Mathematica Acta Scientia 数学物理学报

2009,**29A**(4):873–881

http://actams.wipm.ac.cn

无界区域上具线性阻尼的二维 Navier-Stokes 方程的拉回吸引子 *

[1] 王小虎　[2] 李树勇

([1] 四川大学数学学院　成都 610064; [2] 四川师范大学数学与软件科学学院　成都 610066)

摘要：该文首先介绍拉回渐近紧非自治动力系统的概念，给出非自治动力系统拉回吸引子存在定理. 最后证明了无界区域上具线性阻尼的二维 Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性，并给出了其 Fractal 维数估计.

关键词：渐近紧；过程；非自治；线性阻尼；拉回吸引子.

MR(2000) 主题分类：35B41; 35Q35　**中图分类号**：O175．26　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)04-873-09

1　引言

作为流体力学中最基本的方程， Navier-Stokes 方程一直倍受关注 [1−4]. 尤其是其吸引子的存在性研究为学者们所关注. Ladyzhenskaya[5], Foias 和 Temam [6] 首先得到二维自治 Navier-Stokes 方程的全局吸引子的存在性. 之后， Abergel [7] 和 Babin [8] 研究了无界区域的情形. 然而，由于无界区域上相应的解半群是非紧的，人们通常假设外力项和初值属于某个加权 Sobolev 空间. 但对 Poincaré 不等式成立的无界区域情形，Rosa [9] 利用 Ball [10] 提出的能量方程技巧引入渐近紧的概念，从而得到无界区域上全局吸引子的存在性及其维数估计. 能量方程技巧被 Ghidaglia[11−12] 和 Wang [13] 分别应用到弱阻尼受迫 KdV 和 Schrödinger 方程.

然而，非自治动力系统的研究相对较少. 其中一个重要原因就是非自治的无穷维动力系统很少具有不变性质. Chepyzhov 、 Vishik [14] 针对非自治的无穷维动力系统提出了所谓过程族的一致吸引子. 然而，其劣势在于：不像自治系统的全局吸引子，一致吸引子不具有不变性. 与此同时，拉回吸引子的理论在非自治动力系统、随机动力系统中得到充分的发展 [15−18], 并在研究非自治动力系统中体现出了优势. 拉回吸引子是一与时间有关的紧集族，它具有吸引性和不变性. 在对无界相空间中偏微分方程解的渐近行为的研究过程中， Ball 所提出的思想被推广到非自治的情形，得到了所谓的一致渐近紧 [19−21]. 最近， Caraballo 等 [22] 考虑不具一致性质的情形，证明了在该情形下拉回吸引子的存在性并且在一定条件下其具有有限 Fractal 维数 [23].

收稿日期：2008-01-08; 修订日期：2009-02-23

E-mail: xiaohuwang111@163.com; shuyongli@263.net

* 基金项目：国家自然科学基金 (10371083) 资助

本文考虑无界区域上具线性阻尼的二维 Navier-Stokes 方程，利用能量方程技巧我们证明了其拉回吸引子的存在性并给出其 Fractal 维数估计．而所讨论系统的外力项既非有界又非几乎周期的，因此一致吸引子的理论是无效的．

2 拉回吸引子和渐近紧非自治动力系统

首先我们给出一些基本定义．

定义 1 设 X 为度量空间，集族 $\{U(t,\tau):-\infty<\tau\le t<+\infty\}$, $U(t,\tau):X\to X$ 成为 X 上的过程，如果

(i) $U(\tau,\tau)x=x, \forall\, x\in X$;

(ii) $U(t,\tau)=U(t,s)U(s,\tau), \forall\, \tau\le s\le t$.

令 $\mathcal{D}$ 是 $\widehat{D}=\{D(t):t\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{P}(X)$ 构成的一非空参数集类，其中 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的所有非空子集族．

定义 2 过程 $U(\cdot,\cdot)$ 称为拉回 $\mathcal{D}$ - 渐近紧, 如果对任意 $t\in\mathbf{R}, \widehat{D}\in\mathcal{D}$, 任意序列 $\tau_n\to-\infty$, $x_n\in D(\tau_n)$, 序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}$ 有收敛的子序列．

