $\xi_i$ 独立,$i<j$.

**注 3** 下列任一条件成立时,定理1中的条件(v)成立.

(a) $\prod_{j=1}^{+\infty}E[1\vee w_j(\tau_j)]<+\infty$,其中 $1\vee(\cdot)=\max\{\cdot,1\}$。

(b) $E[w_j(\tau_j)]$对所有 $j\in\mathcal{N}$ 均存在,且存在 $N\in\mathcal{N}$ 和 $\rho\in[0,1)$使得:$E[w_j(\tau_j)]\leqslant\rho,j\geqslant N$.

事实上,对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$,则至多存在一个 $k\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{k-1}(\omega),\xi_k(\omega))$.如果

存在 $k\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{k-1},\xi_k)$，则 $\chi_{[\xi_{k-1},\xi_k)}(t)=1$ 且 $\chi_{[\xi_{j-1},\xi_j)}(t)=0$ 对所有 $j\in\mathcal{N}$ 且 $j\neq k$ 成立；否则 $\chi_{[\xi_{j-1},\xi_j)}(t)=0$ 对所有 $j\in\mathcal{N}$ 成立. 因此，对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$，我们有

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)\leqslant 1.$$

如果条件(a)满足。令 $M_2=\prod\limits_{j=1}^{+\infty}E[1\vee w_j(\tau_j)]$，则

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]&\leqslant E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}1\vee w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]\\
&\leqslant E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{+\infty}1\vee w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]\\
&=E[\prod_{j=1}^{+\infty}1\vee w_j(\tau_j)\sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]\\
&\leqslant E[\prod_{j=1}^{+\infty}1\vee w_j(\tau_j)]\\
&=\prod_{j=1}^{+\infty}E[1\vee w_j(\tau_j)]\\
&=M_2,
\end{aligned}$$

故

$$E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]+\prod_{i=1}^{+\infty}E[w_i(\tau_i)]\leqslant 2M_2.$$

取 $M_1=2M-2$，则定理 1 中条件(v)满足.

如果条件(b)满足. 由 $E[w_j(\tau_j)]$ 对所有 $j\in\mathcal{N}$ 均存在得：存在 $M_3>0$ 使得

$$\prod_{j=1}^{k}E[w_j(\tau_j)]\leqslant M_3,\quad \forall k=1,2,\cdots,N-1.$$

因此

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]&\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}E[w_j(\tau_j)]\\
&=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i}E[w_j(\tau_j)]\\
&\leqslant 1+M_3\cdot(N-1+\sum_{i=N}^{+\infty}\prod_{j=N}^{i}E[w_j(\tau_j)])\\
&=1+M_3\cdot(N-1+\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i}E[w_{N-1+j}(\tau_{N-1+j})])\\
&\leqslant 1+M_3\cdot(N-1+\sum_{i=1}^{+\infty}\rho^i)\\
&=1+M_3\cdot(N-1+\frac{\rho}{1-\rho}),
\end{aligned}$$

进一步，

$$E[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)]+\prod_{i=1}^{+\infty}E[w_i(\tau_i)]\leqslant 1+M_3\cdot(N+\frac{\rho}{1-\rho}).$$

取 $M_1=1+M_3\cdot(N+\frac{\rho}{1-\rho})$,则定理 1 中条件(v)满足.

**定理 2** 假设存在函数 $V\in C(R_\tau\times R^n, R_+)$ 和常数 $p,H_1,H_2>0$ 满足下列条件

(i) $c_1\|x\|^p\leqslant V(t,x)\leqslant c_2\|x\|^p$,其中 $c_1$ 和 $c_2$ 均为正数;

(ii) 存在 $\mu>0$ 和 $\lambda:R_\tau\to R_+$ 使得:当 $x(t)\in R^n(H_1)$ a. e. 时,

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant[-\mu+\lambda(t)]V(t,x(t))\quad \text{a. e.,当 } \xi_{j-1}<t<\xi_j,\ \forall j\in\mathcal{N};$$

(iii) 存在 $w_j:D_j\to R_+$ 使得:当 $x(\xi_j^-)\in R^n(H_2)$ a. e. 时,

$$V(\xi_j,x(\xi_j))\leqslant w_j(\tau_j)V(\xi_j,x(\xi_j^-))\quad \text{a. e.},\ \forall j\in\mathcal{N};$$

(iv) $\int_\tau^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s<+\infty$;

(v) $\prod_{j=1}^{+\infty}\sup_{s\in D_j}w_j(s)<+\infty$.

