2009,**29A**(3):810–822

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

一类带临界指标的 Neumann 问题解的唯一性 *

杜刚

(华中师范大学数学与统计学学院　湖北武汉 430079; 喀什师范学院数学系　新疆喀什 844007)

摘要：该文研究了一类带临界指标的 Neumann 问题，利用 Pohozaev 恒等式和一些好的估计，得到了此类问题解的唯一性结果.

关键词：唯一性；临界指标；单汽泡解；Pohozaev 恒等式.

MR(2000) 主题分类：35J25　**中图分类号**：O175　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)03-810-13

1　引言

本文考虑以下问题

$$\begin{cases} -d^2\triangle u + a(x)u = u^p, & \text{in } B, \\ u > 0, & \text{in } B, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = 0, & \text{on } \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

其中 B 是 R^N 中的球，$N \geq 4$, d 是一正常数，γ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向，$p = \frac{N+2}{N-2}$, $\triangle = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为拉普拉斯算子.

近年来，许多学者研究了当 $a(x) = 1$ 时，问题 (1) 解的情况．在文献 [1] 中 W.M.Ni 和 I.Takagi 给出了解的两个性质，在文献 [2] 中 Grossi 证明了当 $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ 时解的唯一性，在文献 [3] 中 Gui 和 Lin 给出了解的一些好的估计，在文献 [4] 中 Grossi 和 Chang-Shou Lin, S.Prashanth 证明了当 $p = \frac{N+2}{N-2}$ 时解的唯一性．本文讨论当 $a(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ 且 $a(x) \geq \nu > 0$, a(0)=1, $p = \frac{N+2}{N-2}$ 时，方程 (1) 解的唯一性.

当 p 是次临界指标， B 是 R^N 中的球时，方程 (1) 的唯一性证明很简单，当 $p = \frac{N+2}{N-2}$ 为临界指标时，唯一性的证明要更难，因为方程经伸缩变换后所对应的线性化方程包含一个 $N+1$ 维核空间，困难在于如何排除核特征函数的径向部分的影响．本文将利用 Pohozaev 恒等式和一些好的估计来解决上述问题.

类似于文献 [1], 可得到当 d 充分小时，泛函 $Q_d(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{d^2}\int_\Omega a(x)u^2}{(\int_\Omega |u|^{p+1})^{\frac{2}{p+1}}}$ 的极小能被 $w_d \in H^1(\Omega)$ 达到，且 w_d 满足下列性质

(i) w_d 仅有一个最大值点 $p_d \in \overline{\Omega}$ 且 $p_d \in \partial\Omega$;

(ii) 当 $d \to 0$ 时， $w_d(x) \to 0, x \neq p_0$, 其中 $p_0 = \lim\limits_{d\to 0} p_d$ 且当 $d \to 0$ 时， $w_d(p_d) \to +\infty$.

收稿日期：2007-12-11; 修订日期：2009-04-13

E-mail: dgks2004@163.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10471052) 资助

如果当 $p=\frac{N+2}{N-2}$, w_d 是 (1) 式的解，且当 d 充分小时，满足

$$Q_d(w_d)=\frac{\int_\Omega|\nabla w_d|^2+\frac{1}{d^2}\int_\Omega a(x)w_d^2}{(\int_\Omega|w_d|^{p+1})^{\frac{2}{p+1}}}=\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}(1+\circ(1)). \tag{2}$$

其中 S 是索伯列夫常数，则称 w_d 是 (1) 式的一单汽泡解．易验证单汽泡解也满足 (i), (ii). 本文所讨论的唯一性是指单汽泡解的唯一性．主要结论可归结于定理 1.1.

定理 1.1 设 $\Omega=B$ 是 R^N 中的一球， $a(x)\in C^0(\overline{\Omega})$ 且 $a(x)\geq\nu>0$, a(0)=1, $N\geq 4$, $p=\frac{N+2}{N-2}$, 则存在一 $d_0>0$, 使得对任意 $d<d_0$, 方程 (1) 的单汽泡解是唯一的.

2 预备知识

我们先考虑与 (1) 式同解的下方程

$$\begin{cases}-d^2\Delta w=\alpha_N w^p-a(x)w, & \text{in } \ \Omega,\\ w>0, & \text{in } \ \Omega,\\ \dfrac{\partial w}{\partial\gamma}=0, & \text{on } \ \partial\Omega.\end{cases} \tag{3}$$

其中 $p=\frac{N+2}{N-2},\alpha_N=N(N-2),\Omega$ 是一有界区域， $a(x)\in C^0(\overline{\Omega})$ 且 $a(x)\geq\nu>0,a(0)=1$, 设 w_d 是 (3) 式的一单汽泡解， $M_d=w_d(p_d)$, $|S^{N-1}|$ 是 R^N 空间中 $N-1$ 维球面的面积．我们有下面结论.

定理 2.1 设 $N\geq 4$,w_d 是 (3) 式的单汽泡解，则

当 $N\geq 5$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}d_nM_n^{\frac{2}{N-2}}=\frac{|S^{N-1}|(N-1)\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(\frac{N-4}{2})}{|S^{N-2}|(N-2)\Gamma(\frac{N+1}{2})\Gamma(\frac{N-3}{2})H(p_0)}.$$

当 $N=4$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}d_nM_n(\log M_n)^{-1}=\frac{|S^3|}{|S^2|}\frac{4}{\pi}\frac{1}{H(p_0)}.$$

其中 Γ 是标准的 Γ 函数， $H(p)$ 是边界 $\partial\Omega$ 的平均曲率．特别地 Ω 是球时， $H(p)=1$.

定理 2.1 的证明在文章的最后.

引理 2.2[5] (Pohozaev identity) 设 Ω 是 R^N 中一光滑有界区域， $u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 是方程 $-\Delta u=f(u)$, in Ω 的一解．则有

$$\int_\Omega(NF(u)-\frac{N-2}{2}uf(u))\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\Big[(x\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\gamma}-(x\cdot\gamma)\frac{|\nabla u|^2}{2}+(x\cdot\gamma)F(u)+\frac{N-2}{2}u\frac{\partial u}{\partial\gamma}\Big]\mathrm{d}s,$$

其中 $F(s)=\int_0^s f(t)\mathrm{d}t$.