定义 3 集族 $\widehat{B}=\{B(t):t\in\mathbf{R}\}\in\mathcal{D}$ 称为关于过程 $U(\cdot,\cdot)$ 拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引，如果对 $t\in\mathbf{R}$ 和 $\widehat{D}\in\mathcal{D}$, 存在 $\tau_0(t,\widehat{D})\le t$ 使得

$$U(t,\tau)D(\tau)\subset B(t),\quad \forall\,\tau\le\tau_0(t,\widehat{D}).$$

$\mathrm{dist}(C_1,C_2)$ 表示 C_1 和 C_2 的 Hausdorff 半距，定义为

$$\mathrm{dist}(C_1,C_2)=\sup_{x\in C_1}\inf_{y\in C_2}d(x,y),$$

其中 $C_1,C_2\subset X$.

定义 4 集族 $\widehat{A}=\{A(t):t\in\mathbf{R}\}\in\mathcal{P}(X)$ 称为关于过程 $U(\cdot,\cdot)$ 的拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引子，如果满足

(1) $A(t)$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 是紧的;

(2) $\widehat{A}$ 是拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引，即对所有 $\widehat{D}\in\mathcal{D}, t\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,\tau)D(\tau),A(t))=0$;

(3) $\widehat{A}$ 是不变的，即对于任意 $-\infty<\tau\le t<+\infty$, 有 $U(t,\tau)A(\tau)=A(t)$.

对任意 $\widehat{D}\in\mathcal{D}$, 记

$$\Lambda(\widehat{D},t)=\bigcap_{s\le t}\Big(\overline{\bigcup_{\tau\le s}U(t,\tau)D(\tau)}\Big).$$

现在我们给出以下关于全局拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引子存在性的结果 [16].

定理 1 假设过程 $U(t,\tau)$ 为拉回 $\mathcal{D}$ - 渐近紧的，并且存在关于过程 $U(t,\tau)$ 是拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引的集族 $\widehat{B}\in\mathcal{D}$. 则集族 $\widehat{A}=\{A(t):t\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{P}(X)$ 是一关于过程 $U(t,\tau)$ 的全局拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引子，其中 $A(t)=\Lambda(\widehat{B},t), t\in\mathbf{R}$, 另外满足 $A(t)=\overline{\bigcup\limits_{\widehat{D}\in\mathcal{D}}\Lambda(\widehat{D},t)}, t\in\mathbf{R}$. 进一步地， $\widehat{A}$ 是最小的，如果 $\widehat{C}=\{C(t):t\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{P}(X)$ 是一闭集族并且 $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,\tau)B(\tau),C(t))=0$, 则有 $A(t)\subset C(t)$.

注 在定理 1 中，如果我们假设对任意的 $t\in\mathbf{R}$, $B(t)$ 是闭的，并且集族 $\mathcal{D}$ 是包含 - 闭的 (即对任意 $t\in\mathbf{R}$, 如果 $\mathcal{D}'(t)\in\mathcal{P},\mathcal{D}'(t)\subset\mathcal{D}(t)D$, 则有 $\mathcal{D}'\in\mathcal{D}$), 那么拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引子 $\widehat{A}$ 属于 $\mathcal{D}$, 因此它是唯一属于 $\mathcal{D}$ 的拉回 $\mathcal{D}$ - 吸引子．该情形在应用中是经常出现的，特别地，它将在第 3 节中出现．

3　无界区域上非自治二维 Navier-Stokes 方程

我们考虑如下 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 上的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+\alpha u+\displaystyle\sum_{i=1}^{2}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(t)-\nabla p, & (t,x)\in(\tau,+\infty)\times\Omega,\\ \mathrm{div}u=0, & (t,x)\in(\tau,+\infty)\times\Omega,\\ u=0, & (t,x)\in(\tau,+\infty)\times\partial\Omega,\\ u(\tau,x)=u_0(x) & x\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\nu>0$ 为流体的粘性系数， $\alpha>0$ 为线性阻尼常数， $-\alpha u$ 为和速度向量场平行的阻尼项，可理解为流体内部耗散的零阶近似 [24−25]. $u=u(t,x)\in\mathbf{R}^2$ 和 $p=p(t,x)\in\mathbf{R}$ 分别表示流体的速度向量和压力项.