则系统(1)得零解几乎必然指数稳定.

**证** 由 $\prod_{j=1}^{+\infty}\sup_{s\in D_j}w_j(s)<+\infty$, 我们宣称:存在 $M\geqslant1$,使得

$$\prod_{j=1}^{k}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\leqslant M\quad\forall k\in\mathcal{N}. \tag{9}$$

假设(9)式不真,则存在 $\{k_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 满足当 $i\to+\infty$ 时 $k_i\to+\infty$,使得: $\prod_{j=1}^{k_i}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\geqslant i$ 对所有 $i=1,2,\cdots$ 成立. 令 $i\to+\infty$ 得 $\lim_{i\to+\infty}\prod_{j=1}^{k_i}\sup_{s\in D_j}w_j(s)=+\infty$,这与 $\prod_{j=1}^{+\infty}\sup_{s\in D_j}w_j(s)<+\infty$ 矛盾,因此(9) 式为真。

取 $\rho=\min\{H_1,H_2\}$,则 $\rho>0$. 进一步,取 $\delta>0$ 使得 $\delta<\rho\cdot\gamma^{\frac{-1}{p}}$,其中 $\gamma=\frac{c_2}{c_1}M\mathrm{e}^{\int_\tau^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s}$,显然 $0<\delta<\rho$.

下面我们将证明:对任意的 $\|x_0\|<\delta$,

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\cdot\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^t\lambda(s)\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{i-1}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\quad\text{a. e.} \tag{10}$$

对所有 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$成立,$i=1,2,3,\cdots$,这里约定:当 $i=1$ 时, $\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\cdot)=1$.

当 $i=1$ 时,由 $\|x_0\|<\delta$ 和假设(i)得

$$V(t_0,x_0)\leqslant c_2\|x_0\|^p, \tag{11}$$

显然

$$V(t_0,x_0)\leqslant c_1\rho^p\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\xi_1}\lambda(s)\mathrm{d}s}\quad\text{a. e.}.$$

对任意的 $t\in[t_0,\xi_1)$,根据引理 2 和(11)式,

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_0,x_0)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^t\lambda(s)\mathrm{d}s}\leqslant c_2\|x_0\|^p\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^t\lambda(s)\mathrm{d}s}\quad\text{a. e.},$$

即:当 $i=1$ 时,(10)式成立. 假设当 $i=k$ 时(10)式成立,其中 $k\geqslant1$ ,即

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p\cdot\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^t\lambda(s)\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\quad\text{a. e.}, \tag{12}$$

对所有 $t\in[\xi_{k-1},\xi_k)$成立. 显然,$V(\xi_k,x(\xi_k^-))<c_1\rho^p$ a. e.,因此 $\|x(\xi_k^-)\|<\rho$ a. e.. 进一

步，由(12)式得

$$\begin{aligned}V(\xi_k,x(\xi_k))&\leqslant w(\tau_k)V(\xi_k,x(\xi_k^-))\\&\leqslant c_2\|x_0\|^p\cdot e^{-\mu(\xi_k-t_0)+\int_{t_0}^{\xi_k}\lambda(s)ds}\prod_{j=1}^{k}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\quad \text{a. e.},\end{aligned}\tag{13}$$

显然 $V(\xi_k,x(\xi_k))\leqslant c_1\rho^p$ a. e. 且 $\|\xi_k\|\leqslant\rho$ a. e.. 则由引理 2 和(13)式得

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\leqslant V(\xi_k,x(\xi_k))e^{\int_{\xi_k}^{t}(-\mu+\lambda(s))ds}\\&\leqslant c_2\|x_0\|^p\cdot e^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}\prod_{j=1}^{k}\sup_{s\in D_j}w_j(s)\quad \text{a. e.}\end{aligned}$$

对所有 $t\in[\xi_k,\xi_{k+1})$ 成立，即：当 $i=k+1$ 时，(10)式也成立. 根据数学归纳法得，对一切 $i=1,2,3,\cdots$，(10)式都成立.