设 $\Omega_d=\frac{\Omega-p_d}{d},u_d=w_d(\mathrm{d}x+p_d)$, w_d 是 (3) 式的解，则 u_d 是下方程的解.

$$\begin{cases}-\Delta u=\alpha_N u^p-a(\mathrm{d}x+p_d)u, & \text{in } \ \Omega_d,\\ u>0, & \text{in } \ \Omega_d,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=0, & \text{on } \ \partial\Omega_d.\end{cases} \tag{4}$$

引理 2.3[3] 设 w_d 是 (3) 式的一单气泡解, $|x|\le 1$, 则当 d 充分小时, 存在一常数 $c>0$, 有

$$u_d(x)\le cU_{\epsilon_d}(x),$$
$$|\nabla u_d(x)|\le \frac{c}{|x|}U_{\epsilon_d}(x),$$

其中 $|x|=r, 0<r<1$, $\epsilon_d=M_d^{-\frac{2}{N-2}}, U_\lambda=(\frac{\lambda}{\lambda^2+|x|^2})^{\frac{N-2}{2}}$.

设 $D^{1,2}(R^N)=\{u\in L^{\frac{2N}{N-2}}(R^N):\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x<+\infty\}$, 我们有以下结论.

引理 2.4[6] 设 $u\in D^{1,2}(R^N)$ 是 $-\Delta u=\frac{N(N+2)}{(1+|x|^2)^2}u$ 的解，则

$$u(x)=\sum_{i=1}^N\frac{a_ix_i}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}+b\frac{|x|^2-1}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}},$$

其中 $a_i,b\in R$.

在利用 Pohozaev 恒等式证明唯一性结果时，需要用到以下两个重要的引理，这两个引理的证明将放在文章的最后．引理中的符号叙述如下.

设当 d 充分小时，假设方程 (3) 至少有两个单汽泡解，所以存在一序列 $d_n\searrow 0$ 和方程 (3) 的解 w_{1,d_n},w_{2,d_n} 且记 $w_{1,n}=w_{1,d_n},w_{2,n}=w_{2,d_n}$ 由于 $w_{1,n},w_{2,n}$ 在 Ω 的边界上取最大，所以通过旋转不妨设 $w_{1,n},w_{2,n}$ 有同样的最大值点 p_0. 不失一般性，可假设 $p_0=0$ 和 $\Omega=\{x\in R^N:|x|^2<2x_N\}\subseteq R_+^N$ 因此 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}w_{i,n}(x)=w_{i,n}(0), i=1,2$.

定义 $\Omega_n=:\Omega_{d_n}=\frac{\Omega}{d_n}$, $\quad u_{i,n}=w_{i,n}(d_nx), x\in\Omega_n$, 则 $u_{i,n}$ 是方程 (4) 的解．设

$$M_n=\max\{u_{1,n}(0),u_{2,n}(0)\},\quad \overline{z}_n=\frac{u_{1,n}-u_{2,n}}{\|u_{1,n}-u_{2,n}\|_{H^1(\Omega_n)}},\quad \overline{z}_n:\Omega_n\to R.$$

再设 $\widetilde{\Omega}_n=M_n^{\frac{2}{N-2}}\Omega_n$, 有

$$z_n(x)=M_n^{-1}\overline{z}_n(\frac{x}{M_n^{\frac{2}{N-2}}}),\quad z_n:\widetilde{\Omega}_n\to R.$$

引理 2.5 当 $|x|<1$ 时，存在一常数 c, 有

$$|\overline{z}_n(x)|+|x||\nabla\overline{z}_n(x)|\le cM_n^{-1}|x|^{2-N}.$$

引理 2.6 当 $x\in\widetilde{\Omega}_n\bigcap\{y:|y|\le\delta M_n^{\frac{2}{N-2}}\}$ 时，对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta(\epsilon)>0$, 有

$$|z_n(x)-z(x)|\le\epsilon(1+|x|)^{-N+2},$$
$$|\nabla z_n(x)-\nabla z(x)|\le\epsilon(1+|y|)^{-N+1}.$$

3 主要定理的证明

定理 1.1 的证明 在这里我们采用反证法来证明唯一性结果．设 Ω 是一球，符号 $\overline{z}_n$, z_n 与第二部分预备知识中的定义相同。易验证 $\overline{z}_n$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta\overline{z}_n+a(d_nx)\overline{z}_n=\overline{c}_n(x)\overline{z}_n, & \text{in }\ \Omega_n,\\ \dfrac{\partial\overline{z}_n}{\partial\gamma}=0, & \text{on }\ \partial\Omega_n.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\overline{c}_n(x) = p\alpha_N \int_0^1 (tu_{1,n}(x) + (1-t)u_{2,n}(x))^{p-1}\mathrm{d}t$, z_n 满足

$$\begin{cases} -\Delta z_n + a(d_n M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)\cdot M_n^{-\frac{4}{N-2}} z_n = c_n(x) z_n, & \text{in } \ \widetilde{\Omega}_n, \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial \gamma} = 0, & \text{on } \ \partial\widetilde{\Omega}_n. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $c_n(x) = M_n^{-\frac{4}{N-2}}\overline{c}_n(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)$. 由 $\frac{M_n}{u_{i,n}(0)} \to 1$ 及引理 2.3 有

$$\widetilde{u}_{i,n}(x) = M_n^{-1} u_{i,n}(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x) \to U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \ \text{ in } \ C^2_{\text{loc}}(R^N_+),$$

$$c_n(x) = M_n^{-\frac{4}{N-2}}\overline{c}_n(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x) \to N(N+2)U(x)^{\frac{4}{N-2}} = \frac{N(N+2)}{(1+|x|^2)^2}, \ \text{ in } \ C^2_{\text{loc}}(R^N_+).$$

注 1 再由 Sobolev 嵌人定理 $S\|\Phi\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \le \|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)}, \Phi \in H^1(\Omega)$.

$$\widetilde{\Phi}(x) = M_n^{-1}\Phi(d_n M_n^{-\frac{2}{N-2}}x), x \in \widetilde{\Omega}_n,$$

易证

$$S\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_n} |\widetilde{\Phi}|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}} \le \int_{\widetilde{\Omega}_n} |\nabla\widetilde{\Phi}|^2 + d_n^2 M_n^{-\frac{4}{N-2}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} (\widetilde{\Phi})^2. \tag{7}$$