区域 Ω 可以是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意有界或无界集，且其边界 $\partial\Omega$ 不要求任何正则性假设，仅仅需要假设在 Ω 上 Poincaré 不等式成立．即存在 $\lambda_1>0$ 使得

$$\lambda_1\int_\Omega\phi^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x,\quad 对任意\ \phi\in H_0^1(\Omega).\tag{2}$$

首先考虑抽象空间 $\mathcal{V}=\{u\in(C_0^\infty(\Omega))^2:\mathrm{div}\,u=0\}$.

$H=\mathcal{V}$ 在 $(L^2(\Omega))^2$ 中的闭包具有范数 $|\cdot|$ 和内积 $(\cdot,\cdot)$, 其中

$$(u,v)=\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega u_j(x)v_j(x)\mathrm{d}x,\quad\forall\,u,v\in(L^2(\Omega))^2.$$

$V=\mathcal{V}$ 在 $(H_0^1(\Omega))^2$ 中的闭包具有范数 $\|\cdot\|$ 和内积 $((\cdot,\cdot))$, 其中

$$((u,v))=\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_j}{\partial xi}\frac{\partial v_j}{\partial xi}\mathrm{d}x,\quad\forall\,u,v\in(H_0^1(\Omega))^2.$$

则 $V\subset H\equiv H'\subset V'$, 其中内射是稠密、连续的.

最后，我们用 $\|\cdot\|_*$ 表示 V' 中的范数，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 和 V' 的对偶积. 记 $a(u,v)=((u,v))$, $A:V\to V'$ 满足 $\langle Au,v\rangle=((u,v))$, $\forall\,u,v\in V$.

定义 $V\times V\times V$ 上三线性算子 $b(u,v,w)=\sum\limits_{i,j=1}^{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}w_j\mathrm{d}x$, $\forall\,u,v,w\in V$, 且 $B(u)=B(u,u)$ 是双线性算子，对任意 $u,v,w\in V$, $B:V\times V\to V'$ 有 $\langle B(u,v),w\rangle=b(u,v,w)$.

假设 $u_0\in H, f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},V')$. 对每个 $\tau\in\mathbf{R}$, 考虑如下问题

$$\begin{cases}u\in L^2(\tau,T;V)\cap L^\infty(\tau,T;H), & \forall\,T>\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v)+\nu((u(t),v))+\alpha(u,v)+\langle B(u(t)),v\rangle=\langle f(t),v\rangle, & \forall\,v\in V,\\ u(\tau,x)=u_0(x).\end{cases}\tag{3}$$

由文献 [3, 24–25] 易知， (3) 式具有唯一解 $u(\cdot;\tau,u_0)$, 并且它属于 $C^0([\tau,+\infty);H)$.

记 $u(t;\tau,u_0)$ 为 (3) 式的解．定义映射 $U(t,\tau):H\to H$,

$$U(t,\tau)u_0=u(t;\tau,u_0),\quad\tau\le t,u_0\in H.\tag{4}$$

由 (3) 式解的唯一性知，对任意 $\tau \le s \le t$, $U(t,\tau)u_0 = U(t,s)U(s,\tau)u_0$, 且易得到

引理 1 对所有 $\tau \le t$, 由 (4) 式所定义的集族 $\{U(t,\tau):\tau \le t\}$ 是 H 上的过程. 且映射 $U(t,\tau): H \to H$ 在 H 的有界子集上是全局 Lipschitz 的，特别地， $U(t,\tau)$ 是连续的.

令 $\sigma = \nu\lambda_1 + 2\alpha$, $R_\sigma = \{r: \mathbf{R} \to (0,+\infty) | \lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{\sigma t} r^2(t) = 0\}$. $\mathcal{D}_\sigma$ 为具有下列性质的集族所组成的集合： $\widehat{D} = \{D(t): t\in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{P}(H)$ 使得对某些 $r_{\widehat{D}}(t) \in R_\sigma$ 有 $D(t) \subset \overline{B}(0, r_{\widehat{D}}(t))$, 其中 $\overline{B}(0, r_{\widehat{D}}(t))$ 表示 H 中以 0 为球心 $r_{\widehat{D}}(t)$ 为半径的闭球.

引理 2 假设 $f \in L^2_{\rm loc}(\mathbf{R}, V')$ 满足

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\sigma s} \|f(s)\|_*^2 \mathrm{d}s < +\infty, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

则存在关于过程 U 的全局拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 吸收集族.

