2009,**29A**(3):794–799

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一类高阶中立型泛函微分方程周期解的存在性 *

汪凯
(安徽财经大学统计与应用数学学院 安徽蚌埠 233030)

摘要：该文利用重合度理论研究了一类具有分布时滞的高阶中立型泛函微分方程的周期解问题，得到了周期解存在的简单判别条件.

关键词：分布时滞；周期解；重合度.

MR(2000) 主题分类: 34K15; 34C25 **中图分类号**: O175.6 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-794-06

1 引言

近年来重合度拓展定理被广泛运用于泛函微分方程周期解存在性的研究，但是大部分文献研究的都是具有离散时滞的方程，如文献 [1–5]. 然而，现实生活中的种种实例告诉我们时滞的影响不完全也不可能仅仅集中在过去的某一时刻，而可能是受过去的某一段时间或整个历史的影响，从而对具分布时滞方程的研究具有一定的理论价值和实际意义. 彭世国在文献 [6] 中研究了具有分布时滞的 Liénard 方程的周期解的存在性. 目前对具有分布时滞的高阶中立型方程的研究还很少，仅房辉在文献 [7] 中利用 k - 集压缩映象研究了一类高阶中立型 Duffing 型时滞方程周期解的存在性. 作者在文献 [8] 中研究了具有分布时滞的高阶中立型 Liénard 方程周期解的存在问题，本文将讨论如下中立型 Rayleigh 方程周期解的存在性

$$(x(t)-cx(t-\tau))^{(n)}+f\left(x'(t)\right)+g\left(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=p(t). \tag{1.1}$$

其中 $|c|\neq 1, \tau\in R, r>0$ 均为常数， f, g 均为 R 上的连续函数， p 为 R 上的连续 T - 周期函数， α 为有界变差函数.

2 主要引理

为方便后文的研究，我们约定： α 的全变差 $\bigvee\limits_{-r}^{0}\alpha=1, \int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$. $X:=\{x\in C(R,R)\,|x(t+T)\equiv x(t)\}$, 其模为 $|x|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$; $Y:=\{x\in C^1(R,R)|x(t+T)\equiv x(t)\}$, 其模为 $\|x\|=\max\{|x|_0,|x'|_0\}$. 易知 X 和 Y 均为 Banach 空间. 定义如下算子

$$A:X\to X,\ \ [Ax](t)=x(t)-cx(t-\tau),\ \ \ L:D(L)\subset Y\to X, Lx=(Ax)^{(n)}.$$

收稿日期：2007-09-06; 修订日期：2009-01-12

E-mail: wangkai.math@163.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10371006)、教育部重点项目 (207047)、全国统计科学研究项目 (2008LY048)、安徽省教育厅自然科学基金 (KJ2008B235, KJ2009B103Z) 和安徽财经大学青年重点项目 (ACKYQ0811ZD) 资助

其中 $D(L)=\{x\in C^n(R,R)|x(t+T)=x(t)\}$.

$$N:Y\to X,\ Nx=-f\left(x'(t)\right)-g\left(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)+p(t).\tag{2.1}$$

易知 $\mathrm{Ker}L=R,\mathrm{Im}L=\{x\in X|\int_0^T x(s)\mathrm{d}s=0\}$, 则 L 是指标为零的 Fredholm 算子. 定义算子： $P:Y\to\mathrm{Ker}L, Px=[Ax](0)$; $Q:X\to X/\mathrm{Im}L, Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s$. 从而 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L,\ L_p:=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}$ 存在逆 $L_P^{-1}:\mathrm{Im}L\to D(L)$.

$$[L_p^{-1}y](t)=A^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}(Ax)^{(i)}(0)t^i+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-s)^{n-1}y(s)\mathrm{d}s\right).\tag{2.2}$$

这里 $(Ax)^{(i)}(0),\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 由方程 $DZ=B$ 唯一确定，其中

$$Z=\Big((Ax)^{(n-1)}(0),\cdots,(Ax)''(0),(Ax)'(0)\Big)^T,\ D=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\c_1&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\c_{n-2}&c_{n-3}&c_{n-4}&\cdots&c_1&1\end{pmatrix},$$

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})^T,\quad b_i=-\frac{1}{i!T}\int_0^T(T-s)^iy(s)\mathrm{d}s,\quad c_j=\frac{T^j}{(j+1)!},\ j=1,2,\cdots,n-2.$$

由 (2.1) 和 (2.2) 式知 L 是 $\overline{\Omega}$ 上的 L - 紧算子，其中 $\Omega\subset Y$ 是任意有界开集.