由 (7) 式有，当 $d_n \le 1$ 时，有

$$\begin{aligned} S\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_n} |z_n|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}} &\le \int_{\widetilde{\Omega}_n} |\nabla z_n|^2 + d_n^2 M_n^{-\frac{4}{N-2}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} z_n^2 \\ &\le \int_{\widetilde{\Omega}_n} |\nabla z_n|^2 + M_n^{-\frac{4}{N-2}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} z_n^2 \\ &= \int_{\Omega_n} |\nabla \overline{z}_n|^2 + \int_{\Omega_n} \overline{z}_n^2 = 1, \end{aligned}$$

易得

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n} |\nabla z_n|^2 \le 1.$$

由椭圆估计可得

$$z_n \to z, \quad \text{in } \ C^2_{\text{loc}}(R^N_+).$$

对 (6) 式取极限，可得 z 满足

$$\begin{cases} -\Delta z = \dfrac{N(N+2)}{(1+|x|^2)^2} z, & \text{in } \ R^N_+, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_N} = 0, & \text{on } \ x_N = 0. \end{cases} \tag{8}$$

设 $z(x', x_N) = z(x', -x_N), \quad x_N < 0$, 则 z 满足

$$-\Delta z = \frac{N(N+2)}{(1+|x|^2)^2} z, \quad \text{in } \ R^N.$$

由引理 2.4 可得

$$z(x) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i x_i}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}} + b\frac{|x|^2 - 1}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}.$$

为得到矛盾，我们可分两步来做.

第一步 由 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} w_{i,n}(x)=w_{i,n}(0), i=1,2$ 和 $\frac{\partial w_{i,n}}{\partial\gamma}=0$ 可得 $\nabla w_{i,n}(0)=0, i=1,2.$

从而 $\nabla z_n(0)=0$, 取极限可得， $\nabla z(0)=0$. 所以， $a_i=0, i=1,\cdots,N$. 即

$$z_n\to z(x)=b\frac{|x|^2-1}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}. \tag{9}$$

下证 $b\neq 0$.

假设 $b=0$, 由 (9) 式得

$$z_n\to 0,\quad \text{in}\quad C^2_{\rm loc}(R^N_+).$$

(6) 式乘以 z_n 并分部积分可得

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n}|\nabla z_n|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}a(d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)z_n^2=\int_{\widetilde{\Omega}_n}c_n(x)z_n^2.$$

由 $\int_{\widetilde{\Omega}_n}|z_n|^{\frac{2N}{N-2}}\le c$, 可得

$$z_n\rightharpoonup 0,\quad \text{in}\quad L^{\frac{2N}{N-2}}(R^N_+).$$

由 $\widetilde{u}_{i,n}\to U(x)=(1+|x|^2)^{\frac{2-N}{2}}$ 可得

$$c_n(x)\to N(N+2)U(x)^{\frac{4}{N-2}},\quad \text{in}\quad L^{\frac{N}{2}}(R^N_+).$$

所以

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n}c_n(x)z_n^2\le\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_n}c_n(x)^{\frac{N}{2}}\Big)^{\frac{2}{N}}\cdot\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_n}(z_n^2)^{\frac{N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}}\to 0,$$

即得

$$\begin{aligned}0\leftarrow\int_{\widetilde{\Omega}_n}c_n(x)z_n^2&=\int_{\widetilde{\Omega}_n}|\nabla z_n|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}a(d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)z_n^2\\&\ge\min\{\nu,1\}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_n}|\nabla z_n|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}z_n^2\Big)=\min\{\nu,1\},\end{aligned}$$

矛盾，所以 $b\neq 0$.

第二步 证明 $b\neq 0$ 不可能发生.

若 $b\neq 0$, 可得一矛盾，即 $w_{1,n}\equiv w_{2,n}$, 唯一性得证.

设 $u_{1,n},u_{2,n}$ 是 (4) 式的解，对 $u_{1,n},u_{2,n}$ 应用 Pohozaev 恒等式，可得

$$\begin{aligned}&-\int_{B_1\cap\Omega_n}a(p_n+d_nx)u_{i,n}^2\\&=\int_{B_1\cap\partial\Omega_n}\Big[-(x,\gamma)\frac{|\nabla u_{i,n}|^2}{2}+(x,\gamma)(\frac{\alpha_N}{p+1}u_{i,n}^{p+1}-\frac{a(p_n+d_nx)}{2}u_{i,n}^2)\Big]{\rm d}\sigma\\&\quad+\int_{\partial B_1\cap\Omega_n}\Big[(x\cdot\nabla u_{i,n})\frac{\partial u_{i,n}}{\partial\gamma}-\frac{|\nabla u_{i,n}|^2}{2}+\frac{\alpha_N}{p+1}u_{i,n}^{p+1}-\frac{a(p_n+d_nx)}{2}u_{i,n}^2\\&\quad+\frac{N-2}{2}u_{i,n}\frac{\partial u_{i,n}}{\partial\gamma}\Big]{\rm d}\sigma.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $B_1\cap\partial\Omega_n$ 的边界可表示一图 $\{(x',\Phi_d(x'))|x'\in R^{n-1},\Phi_d(x')=\frac{d_n}{2}|x'|^2+\circ(|d_n|^2|x'|^3)\}$, 因此

$$(x,\gamma){\rm d}\sigma=\Big[\frac{d_n}{2}|x'|^2+\circ(|d_n|^2|x'|^3)\Big]{\rm d}x'. \tag{11}$$

记 $\overline{z}_n = u_{1,n} - u_{2,n}$, 由 (10)–(11) 式可得

$$\begin{aligned}
&-\int_{B_1\cap\Omega_n} a(p_n+d_nx)\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})\mathrm{d}x\\
=&\frac{d_n}{2}\int_{|x'|\le 1}|x'|^2\Big[\alpha_N\overline{c}_n(x)\overline{z}_n-\frac{a(p_n+d_nx)}{2}\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})-\frac{\nabla\overline{z}_n}{2}(\nabla u_{1,n}+\nabla u_{2,n})\Big]\mathrm{d}x'\\
&+\int_{\partial B_1\cap\Omega_n}\Big[x(\nabla u_{1,n}-\nabla u_{2,n})\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}+x\cdot\nabla u_{2,n}(\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}-\frac{\partial u_{2,n}}{\partial\gamma})+\frac{\nabla\overline{z}_n}{2}(\nabla u_{1,n}-\nabla u_{2,n})\\
&+\alpha_N\frac{\overline{z}_nc_n}{p+1}+\frac{\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})}{2}+\frac{N-2}{2}((u_{1,n}-u_{2,n})\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}+u_{2,n}(\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}-\frac{\partial u_{2,n}}{\partial\gamma}))\Big]\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}\tag{12}$$