证 固定 $\tau \in \mathbf{R}$ 和 $u_0 \in H$. 对任意 $t \ge \tau$, 记 $u(t) = u(t;\tau,u_0) = U(t,\tau)u_0$. 由正交性 [3] 知 $b(u,v,v) = 0$, $\forall\, u \in V, v \in (H^1(\Omega))^2$, 则方程 (3) 做先验估计得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|u(t)|^2) + \mathrm{e}^{\sigma t}(2\nu\|u(t)\|^2 + 2\alpha|u(t)|^2) = \sigma \mathrm{e}^{\sigma t}|u(t)|^2 + 2\mathrm{e}^{\sigma t}\langle f(t), u(t)\rangle. \tag{6}$$

因此，由 (2) 式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|u(t)|^2) \le \frac{\mathrm{e}^{\sigma t}}{\nu}\|f(t)\|_*^2. \tag{7}$$

上式在 τ 到 $t(t \ge \tau)$ 上积分

$$\mathrm{e}^{\sigma t}|u(t)|^2 \le \mathrm{e}^{\sigma\tau}|u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_{\tau}^{t} \mathrm{e}^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d}s. \tag{8}$$

对于给定的 $\widehat{D} \in \mathcal{D}_\sigma$. 由 (8) 式，对任意的 $u_0 \in D(\tau)$, $t \ge \tau$ 有

$$|U(t,\tau)u_0|^2 \le \mathrm{e}^{-\sigma(t-r)} r^2_{\widehat{D}(\tau)} + \frac{\mathrm{e}^{-\sigma t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d}s. \tag{9}$$

对每个 $t \in \mathbf{R}$, 令 $R_\sigma(t) = (2\frac{\mathrm{e}^{-\sigma t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d}s)^{1/2}$, $\widehat{B}_\sigma$ 为所有 H 中的闭球 $B_\sigma(t) = \{v \in H: |v| \le R_\sigma(t)\}$ 所组成的集族. 则 $\widehat{B}_\sigma \in \mathcal{D}_\sigma$, 故 $\widehat{B}_\sigma$ 是关于过程 U 的拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 吸收族. ▌

在证明过程 U 的渐近紧性时，我们需要建立 U 的某些连续性. 由于其证明方法与文献 [20] 中的引理 8.1 类似，这里从略.

引理 3 假设 $\{u_{0_n}\}$ 为 H 中的序列，它弱收敛于 $u_0 \in H$. 则

$$U(t,\tau)u_{0_n} \rightharpoonup U(t,\tau)u_0, \text{ 在}\, H \,\text{中弱收敛}, \quad \forall\, t \ge \tau, \tag{10}$$

并且

$$U(\cdot,\tau)u_{0_n} \rightharpoonup U(\cdot,\tau)u_0, \text{ 在}\, L^2(\tau,T;V) \,\text{中弱收敛}, \quad \forall\, T \ge \tau. \tag{11}$$

现在我们证明过程 $U(t,\tau)$ 的渐近紧性.

引理 4 过程 $U(t,\tau)$ 是拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 渐近紧的，也就是说，如果固定 $\widehat{D} \in \mathcal{D}_\sigma$, 序列 $\tau_n \to -\infty$, $u_{0_n} \in D(\tau)$ 和 $t \in \mathbf{R}$, 序列 $U(t,\tau_n)u_{0_n}$ 有在 H 中连续的子序列.

证 由于 $\widehat{B}_\sigma$ 是拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 吸收的，因此对每个整数 $k \ge 0$, 存在 $\tau_{\widehat{D}}(t,k) \le t$ 使得

$$U(t-k,\tau-k)D(\tau-k) \subset B_\sigma(t-k), \quad \forall\, \tau \le \tau_{\widehat{D}}(t,k). \tag{12}$$

则对于 $\tau \le \tau_{\widehat{D}}(k)+k$, 由 (12) 式知

$$U(t-k,\tau)D(\tau)\subset B_\sigma(t-k). \tag{13}$$

利用 (13) 式，由对角线程序，存在子序列 $\{(\tau_{n'},u_{0_{n'}})\}\subset\{(\tau_n,u_{0_n})\}$ 和 $\{w_k:k\ge 0\}\subset H$, 使得对任意的 $k\ge 0$ 和 $w_k\in B_\sigma(t-k)$, 有

$$U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\rightharpoonup w_k,\ \text{在}\,H\,\text{中弱收敛}. \tag{14}$$