引理 1[3] 如果 $|c|\neq1$, 那么算子 A 存在唯一有界连续逆，且满足下列条件

(1) $\int_0^T|[A^{-1}f](t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{|1-|c||}\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t,\ \ \forall f\in X$;

(2) $Ax''=[Ax]'',\ \ \forall x\in C_T^2:=\{x\in C^2(R,R)|x(t+T)\equiv x(t)\}$.

注 由引理 1 易得由 (2.1) 式定义的算子 A 存在逆且唯一，并且

$$Ax^{(n)}=[Ax]^{(n)},\ \ \forall x\in C_T^n:=\{x\in C^n(R,R)|x(t+T)\equiv x(t)\}.$$

引理 2[9] 设 X,Y 均为 Banach 空间， $L:D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子， $\Omega\subset X$ 是有界开集， $N:\overline{\Omega}\to Y$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的 L - 紧算子，且下列条件成立

(1) $Lx\neq\lambda Nx,\ \ \forall x\in\partial\Omega\cap D(L),\ \lambda\in(0,1)$;

(2) $Nx\notin\mathrm{Im}L,\ \ \forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$;

(3) $\deg\{QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}\cap D(L)$ 上至少存在一个解.

3 主要结果

定理 1 若存在常数 $r_1\geqslant0,\ r_2\geqslant0,\ K>0$ 和 $E>0$ 满足条件

[H$_1$] $|f(x)|\leqslant r_1|x|+K,\ \ \forall x\in R$;

[H$_2$] $xg(x)>0$(或 $xg(x)<0$), 且当 $|x|>E$ 时, $|g(x)|>K+r_1|x|$;

[H$_3$] $\lim\limits_{x\to+\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$);

[H$_4$] $T^{n-1}[r_1+r_2(T+2)]<2^{n-1}|1-|c||$.

那么方程 (1.1) 至少存在一个 T - 周期解.

证 不妨假设 $xg(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$, 取 $\Omega_1=\{x|x\in X\cap D(L),\ Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in(0,1)\}$, 则 $\forall\, x\in\Omega_1$, x 满足下列方程

$$(x(t)-cx(t-\tau))^{(n)}+\lambda f\left(x'(t)\right)+\lambda g\left(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=\lambda p(t),\ \lambda\in(0,1). \tag{3.1}$$

将上面的方程两端同时在 $[0,T]$ 上积分得

$$\int_0^T\left[f\left(x'(t)\right)+g\left(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\right]\mathrm{d}t=0. \tag{3.2}$$

由积分中值定理知 $\exists\,\xi\in(0,T)$, 使得

$$f\left(x'(\xi)\right)=-g\left(\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right). \tag{3.3}$$

则必存在 $\exists\, t_0\in[0,T]$, 使得 $|x(t_0)|<|x'|_0+E$.

事实上, 当 $r_1=0$ 时, 有 $|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant E$, 否则若 $|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)|>E$, 则由条件知 $K<|g(\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s))|=|f\left(x'(\xi)\right)|\leqslant K$ 矛盾. 当 $r_1>0$ 时, 如果 $|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)|>E$, 则由条件 $[\mathrm{H}_1]$ 、 $[\mathrm{H}_2]$ 和 (3.3) 式得

$$K+r_1\Big|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big|<\Big|g\Big(\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big)\Big|=|f\left(x'(\xi)\right)|\leqslant r_1|x'|_0+K,$$

即 $|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant|x'|_0$. 故当 $r_1\geqslant0$ 时, 恒有

$$\left|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right|\leqslant|x'|_0+E. \tag{3.4}$$