由引理 2.3 和引理 2.5 可得，当 $|x|=1$ 时，有

$$u_n(x)+|\nabla u_n(x)|+|\overline{z}_n(x)|+|\nabla\overline{z}_n(x)|=O(M_n^{-1}),$$

所以在 (12) 式中

$$\begin{aligned}
&|\text{ 在 }\partial B_1\cap\Omega_n\text{ 上的积分 }|\\
\le&\int_{\partial B_1\cap\Omega_n}\Big[|x||\nabla u_{1,n}-\nabla u_{2,n}|\Big|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}\Big|+|x||\nabla u_{2,n}|\Big|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}-\frac{\partial u_{2,n}}{\partial\gamma}\Big|+\Big|\frac{\nabla\overline{z}_n}{2}\Big||\nabla u_{1,n}-\nabla u_{2,n}|\\
&+\alpha_N\frac{|\overline{z}_n||c_n|}{p+1}+\frac{|\overline{z}_n||u_{1,n}+u_{2,n}|}{2}+\frac{N-2}{2}\Big(|u_{1,n}-u_{2,n}|\Big|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}\Big|+|u_{2,n}|\Big|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial\gamma}-\frac{\partial u_{2,n}}{\partial\gamma}\Big|\Big)\Big]\mathrm{d}\sigma\\
=&O(M_n^{-2}).
\end{aligned}\tag{13}$$

另外当 $N\ge 5$ 时，有

$$\begin{aligned}
&-\int_{B_1\cap\Omega_n} a(p_n+d_nx)\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})\mathrm{d}x\\
&=-\int a(p_n+d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)\overline{z}_n(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)[u_{1,n}(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)+u_{2,n}(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)]\cdot M_n^{-\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x\\
&=-\int a(p_n+d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)z_n(x)[\widetilde{u}_{1,n}(x)+\widetilde{u}_{2,n}(x)]M_n^{-\frac{4}{N-2}}\mathrm{d}x\\
&=-bM_n^{-\frac{4}{N-2}}\Big(2\int_{R_+^N}\frac{|x|^2-1}{(1+|x|^2)^{N-1}}\mathrm{d}x+o(1)\Big).
\end{aligned}\tag{14}$$

当 $N=4$ 时，有

$$-\int_{B_1\cap\Omega_n} a(p_n+d_nx)\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})\mathrm{d}x=-bM_n^{-2}(\log M_n)|S^3|(1+o(1)).\tag{15}$$

由引理 2.6 可得在 $B_1\cap\partial\Omega_n$ 上的积分为

$$\begin{aligned}
&\int_{|x'|\le 1}|x'|^2a(p_n+d_nx')\cdot\overline{z}_n(u_{1,n}+u_{2,n})\mathrm{d}x'\\
=&\int_{|x|\le M_n^{\frac{2}{N-2}}}\frac{|x|^2}{M_n^{\frac{4}{N-2}}}a(p_n+d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)\cdot\overline{z}_n\Big(\frac{x}{M_n^{\frac{2}{N-2}}}\Big)\\
&\times\Big(u_{1,n}\Big(\frac{x}{M_n^{\frac{2}{N-2}}}\Big)+u_{2,n}\Big(\frac{x}{M_n^{\frac{2}{N-2}}}\Big)\Big)\cdot M_n^{\frac{-2(N-1)}{N-2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \int_{|x| \le M_n^{\frac{2}{N-2}}} M_n^{\frac{-6}{N-2}} |x|^2 a(p_n + d_n M_n^{-\frac{2}{N-2}} x) \cdot z_n(x)(\widetilde{u}_{1,n}(x) + \widetilde{u}_{2,n}(x)) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{R^{N-1}} M_n^{\frac{-6}{N-2}} \Big[2b \frac{(|x|^2-1)}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} + o(1) \Big] \mathrm{d}x = O(M_n^{\frac{-6}{N-2}}), \tag{16}$$

$$\int_{|x'| \le 1} |x'|^2 \overline{c}_n \cdot \overline{z}_n \mathrm{d}x' = b M_n^{-\frac{2}{N-2}} \Big(\int_{R^{N-1}} \frac{|x|(|x|^2-1)}{(1+|x|^2)^{N+1}} + o(1) \Big), \tag{17}$$

$$\int_{|x'| \le 1} |x'|^2 \nabla \overline{z}_n (\nabla u_{1,n} + \nabla u_{2,n}) \mathrm{d}x'$$

$$= b M_n^{-\frac{2}{N-2}} \Big[2(N-2) \int_{R^{N-1}} \frac{(N-2)|x|^2 - (N+2)}{(1+|x|^2)^{N+1}} |x|^4 \mathrm{d}x \Big] + o(1). \tag{18}$$

将 (13)–(14), (16)–(18) 式代人 (12) 式可得，当 $N \ge 5$ 时，有

$$-2 \int_{R_+^N} \frac{|x|^2 - 1}{(1+|x|^2)^{N-1}} = \frac{d_n M_n^{\frac{2}{N-2}}}{2} \Big(\int_{R^{N-1}} N(N-2) \frac{|x|^2(1-|x|^2)}{(1+|x|^2)^{N+1}}$$

$$-(2-N) \int_{R^{N-1}} \frac{(N-2)|x|^2 - (N+2)}{(1+|x|^2)^{N+1}} |x|^4 \Big) + o(1),$$

从而有

$$\lim_{n \to \infty} d_n M_n^{\frac{2}{N-2}} = \frac{2|S^{N-1}|(N-1)\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(\frac{N-4}{2})}{|S^{N-2}|(N-2)\Gamma(\frac{N+1}{2})\Gamma(\frac{N-3}{2})},$$

这与定理 2.1 矛盾.