由引理 3 可得

$$\begin{aligned} w_0 &= \lim_{\substack{n'\to\infty\\ H_w}} U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}} = \lim_{\substack{n'\to\infty\\ H_w}} U(t,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\\ &= U(t,t-k)\lim_{\substack{n'\to\infty\\ H_w}} U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}, \end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{\substack{n'\to\infty\\ H_w}}$ 表示在 H 中取值的弱极限．因此

$$w_0=U(t,t-k)w_k,\quad \forall\, k\ge 0. \tag{15}$$

由 (14) 式知

$$\liminf_{n'\to\infty}|U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|\ge |w_0|. \tag{16}$$

以下我们将证明

$$\limsup_{n'\to\infty}|U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|\le |w_0|. \tag{17}$$

为证明 (17) 式，首先我们定义 $[\cdot,\cdot]:V\times V\to\mathbf{R}$

$$[u,v]=\nu((u,v))-\frac{\nu\lambda_1}{2}(u,v),\quad [u]^2=[u,u],\forall\, u,v\in V. \tag{18}$$

由文献 [9] 知范数 $[\cdot]$ 与 V 中范数 $\|\cdot\|$ 是等价的．则由 (6) 式，利用常数变易公式可得

$$|U(t,\tau)u_0|^2=|u_0|^2\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}+2\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}(\langle f(s),U(s,\tau)u_0\rangle-[U(s,\tau)u_0]^2)\mathrm{d}s. \tag{19}$$

因此，对所有 $k\ge 0$ 和 $\tau_{n'}\le t-k$ 有

$$\begin{aligned} |U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|^2 &= |U(t,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|^2=|U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|^2\mathrm{e}^{-\sigma k}\\ &\quad +2\int_{t-k}^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\langle f(s),U(s,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\rangle\mathrm{d}s\\ &\quad -2\int_{t-k}^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}[U(s,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}]^2\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{20}$$

而由 (12) 式，我们有 $U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\in B_\sigma(t-k)$, $\forall\,\tau_{n'}\le\tau_{\widehat{D}}(t,k)+k,k\ge 0$, 则

$$\limsup_{n'\to\infty}(\mathrm{e}^{-\sigma k}|U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|^2)\le \mathrm{e}^{-\sigma k}R_\sigma^2(t-k),\quad \forall\, k\ge 0. \tag{21}$$

另一方面，由于 (14) 式成立，利用引理 3 有

$$U(\cdot,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\rightharpoonup U(\cdot,t-k)w_k,\quad \text{在}\,L^2(t-k,t;V)\,\text{中弱收敛}. \tag{22}$$

特别地，注意到 $\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}f(s)\in L^2(t-k,t;V')$,

$$\begin{aligned}&\lim_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\langle f(s),U(s,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}\rangle\mathrm{d}s\\ =&\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\langle f(s),U(s,t-k)w_k\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{23}$$

由于 $(\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}[u(s)]^2\mathrm{d}s)^{1/2}$ 是与 $L^2(t-k,t;V)$ 的通常范数等价的，由 (22) 式知

$$\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}[U(s,t-k)w_k]^2\mathrm{d}s\le\liminf_{n'\to\infty}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}[U(s,t-k)U(t-k,\tau_{n'})u_{0_{n'}}]^2\mathrm{d}s.\tag{24}$$

故，由 (20), (21), (23) 和 (24) 式有

$$\begin{aligned}&\limsup_{n'\to\infty}|U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|\\ \le\ &\mathrm{e}^{-\sigma k}R_\sigma^2(t-k)+2\int_{\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}(\langle f(s),U(s,t-k)w_k\rangle-[U(s,t-k)w_k]^2)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{25}$$

由 (15) 和 (19) 式得

$$\begin{aligned}|w_0|^2&=|U(t,t-k)w_k|^2\\ &=|w_k|^2\mathrm{e}^{-\sigma k}+2\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}(\langle f(s),U(s,t-k)w_k\rangle-[U(s,t-k)w_k]^2)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{26}$$

利用 (25) 和 (26) 式有

$$\liminf_{n'\to\infty}|U(t,\tau_{n'})u_{0_{n'}}|\le\mathrm{e}^{-\sigma k}R_\sigma^2(t-k)+|w_0|^2-\mathrm{e}^{-\sigma k}|w_k|^2\le\mathrm{e}^{-\sigma k}R_\sigma^2(t-k)+|w_0|^2,\tag{27}$$