令 $\xi_\infty=(P)\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n$. 对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$，如果存在 $i\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$，则由(10)式得

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p e^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}\cdot\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)\quad \text{a. e.}.$$

否则，不存在 $i\in\mathcal{N}$ 使得 $t\in[\xi_{i-1},\xi_i)$，则 $\xi_\infty(\omega)<+\infty$ a. e. 且 $t\in[\xi_\infty,+\infty)$. 由(10)式得

$$V(t,x(t))\leqslant c_2\|x_0\|^p e^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}\cdot\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\chi_{[\xi_\infty,+\infty)}(t)\quad \text{a. e.}.$$

总之，对任意的 $t\geqslant t_0$ 和 $\omega\in\Omega$，我们有

$$\begin{aligned}V(t,x(t))\leqslant{}&c_2\|x_0\|^p e^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}\\&\cdot\Big[\sum_{i=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i-1}w_j(\tau_j)\chi_{[\xi_{i-1},\xi_i)}(t)+\prod_{i=1}^{+\infty}w_i(\tau_i)\chi_{[\xi_\infty,+\infty)}(t)\Big]\quad \text{a. e.}.\end{aligned}$$

故对任意的 $t\geqslant t_0$，下式成立

$$V(t,x(t))<c_2\|x_0\|^p M e^{-\mu(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}\quad \text{a. e.}.$$

根据假设(i)得

$$\|x(t)\|\leqslant c\|x_0\|e^{-\frac{\mu}{p}(t-t_0)}\quad \text{a. e.}\quad \forall t\geqslant t_0,$$

其中 $c=\dfrac{c_2}{c_1}e^{\int_\tau^{+\infty}\lambda(s)ds}$. 证毕. ▌

## 4 应用举例

设 $\tau_k$ 为定义在$(0,+\infty)$上的随机变量，$E(\tau_k^2)$存在，且当 $k\neq j$ 时，$\tau_i$ 和 $\tau_j$ 相互独立，$k,j=1,2,\cdots$.

考虑非线性随机脉冲微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=(-\mu_1+M_1e^{-t})x_1+a_1x_1x_3{}^2+x_2x_3x_4;\\\dfrac{dx_2}{dt}=(-\mu_2+M_2e^{-t})x_2-x_1x_3x_4+a_2x_2x_4{}^2,\ \xi_{k-1}<t<\xi_k;\\\dfrac{dx_3}{dt}=(-\mu_3+M_3e^{-t})x_3+a_3x_1{}^2x_3+x_1x_2x_4,\ \forall k=1,2,3,\cdots;\\\dfrac{dx_4}{dt}=(-\mu_4+M_4e^{-t})x_4-x_1x_2x_3+a_4x_2{}^2x_4\end{cases}\tag{14}$$

和

$$\begin{cases} x_1(\xi_k) = c_1(k)\tau_k \cdot x_1(\xi_k^-); \\ x_2(\xi_k) = c_2(k)\tau_k \cdot x_2(\xi_k^-); \\ x_3(\xi_k) = c_3(k)\tau_k \cdot x_3(\xi_k^-); \\ x_4(\xi_k) = c_4(k)\tau_k \cdot x_4(\xi_k^-), \quad \forall k = 1,2,3,\cdots. \end{cases}$$

其中 $\mu_i, M_i > 0$ 对所有 $i=1,2,3,4$;$\xi_0 = t_0$ 且 $\xi_k = \xi_{k-1} + \tau_k, k=1,2,\cdots$;$c_j(k)$ 为 $k$ 的函数. 设 $a_1 + a_3 \leqslant 0$ 和 $a_2 + a_4 \leqslant 0$. 如果存在 $N \in \mathcal{N}$ 和 $\rho \in [0,1)$ 使得 $c^2(j)E(\tau_j{}^2) \leqslant \rho$ 对所有 $j \geqslant N$,其中 $c(j) = \max\{|c_i(j)|: i=1,2,3,4\}$,则系统(14)的零解为均方指数稳定.