当 $N=4$ 时，其余各式不变，再由 (15) 和 (12) 式可得

$$b M_n^{-2} (\log M_n) |S^3| (1 + o(1)) = \frac{b M_n^{-1} d_n}{2} \Big[8 \int_{R^3} \frac{|x|^2(1-|x|^2)}{(1+|x|^2)^5} \mathrm{d}x + 4 \int_{R^3} \frac{(|x|^2-3)|x|^4}{(1+|x|^2)^5} \Big]$$

$$= \frac{b M_n^{-1} d_n}{2} \cdot \frac{8|S^2|\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(5)} = \frac{b M_n^{-1} d_n |S^2| \pi}{8},$$

从而有

$$\lim_{n \to \infty} d_n M_n (\log M_n)^{-1} = \frac{8|S^3|}{|S^2|\pi}.$$

这与定理 2.1 矛盾. 所以 $N \ge 4$, 唯一性得证. ∎

4 z_n 的估计和定理 2.1 的证明

文章的最后, 我们给出引理 2.5, 引理 2.6 和定理 2.1 的证明, 这里将沿用第二步的假设, $z_n \to z(x) = b\frac{|x|^2-1}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}$, in $C^2_{\mathrm{loc}}(R^N_+)$, 在这里不妨假设 $b=1$.

性质 4.1 当 n 充分大, $2M_n^{-\frac{2}{N-2}} \le |x| \le 1$ 时，存在常数 $c>0$, 有

$$\overline{z}_n(x) \le c M_n z(M_n^{\frac{2}{N-2}}).$$

$$|\nabla \overline{z}_n(x)| \le \frac{c}{|x|} |\overline{z}_n(x)|.$$

性质 4.1. 的证明需要几个引理，下面先证明这几个引理.

引理 4.2 存在 $n_0>0$, 当 $n>n_0, x\in\Omega_n$ 且 $|x|\geq 2M_n^{-\frac{2}{N-2}}$ 时，有

$$\overline{z}_n(x)>0.$$

证 考虑伸缩变换后得到的函数

$$z_n(x)=M_n^{-1}\overline{z}_n\Big(\frac{x}{M_n^{\frac{2}{N-2}}}\Big), x\in\widetilde{\Omega}_n,$$

由 $z_n\to z(x)=\frac{|x|^2-1}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}$ 得，对 $\forall\widetilde{R}>2$, 当 n 充分大， $2\leq|x|\leq\widetilde{R}$ 时，有

$$z_n>0.$$

下证当 $x\in D_{\widetilde{R},n}=\widetilde{\Omega}_n\backslash B_{\widetilde{R}}$, 有 $z_n>0$. 记 z_n^- 为 z_n 在 $D_{\widetilde{R},n}$ 中的负部.

(6) 式两端同乘 z_n^- 并分部积分有

$$\begin{aligned}&\int_{D_{\widetilde{R},n}}|\nabla z_n^-|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{D_{\widetilde{R},n}}a(d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)|z_n^-|^2\\=&\int_{D_{\widetilde{R},n}}c_n(x)|z_n^-|^2\leq\Big(\int_{D_{\widetilde{R},n}}c_n^{\frac{N}{2}}\Big)^{\frac{2}{N}}\cdot\Big(\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}},\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{\widetilde{R}\to\infty}\int_{D_{\widetilde{R},n}}c_n^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}x=0$, 所以当 $\widetilde{R}$ 充分大时，有

$$\int_{D_{\widetilde{R},n}}|\nabla z_n^-|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{D_{\widetilde{R},n}}a(d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}x)|z_n^-|^2\leq\frac{S\gamma}{2}\Big(\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}}.$$

又因 $a(x)\geq\gamma>0$, 所以经简单的变形可得

$$\int_{D_{\widetilde{R},n}}|\nabla z_n^-|^2+M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^2\leq\frac{S}{2}\Big(\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}}.$$

另一方面由 (7) 式可得

$$S\Big(\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^{\frac{2N}{N-2}}\Big)^{\frac{N-2}{N}}\leq\int_{D_{\widetilde{R},n}}|\nabla z_n^-|^2+d_n^2M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{D_{\widetilde{R},n}}|z_n^-|^2.$$

如果 $d_n\leq 1$, 除非 $z_n^-\equiv 0$, 否则会产生矛盾. 从而当 $x\in D_{\widetilde{R},n}$ 时，有 $z_n>0$.

所以再通过伸缩变换可得，当 $x\in\Omega_n$ 且 $|x|>2M_n^{-\frac{2}{N-2}}$ 时， $\overline{z}_n(x)>0$.

为了得到 $\overline{z}_n$ 更好的估计，考虑拉直 Ω 的边界，在 0 点的邻域 $U(0)$ 内，边界 $\partial\Omega$ 可由一 C^2 函数 $x_N=\Phi(x')=\frac{1}{2}|x'|^2+O(|x'|^3)$ 表示，引入一同胚变换 $\Phi:\overline{\Omega}\bigcap U(0)\to R_+^N$, 使得 $\Phi(\partial\Omega\bigcap U(0))=\{y_N=0\}\bigcap\{|y|<r_0\}$, 其中 $r_0>0$.

设 $\Phi=(\Phi^1,\cdots\Phi^N)$, 有

$$\begin{cases}\Phi^j(x)=x_j,\quad 1\leq j\leq N-1,\\\Phi^N(x)=x_N-\Phi(x').\end{cases}$$

所以 $\Phi(\overline{\Omega}\bigcap U(0))=\overline{B}^{+}_{r_0}=\{y:|y|\le r_0,y_N\ge 0\}$. 设 $U_n(0)=\frac{U(0)}{d_n},\Phi_n(x)=d_n^{-1}\Phi(d_nx)$, 则 $\Phi_n:\Omega_n\bigcap U_n\to\overline{B}^{+}_{\frac{r_0}{d_n}}$ 满足

$$\begin{cases}\Phi_n^j(y)=y_j,\quad 1\le j\le N-1,\\ |\Phi_n^N(y)-y_N|\le cd_n|y|^2.\end{cases}$$