并注意到当 $k\to+\infty$ 时，有

$$\mathrm{e}^{-\sigma k}R_\sigma^2(t-k)=2\frac{\mathrm{e}^{-\sigma t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t-k}\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s\to 0,\tag{28}$$

因此 (17) 式成立. 引理 4 证毕. ▍

在引理 2 中我们证明了全局拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 吸引集族的存在性，在引理 4 中证明了 $U(t,\tau)$ 是拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 渐近紧的，因此我们有下面的结果.

定理 2 假设 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},V')$ 满足 (5) 式. 那么，存在唯一的全局拉回 $\mathcal{D}_\sigma$ - 吸引子 $\mathcal{A}_\sigma(t)$, 且其属于 $\mathcal{D}_\sigma$, 其中 $\mathcal{A}_\sigma(t)=\Lambda(\widehat{B}_\sigma,t)$.

4 $\mathcal{A}_\sigma(t)$ 的 Fractal 维数估计

固定 T^*, 由文献 [23] 中定理 3.6 知

$$\bigcup_{\tau\le T^*}\mathcal{A}_\sigma(t)\quad\text{在 } H \text{ 中是相对紧的.}\tag{29}$$

令 $F(u,t)=-\nu Au-\alpha u-B(u)+f(t)$, 则对所有 $t\in\mathbf{R}$, 映射 $F(\cdot,t)$ 在 V 中是 Gateaux 可微的并且 $F'(u,t)v=-\nu Av-\alpha v-B(u,v)-B(v,u),\quad u,v\in V$, 映射 $F'(u,t):(u,t)\in V\times\mathbf{R}\to F'(u,t)\in\mathcal{L}(V;V')$ 是连续的.

因此，可以得到 (3) 式的线性化方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F'(U(t,\tau)u_0,t)v, \\ v(\tau,x) = v_0(x). \end{cases} \tag{30}$$

显然，对任意 $\tau\in\mathbf{R}, u_0, v_0\in H$, (30) 式存在唯一解使得对任意 $\tau\le T$, 有

$$v(t) = v(t;\tau,u_0,v_0)\in L^2(\tau,T;V)\cap C([\tau,t];H).$$

定理 3 假设 $f(t)$ 满足定理 2 中的条件且对某些 $T^*\in\mathbf{R}, f\in L^\infty(-\infty,T^*;V')$. 则由定理 2 所确定的拉回吸引子 $\mathcal{A}_\sigma(t)$ 具有有限的 Fractal 维数，并且

$$d_F(\mathcal{A}_\sigma(t))\le \max\Big(1,\frac{2C_1}{\sigma\nu^3}\|f(s)\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}\Big),\quad \forall\,\tau\in\mathbf{R}. \tag{31}$$

证 固定 $u_0, v_0^1,\cdots,v_0^j\in H$ 和 $\tau\le T$. 设 $e_1(s),\cdots,e_j(s), s\ge\tau$ 为由 $v(s;\tau,u_0,v_0^1),\cdots,v(s;\tau,u_0,v_0^j)$ 所张成子空间的正交基，其中 $v(s;\tau,u_0,v_0^i)(i=1,\cdots,j)$ 是 (30) 式关于初值 $v(\tau)=v_0^i$ 的解.

记

$$\tilde{q}_j = \limsup_{T\to+\infty}\sup_{\tau\le T^*}\sup_{u_0\in A_\sigma(\tau-t)}\Big(\frac{1}{T}\int_{\tau-T}^{\tau}\mathrm{Tr}_j(F^{'}(U(s,\tau-T)u_0,s))\Big)\mathrm{d}s, \tag{32}$$

其中

$$\mathrm{Tr}_j(F'(U(s,\tau-T)u_0,s)) = \sup_{\substack{v_0^i\in H,\\ |v_0^i|\le 1, i\le j}}\Big(\sum_{i=1}^{j}\langle F'(U(s,\tau-T)u_0,s)e_i,e_i\rangle\Big).$$