**证** 取 $V(t,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$,则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t} &= [-\mu_1 + M_1 \mathrm{e}^{-t}]x_1^2(t) + [-\mu_2 + M_2 \mathrm{e}^{-t}]x_2^2(t) \\ &\quad + [-\mu_3 + M_3 \mathrm{e}^{-t}]x_3^2(t) + [-\mu_4 + M_4 \mathrm{e}^{-t}]x_4^2(t) \\ &\quad + 2(a_1 + a_3)x_1^2(t)x_3^2(t) + 2(a_2 + a_4)x_2^2(t)x_4^2(t) \\ &\leqslant (-\mu + M\mathrm{e}^{-t})V(t,x(t)) \\ &= [-\mu + \lambda(t)]V(t,x(t)) \quad \text{a. e. 当 } \xi_{k-1} < t < \xi_k, \quad k = 1,2,\cdots. \end{aligned}$$

其中 $\mu = \min\{\mu_i: i=1,2,3,4\}$,$M = \max\{M_i: i=1,2,3,4\}$ 和 $\lambda(t) = M\mathrm{e}^{-t}$. 进一步

$$\begin{aligned} V(\xi_k, x(\xi_k)) &= x_1^2(\xi_k) + x_2^2(\xi_k) + x_3^2(\xi_k) + x_4^2(\xi_k) \\ &= \tau_k{}^2[c_1^2(k)x_1^2(\xi_k^-) + c_2^2(k)x_2^2(\xi_k^-) + c_3^2(k)x_3^2(\xi_k^-) + c_4^2(k)x_4^2(\xi_k^-)] \\ &\leqslant c^2(k)\tau_k^2 \cdot V(\xi_k, x(\xi_k^-)) \\ &= w_j(\tau_k)V(\xi_k, x(\xi_k^-)) \quad \text{a. e.}, \end{aligned}$$

其中 $w_j(\tau_k) = c^2(k)\tau_k{}^2, k=1,2,\cdots$.

注意到

$$\int_0^{+\infty} \lambda(s)\mathrm{d}s = M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = M < +\infty$$

和

$$E[w_j(\tau_j)] = c^2(j)E(\tau_j{}^2) \leqslant \rho < 1$$

对所有 $j \geqslant N$ 成立,由定理 1 和注 3(b)知,系统(14)的零解为均方指数稳定的. 证毕. ▌

## 参 考 文 献


[1] Bainov D D, Simeonov P S. Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter. Bull Inst Math Acad Sci, 1987, **15**: 251-269

[2] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differntial Equations. Singapore: World Scientific, 1989

[3] Bainov D D, Simeonov P S. Systems with Impulsive Effect, in:Stability Theory and Applications. Chichester, UK: Ellis Horwood,1989

[4] Manuel Pinto. Asymptotic behavior of differential systems with impulse effect. Nonlinear Analysis, 1997, **30**: 1133-1140

[5] Akhmetov M U, Zafer A. Successive approximation method for quasilinear impulsive differential equations with control. Applied Mathematics Letters, 2000, **13**: 99-105

[6] Valéry Covachev, Haydar Akca, Fuat Yenicerioglu. Difference approximations for impulsive differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2001, **121**: 383-390

[7] Cooke C H, Kroll J. The existence of periodic solutions to certain impulsive differential equations. Computers and

Mathematics with Applications, 2002, **44**: 667－676

[8] Akhmetov M U, Zafer A. Stability of the zero solution of impulsive differential equations by the Liapunov second method. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, 2000, **248**: 69－82

[9] Kou Chunhai, Zhang Shunian, Wu Shujin. Stability analysis in terms of two measures for impulsive differential equations. J London Math Soc, 2002, **66**: 142－152

[10] Soliman A A. On stability of perturbed impulsive differential systems. Applied Mathematics and Computation, 2002,**133**: 105－117

[11] Soliman A A. Stability criteria of impulsive differential systems. Applied Mathematics and Computation, 2003, **134**: 445－457

[12] Wu Shujin, Meng Xianzhang. Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2004, **20**(1): 147－154

# Exponential Stability of Differential Systems with Impulsive Effect on Random Moments

Wu Shujin

(*Department of Statistics*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062)

**Abstract**: The model of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments is brought forward by author in this paper. Then, some sufficient conditions for $p$-moment exponential stability and almost surely exponential stability of the trivial solution to the systems are presented, in which $\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}$ isn't required to be negative definite. Finally, an example is illustrated to show the application of the obtained results.

**Key words**: Impulsive differential systems; $p$-moment exponential stability; Almost sure exponential stability; Liapunov function.

**MR(2000) Subject Classification**: 34A37; 34D20