符号同前 $u_{i,n}(x)=w_{i,n}(d_nx),x\in\Omega_n$. 设

$$v_{i,n}(y)=u_{i,n}(\Phi_n^{-1}(y)),y\in\overline{B}^{+}_{\frac{r_0}{d_n}},$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}L(v_n)&:=\triangle u_n(\Phi_n^{-1})\\&=\triangle v_n(y)+d_n\Big[2y_N\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial^2v_n}{\partial y_j^2}-\frac{\partial v_n}{\partial y_N}\Big]+d_n^2\Big[\sum_{i,j=1}^{N}c_{ij}(y)\frac{\partial^2v_n}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{j=1}^{N}c_j(y)\frac{\partial v_n}{\partial y_j}\Big].\end{aligned}\tag{19}$$

设 $\widetilde{z}_n(y)=\overline{z}_n(\Phi_n^{-1}(y)),|y|\le\frac{r_0}{d_n}$, 则 $\widetilde{z}_n$ 满足

$$\begin{cases}-L\widetilde{z}_n+a(d_n\Phi_n^{-1}(y))\widetilde{z}_n=\widetilde{c}_n(y)\widetilde{z}_n,|y|\le\dfrac{r_0}{d_n},y_N>0,\\ \dfrac{\partial\widetilde{z}_n}{\partial y_N}(y',0)=0,y'\in R^{N-1},|y'|\le\dfrac{r_0}{d_n}.\end{cases}\tag{20}$$

其中 $\widetilde{c}_n(y)=\overline{c}_n(\Phi_n^{-1}(y))$. ▌

记 $m_n=\inf\limits_{|y|=1}\widetilde{z}_n(y)$, 则有下引理成立.

引理 4.3 当 $1\le|y|\le\frac{r_0}{d_n}$ 时，存在常数 $\mu>0,c>0$, 有

$$\widetilde{z}_n(y)\le cm_ne^{-\mu|y|}.$$

证 由文献 [1, 定理 2.3] 知：当 $x\in\Omega_n\bigcap\{|x|\ge 1\}$ 时，有 $u_n(x)\rightrightarrows 0$, 因而当 n 充分大时，$a(d_nx)-\overline{c}_n>0,|x|\ge 1$. 另外当 $|x|\ge 1$ 时，$\overline{z}_n(x)>0$, 对方程 (5) 应用最大值原理可得

$$\sup_{\Omega_n\bigcap\{|x|\ge 1\}}\overline{z}_n(x)=\sup_{\Omega_n\bigcap\{|x|=1\}}\overline{z}_n(x).$$

由标准的线性方程 (20) 的衰减估计可得引理 4.3 成立. ▌

引理 4.4 对充分大的 R, 当 $y\in\{RM_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le\overline{r}_0\}\bigcap\{y_N>0\}$ 时，存在常数 $c>0,\overline{r}_0>0$, 有

$$\widetilde{z}_n(y)\ge cM_n^{-1}|y|^{2-N}.$$

证 $\alpha\in(0,1)$, 设

$$\varphi_n(y)=M_n^{-1}(|y|^{2-N}-A|y|^{2-N+\alpha}),$$

其中 $A=(2\overline{r}_0)^{-\alpha}$. 易验证当 $|y|\le\overline{r}_0$ 时，$\varphi_n(y)\ge 0$. 由引理 4.2 知：对充分大的 n, 当 $|y|\ge 2M_n^{-\frac{2}{N-2}}$ 时，$\widetilde{z}_n(y)>0$. 对 φ_n 进行简单的计算可得，对充分大的 n 和小的 $\overline{r}_0$ 有

$$L\varphi_n-a(d_n\Phi_n^{-1}(y))\varphi_n+\widetilde{c}_n(y)\varphi_n\ge L\varphi_n-\varphi_n\ge 0.$$

且当 $|y|=2\overline{r}_0$ 时，有

$$0=\varphi_n(y)\le\widetilde{z}_n(y),$$

当 $|y|=2M_n^{-\frac{2}{N-2}}$ 时，有

$$0<c\varphi_n(y)\le\widetilde{z}_n(y),$$

所以在 $y\in\{M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le 2\overline{r}_0\}\bigcap\{y_N>0\}$ 时，应用最大值原理可得

$$\widetilde{z}_n(y)\ge c\varphi_n(y),2M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le\overline{r}_0.$$

即：引理 4.4 成立. ▍

注 2 同文献 [4] 中的结果，$\widetilde{z}_n(te)t^{\frac{N-2}{2}}$ 单减, 在 $t=R_n$ 取第一个局部极小 , $v_{i,n}(te)t^{\frac{N-2}{2}}$ 在 $t=R_{i,n}$ 取第一个局部极小 $i=1,2$. 取 $r_n=\min\{R_nM_n^{-\frac{2}{N-2}},R_{1,n}M_n^{-\frac{2}{N-2}},R_{2,n}M_n^{-\frac{2}{N-2}},1\}$, 有 $\widetilde{z}_n(te)t^{\frac{N-2}{2}},v_{i,n}(te)t^{\frac{N-2}{2}}$ 在 $t(N)M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le t\le r_n$ 对任何 $e\in S_+^{N-1}$, 严格递减.

引理 4.5 当 $RM_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le r_n$ 时，存在常数 $c>0$, 对充分大的 R 和 n, 有

$$\widetilde{z}_n(y)\le cM_n^{-1}|y|^{2-N}.$$

证 选择 R 充分大，使得当 $|y|\ge RM_n^{-\frac{2}{N-2}}$ 时，有 $\widetilde{z}_n(y)>0$. 设 $\rho_n=RM_n^{-\frac{2}{N-2}}$, 当 $\rho_n\le|y|=\rho\le r_n$ 时，定义

$$\varphi_n(y)=M_n^{-1}|y|^{2-N+\tau}\rho_n^{-\tau}+m_n(\rho)|y|^{-\tau}\rho^{\tau},$$

其中 $m_n(\rho)=\sup\limits_{|y|=\rho}\widetilde{z}_n(\rho),\tau\in(0,\frac{N-2}{2})$. 选择 R 充分大使得

$$\max_{i=1,2}\max_{|y|=\rho_n}v_{i,n}(y)|y|^{\frac{N-2}{2}}\to U(R)R^{\frac{N-2}{2}}<c_0.$$