由于 $v(s;\tau,u_0,v_0^i)\in V\ (s\ge\tau)$, 因此我们可以假设 $e_i(s)\in V\ (s\ge\tau)$. 故

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{j}\langle F'(U(s,\tau-T)u_0,s)e_i,e_i\rangle\\ &= -\alpha\sum_{i=1}^{j}|e_i(s)|^2+\sum_{i=1}^{j}(-\nu\|e_i(s)\|^2-b(e_i(s),U(s,\tau-T)u_0,e_i(s)))\\ &\le -\nu\sum_{i=1}^{j}\|e_i(s)\|^2-\alpha j+\|U(s,\tau-T)u_0\|\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{j}|e_i(s)|^2\Big)^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

由于 $e_1(s),\cdots,e_j(s), s\ge\tau$ 为 H 中的正交基，因此其属于 $(L^2(\Omega))^2$, 并属于 $V\subset(H_0^1(\Omega))^2$, 故由 Lieb-Thirring 不等式 [4] $\int_\Omega(\sum\limits_{i=1}^{j}|e_i(s)|^2)^2\mathrm{d}s\le C_1\sum\limits_{i=1}^{j}\|e_j\|^2$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j}\langle F'(U(s,\tau-T)u_0,s)e_i,e_i\rangle &\le -\nu\sum_{i=1}^{j}\|e_i(s)\|^2-\alpha j+\|U(s,\tau-T)u_0\|\Big(C_1\sum_{i=1}^{j}\|e_j\|^2\Big)^{1/2}\\ &\le -\alpha j-\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{j}\|e_i(s)\|^2+\frac{C_1}{2\nu}\|U(s,\tau-T)u_0\|^2,\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Tr}_j(F'(U(s,\tau-T)u_0,s))\le -\alpha j-\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{j}\|e_i(s)\|^2+\frac{C_1}{2\nu}\|U(s,\tau-T)u_0\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\le -\alpha j - \frac{\nu\lambda_1}{2}\sum_{i=1}^{j}|e_i(s)|^2 + \frac{C_1}{2\nu}\|U(s,\tau-T)u_0\|^2 \\
&= -\frac{\sigma}{2}j + \frac{C_1}{2\nu}\|U(s,\tau-T)u_0\|^2. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

另一方面，对所有 $t\ge\tau$ 有

$$
|U(t,\tau)u_0|^2 + 2\nu\int_\tau^t \|U(s,\tau)u_0\|^2\mathrm{d}s + 2\alpha\int_\tau^t |U(s,\tau)u_0|^2\mathrm{d}s = |u_0|^2 + 2\int_\tau^t \langle f(s),U(s,\tau)u_0\rangle\mathrm{d}s.
$$

故

$$
\int_\tau^t \|U(s,\tau)u_0\|^2\mathrm{d}s \le \frac{|u_0|^2}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\int_\tau^t \|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s,\ t\ge\tau. \qquad (34)
$$

定义 $M=\|f(s)\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}$. 由 (33) 和 (34) 式易知

$$
\tilde{q}_j \le -\frac{\sigma}{2}j + \frac{C_1}{2\nu^3}\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau-T}^{\tau}\|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s \le -\frac{\sigma}{2}j + \frac{C_1M}{2\nu^3}.
$$

首先，如果 $C_1M<\sigma\nu^3$, 则令 $q_j=-\frac{\sigma}{2}(j-1), j=1,2,\cdots,n_0=1$. 那么 [23, 定理 2.2]

$$
d_F(\mathcal{A}_\sigma(t))\le 1,\quad \forall\,\tau\le T^*.
$$

其次，如果 $C_1M\ge\sigma\nu^3$, 则可令

$$
q_j=-\frac{\sigma}{2}j+\frac{C_1M}{2\nu^3},\quad j=1,2,\cdots
$$

和 $n_0=1+[\frac{C_1M}{\sigma\nu^3}-1]_*$, 其中 $[\delta]_*$ 表示实数 δ 的整数部分. 那么

$$
d_F(\mathcal{A}_\sigma(t))\le\frac{2C_1M}{\sigma\nu^3},\quad \forall\,\tau\le T^*.
$$

由于 $U(t,\tau)$ 在 $\mathcal{A}_\sigma(t)$ 中是 Lipschitz 的, 由文献 [2] 的命题 13.9 知: 对任意的 $t\ge\tau$, $d_F(\mathcal{A}_\sigma(t))$ 有界且其界相同. 因此定理 3 成立. ∎

参 考 文 献

[1] Constantin P, Foias C. Navier Stokes Equations. Chicago: The University of Chicago Press, 1988

[2] Robinson J C. Infinite Dimensional Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

[3] Temam R. Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North Holland, 1979

[4] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 2000

[5] Ladyzhenskaya O. On the dynamical system generated by the Navier-Stokes equations. Z Nauch Semin LOMI, 1972, **27**: 91–114

[6] Foias C, Temam R. Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier- Stokes equations. J Math Pures Appl, 1979, **58**: 334–368

[7] Abergel F. Attractors for a Navier-Stokes flow in an unbounded domain. Math Modeling Numer Anal, 1998, **23**: 359–370

[8] Babin A V. The attractor of a Navier-Stokes system in an unbounded channel-like domain. J Dynam Differential Equations, 1992, **4**: 555–584

[9] Rosa R. The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains. Nonlinear Anal TMA, 1998, **32**: 71–85

[10] Ball J M. Global attractors for damped semi-linear wave equations. Discrete Contin Dynam Systems, 2004, **10** (1/2): 31–52

[11] Ghidaglia J M. Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time. J Differential Equations, 1988, **74**: 369–390

[12] Ghidaglia J M. A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equations. J Differential Equations, 1994, **110** : 356–359

[13] Wang B X. An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its applications. Physica D, 1995, **88**: 167–175

[14] Chepyzhov V V , Vishik M I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension. J Math Pures Appl, 1994, **73**: 279–333

[15] Caraballo T, Langa J A, Robinson J C. Stability and random attractor for a reaction-diffusion equation with multiplicative noise. Discrete contin Dyn Syst, 2000, **6** (4): 875–892

[16] Caraballo T, Langa J A. On the upper semi-continuity of cocycle attractors for non-autonomous and random dynamical systems. Dynam Contin Discrete Impuls Systems A, 2003, **10**: 491–514

[17] Kloeden P E. A Lyapunov function for pullback attractors of non-autonomous differential equations. Electron J Differ Equ Conf, 2000, **5**: 91–102

[18] Kloeden P E, Schmalfuss B. Asymptotic behaviour of non-autonomous difference inclusions. Systems and Control Lett, 1998, **3**: 275–280

[19] Hou Y, Li K. The uniform attractor for the 2D non-autonomous Navier-Stokes flow in some unbounded domains. Nonlinear Anal, 2004, **58**(5/6): 609–630

[20] Lukaszewicz G, Sadowski W. Uniform attractor for 2D magneto-micropolar fluid flow in some unbounded domains. Z Angew Math Phys, 2004, **55**: 1–11

[21] Moise I, Rosa R, Wang X. Attractors for noncompact non-autonomous systems via energy equations. Discrete Cont Dynam Syst, 2004, **10** (1/2): 473–496

[22] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems. Nonlinear Anal, 2006, **64**(3): 484–498

[23] Langa J A, Lukaszewicz G, Real J. Fintie fractal dimension of pullback attractor for non-autonomous 2D Navier-Stokes equations in some unbounded domains. Nonlinear Anal, 2007, **66**: 735–749

[24] 丁夏畦，吴永辉．二维全平面上具线性阻尼 Navier-Stokes 方程组解的有限维行为．应用数学学报， 1997, **20**(4): 509–519

[25] 赵春山，李开泰．二维全空间上线性阻尼 Navier-Stokes 方程的全局吸引子及其维数估计．应用数学学报， 2000, **23**(1): 90–98

Pullback Attractors for Non-autonomous 2D Navier-Stokes Equations with Linear Dampness in Some Unbounded Domains

[1]Wang Xiaohu [2]Li Shuyong

([1]*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064;*
[2]*Department of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066*)

Abstract: In this paper, the concept of pullback asymptotically compact non-autonomous dynamical system is firstly introduced. Then, a result ensuring the existence of a pullback attractor for a non-autonomous dynamical system is given. Finally, the existence of a pullback attractor for a non-autonomous 2D Navier-Stokes equation with linear dampness in some unbounded domains is proved. Moreover, the upper bounds of Fractal dimension of the pullback attractor is estimated.

Key words: Asymptotic compactness; Process; Non-autonomous; Linear dampness; Pullback attractor.

MR(2000) Subject Classification: 35B41; 35Q35