其中 $c_0\le[\frac{\tau(N-2-\tau)}{\alpha_N2^{p-2}}]^{\frac{4}{N-2}}$. 所以当 $\rho_n\le|y|\le r_n$ 时，由 $v_{i,n}t^{\frac{N-2}{2}}$ 单减，有

$$\widetilde{c}_n(y)\le\alpha_N2^{p-2}\max_{i=1,2}\max_{|y|=\rho_n}v_{i,n}^{\frac{4}{N-2}}|y|^2<\tau(N-2-\tau).$$

因而当 $\rho_n\le|y|\le r_n$ 时，有

$$\begin{aligned}&L\varphi_n-a(d_n\Phi_n^{-1}(y))\varphi_n+\widetilde{c}_n(y)\varphi_n\\ \le\,&L\varphi_n+\widetilde{c}_n(y)\varphi_n\\ =\,&[-\tau(N-2-\tau)+\alpha_N2^{p-2}c_0^{\frac{4}{N-2}}-\tau(N-2-\tau)+\circ(1)d_n|y|+\circ(1)d_n^2]|y|^{-2}\varphi_n(y)\\ \le\,&0.\end{aligned}$$

所以 φ_n 是满足 Neumann 边界条件的上解. 且当 $|y|=\rho_n$ 时，有

$$\varphi_n(y)\ge M_n^{-1}\rho_n^{2-N}=M_nR^{2-N}.$$

而

$$\frac{\widetilde{z}_n(\rho_n)}{M_n}\to\frac{R^2-1}{(R^2+1)^{\frac{N}{2}}}.$$

所以当 n,R 充分大， $|y|=\rho_n$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le 2\varphi_n(y).$$

由于当 $|y|=\rho$ 时, $\widetilde{z}_n(y)\le m_n(\rho)\le\varphi_n(y)$. 再由最大值定理可得：当 $\rho_n\le|y|\le\rho$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le 2\varphi_n(y).$$

由 $\widetilde{z}_n(y)|y|^{\frac{N-2}{2}}$ 单调性知：对 $|y|=\rho, 0<\theta<1$ 有

$$\begin{aligned}\widetilde{z}_n(y)|y|^{\frac{N-2}{2}}&\le\widetilde{z}_n(\theta y)|\theta\rho|^{\frac{N-2}{2}}\le 2\varphi_n(\theta\rho)|\theta\rho|^{\frac{N-2}{2}}\\&=2M_n^{-1}\theta^{-\frac{N-2}{2}+\tau}\rho^{-\frac{N-2}{2}+\tau}\rho_n^{-\tau}+2m_n\theta^{\frac{N-2}{2}-\tau}\rho^{\frac{N-2}{2}}.\end{aligned}$$

选择 θ 使得 $\theta^{\frac{N-2}{2}-\tau}=\frac{1}{4c}$, 其中 c 由 Harnack 不等式 $\max\limits_{|y|=\rho}\widetilde{z}_n(y)\le c\min\limits_{|y|=\rho}\widetilde{z}_n(y)$ 确定. 所以

$$\widetilde{z}_n(y)\le\frac{m_n(\rho)}{2c}+8cM_n^{-1}\rho_n^{-\tau}|y|^{2-N+\tau}\le\frac{\min\widetilde{z}_n}{2}+8cM_n^{-1}\rho_n^{-\tau}|y|^{2-N+\tau}.$$

即：当 $\rho_n\le\rho\le r_n$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le cM_n^{-1}\rho_n^{-\tau}|y|^{2-N+\tau},$$

若 $\frac{r_n}{\rho_n}\le 2$, 则命题成立.

若 $\frac{r_n}{\rho_n}\ge 2$, 则必存在 $\rho_{2,n}\le r_n$, 有 $\frac{\rho_{2,n}}{\rho_n}=2$, 所以当 $\rho_n\le|y|\le\rho_{2,n}$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le 2cM_n^{-1}|y|^{2-N}.$$

重复上述的讨论，对给定的 n, 经有限次最后可得引理 4.5 成立. ▮

引理 4.6[4] r_n 如前所定义，且对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 和 $R=R(\epsilon)>0$, 使得对 $\widehat{r}_n\le\delta(\epsilon)r_n$, $R(\epsilon)M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le\widehat{r}_n$, 有 $\widetilde{z}_n(y)\le cM_n^{-1}|y|^{2-N}$, 则当 $R(\epsilon)M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le\widehat{r}_n$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le(1+\epsilon)M_n^{-1}|y|^{2-N}.$$

性质 4.1 的证明 由引理 4.5, 当 $RM_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|y|\le r_n$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y)\le cM_n^{-1}|y|^{2-N},$$

所以

$$\overline{z}_n(x)=\overline{z}_n(\Phi_n^{-1}(y))=\widetilde{z}_n(y)\le cM_n^{-1}|y|^{2-N}\le cM_n^{-1}|x|^{2-N}.$$

而当 n 充分大, $2M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|x|\le 1$ 时，有

$$M_nz(M_n^{\frac{2}{N-2}}x)=M_n\frac{|M_n^{\frac{2}{N-2}}x|^2-1}{(1+|M_n^{\frac{2}{N-2}}x|^2)^{\frac{N}{2}}}\sim M_n^{-1}|x|^{2-N}.$$

即当 n 充分大, $2M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|x|\le 1$ 时，存在常数 $c>0$, 有

$$\overline{z}_n(x)\le cM_nz(M_n^{\frac{2}{N-2}}x).$$

再由标准的梯度估计，当 $2M_n^{-\frac{2}{N-2}}\le|x|\le 1$ 时，有

$$|\nabla\overline{z}_n(x)|\le\frac{c}{|x|}|\overline{z}_n(x)|.$$

即：性质 4.1 得证. ▮

引理 2.5 的证明 由性质 4.1 可得引理 2.5 成立. ∎

引理 2.6 的证明 由引理 4.6 可得，当 $R(\epsilon)M_n^{-\frac{2}{N-2}} \le |y| \le \widehat{r}_n$ 时，有

$$\widetilde{z}_n(y) \le (1+\epsilon)M_n^{-1}|y|^{2-N}.$$

再由性质 4.1, 当 $2M_n^{-\frac{2}{N-2}} \le |x| \le 1$ 时，有

$$\overline{z}_n(x) \le (1+\epsilon)M_n z(M_n^{\frac{2}{N-2}}x).$$

所以

$$M_n z_n(M_n^{\frac{2}{N-2}}x) \le (1+\epsilon)M_n z(M_n^{\frac{2}{N-2}}x).$$

即：当 $y \in \widetilde{\Omega}_n \bigcap \{y : |y| \le \delta M_n^{\frac{2}{N-2}}\}$ 时，有

$$z_n(y) \le (1+\epsilon)z(y).$$

引理 2.6 的结论成立. ∎

定理 2.1 的证明 设 $\Omega_d = \frac{\Omega - p_d}{d}, u_d = w_d(\mathrm{d}x + p_d)$, w_d 是 (3) 式的解，则 u_d 是方程 (4) 的解. 对 u_d 应用 Pohozaev 恒等式有

$$\begin{aligned}
&-\int_{B_1\cap\Omega_d} a(p_n+d_nx)u_d^2\\
=&\int_{B_1\cap\partial\Omega_d}\Big[-(x,\gamma)\frac{|\nabla u_d|^2}{2}+(x,\gamma)(\frac{\alpha_N}{p+1}u_d^{p+1}-\frac{a(p_n+d_nx)}{2}u_d^2)\Big]\mathrm{d}\sigma\\
&+\int_{\partial B_1\cap\Omega_d}\Big[(x\cdot\nabla u_d)\frac{\partial u_d}{\partial\gamma}-\frac{|\nabla u_d|^2}{2}+\frac{\alpha_N}{p+1}u_d^{p+1}-\frac{a(p_n+d_nx)}{2}u_d^2+\frac{N-2}{2}u_d\frac{\partial u_d}{\partial\gamma}\Big]\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned} \tag{21}$$

由于当 $|x|=1$ 时， $u_d(x) = O(M_n^{-1})$. 所以， | 在边界 $\partial B_1 \cap \Omega_d$ 的积分 | $= O(M_n^{-2})$.

1) 当 $N \ge 5$ 时，由伸缩变换 $\widetilde{u}_d(x) = M_n^{-1}u_d(M_n^{-\frac{2}{N-2}}x)$ 可得

$$\int_{B_1\cap\Omega_d} a(p_n+d_nx)u_d^2\mathrm{d}x = M_n^{-\frac{4}{N-2}}\int_{R_+^N} U^2(x)\mathrm{d}x(1+\circ(1)) = \frac{|S^{N-1}|\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(\frac{N-4}{2})}{4\Gamma(N-2)}. \tag{22}$$

定义

$$(x,\gamma)\mathrm{d}\sigma = \Big[\frac{d_n}{2}|x'|^2 + \circ(|d_n|^2|x'|^3)\Big]\mathrm{d}x',$$

则

$$\int_{B_1\cap\partial\Omega_d}(x,\gamma)\frac{|\nabla u_d|^2}{2}\mathrm{d}\sigma = d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}H(p_n)\frac{|S^{N-2}|(N-2)^2\Gamma(\frac{N+3}{2})\Gamma(\frac{N-3}{2})}{4\Gamma(N)}(1+\circ(1)). \tag{23}$$

$$\int_{B_1\cap\partial\Omega_d}\frac{a(p_n+d_nx)}{2}u_d^2(x,\gamma)\mathrm{d}\sigma = d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}\circ(1). \tag{24}$$

$$\int_{B_1\cap\partial\Omega_d}\frac{\alpha_N}{p+1}u_d^{p+1}(x,\gamma)\mathrm{d}\sigma = d_nM_n^{-\frac{2}{N-2}}H(p_n)\frac{|S^{N-2}|\Gamma(\frac{N+1}{2})\Gamma(\frac{N-1}{2})}{4\Gamma(N)}(1+\circ(1)). \tag{25}$$

将 (22)–(25) 式代入 (21) 式，整理可得，当 $N \ge 5$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} d_nM_n^{\frac{2}{N-2}} = \frac{|S^{N-1}|(N-1)\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(\frac{N-4}{2})}{|S^{N-2}|(N-2)\Gamma(\frac{N+1}{2})\Gamma(\frac{N-3}{2})H(p_0)}.$$

2) 当 $N=4$ 时，有

$$\int_{B_1\cap\Omega_d} a(p_n+d_nx)u_d^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}|S^3|M_n^{-2}\log M_n. \tag{26}$$

将当 $N=4$ 时的 (23)–(25) 和 (26) 式代入 (21) 式，整理可得，当 $N=4$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} d_nM_n(\log M_n)^{-1}=\frac{|S^3|}{|S^2|}\frac{4}{\pi}\frac{1}{H(p_0)}$$

即：定理 2.1 得证. ▌

参 考 文 献

[1] Ni W M, Takagi I. On the shape of least energy solutions to a semilinear Neumann problem. Comm Pure Math Appl, 1991, **XLiv**: 819–851

[2] Grossi M. Uniqueness of the least energy solution for a semilinear Neumann problem. Proc Amer Math Soc, 2000, **128**: 1665–1672

[3] Gui C, Lin C S. Estimates for boundary-bubbling solutions to an elliptic Nemann problem. J f'ur die Reine und Angewandte Math (Crelle J), 2002, **546**: 201–235

[4] Grossi M, Chang-Shou Lin, Prashanth S. A uniqueness result for a Neumann problem involving the critical Sobolev exponent. Math Ann, 2003, **325**: 643–664

[5] Pohozaev S. Eigenfunction of the equation $\Delta u+f(u)$=0. Soviet Math Doke, 1965, **6**: 1408–1411

[6] Bianchi G, Egnell H. A note on the Sobolev inequality. J of Funct Anal, 1991, **100**: 10–24

Uniqueness of the One-bubbling Solution for a Neumann Problem Involving the Critical Sobolev Exponent

Du Gang

(*Department of Mathematics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079;*
Department of Mathematics, Kashi Teachers College, Xinjiang Kashi 844007)

Abstract: In this paper, we consider a class of Neumann problem involving critical Sobolev exponents. The uniqueness is established by using Pohozaev identity and some estimates.

Key words: uniqueness; critical Sobolev exponents; one-bubbling solutions; Pohozaev identity.

MR(2000) Subject Classification: 35J25