由 Riemann-Stieltjes 积分中值定理知必存在 $\zeta\in(-r,0)$, 使得 $|x(\xi+\zeta)|\leqslant|x'|_0+E$. 由于 $\xi+\zeta\in R$, 从而存在整数 n 和 $t_0\in[0,T]$, 使得 $\xi+\zeta=nT+t_0$. 由 (3.4) 式得

$$|x(t_0)|=|x(\xi+\zeta)|\leqslant|x'|_0+E. \tag{3.5}$$

由 (3.5) 式得

$$|x|_0\leqslant|x(t_0)|+\frac{1}{2}\int_0^T|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\frac{T+2}{2}|x'|_0+E. \tag{3.6}$$

由条件 $[\mathrm{H}_4]$ 知存在常数 $\varepsilon>0$, 使得 $T^{n-1}[r_1+2(r_2+\varepsilon)(T+1)]<2^{n-1}|1-|c||$. 又由条件 $[\mathrm{H}_3]$ 及有界变差函数的性质知, 存在与 λ 和 x 无关的常数 $\beta>E$, 使得

$$\begin{aligned}\Big|g\Big(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big)\Big|&\leqslant(r_2+\varepsilon)\Big|\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big|\\&\leqslant(r_2+\varepsilon)|x|_0,\ \forall\, t\in R,\ \int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)>\beta.\end{aligned} \tag{3.7}$$

记 $X(t)=\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s), D_1=\{t\in[0,T]|X(t)<-\beta\}, D_2=\{t\in[0,T]||X(t)|\leqslant\beta\}$, $D_3=\{t\in[0,T]|X(t)>\beta\}$, 由 (3.2) 式得

$$\left(\int_{D_1}+\int_{D_2}+\int_{D_3}\right)g(X(t))\mathrm{d}t+\int_0^T f\left(x'(t)\right)\mathrm{d}t=0. \tag{3.8}$$

从而

$$\int_{D_1} |g(X(t))|\,\mathrm{d}t = -\int_{D_1} g(X(t))\mathrm{d}t \leqslant \int_{D_2} |g(X(t))|\,\mathrm{d}t + \int_{D_3} |g(X(t))|\,\mathrm{d}t + \int_0^T |f\left(x'(t)\right)|\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

由 (3.6), (3.8) 和 (3.9) 式得

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|[Ax]^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^T |f\left(x'(t)\right)|\mathrm{d}t + \int_0^T |g(X(t))|\mathrm{d}t + \int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^T |f\left(x'(t)\right)|\mathrm{d}t + \left(\int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3}\right)|g(X(t))|\mathrm{d}t + \int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant T\left(r_1|x'|_0 + K + 2(r_2+\varepsilon)|x|_0 + 2g_\beta + |p|_0\right) \\
&\leqslant d_1|x'|_0 + d_2,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $d_1 = T[r_1 + (r_2+\varepsilon)(T+2)]$, $d_2 = T[K + 2(r_2+\varepsilon)E + 2g_\beta + |p|_0]$, $g_\beta = \max\limits_{t\in D_2}|g(X(t))|$.

由于 $x''(0) = x''(T), \cdots x^{(n)}(0) = x^{(n)}(T)$, 从而存在 $\xi_i \in (0,T)$, $i = 1,2,\cdots n-1$, 使得 $x'(\xi_1) = x''(\xi_2) = \cdots = x^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0$. 设 p,q 为非负整数且 $p<q$, 则

$$|x^{(p)}|_0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x^{(p+1)}(t)|\mathrm{d}t \leqslant \cdots \leqslant \frac{T^{q-p-1}}{2^{q-p}}\int_0^T |x^{(q)}(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

利用引理 1 及 (3.7), (3.10) 和 (3.11) 式可得

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|Ax^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t &= \int_0^T \left|[Ax]^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant d_1|x'|_0 + d_2 \leqslant \frac{d_1T^{n-2}}{2^{n-1}}\int_0^T \left|x^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t + d_2 \\
&\leqslant \frac{d_1T^{n-2}}{2^{n-1}}\int_0^T \left|A^{-1}Ax^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t + d_2 \leqslant \frac{d_1T^{n-2}}{2^{n-1}|1-|c||}\int_0^T \left|Ax^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t + d_2,
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^T \left|Ax^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{2^{n-1}|1-|c||d_2}{2^{n-1}|1-|c|| - d_1T^{n-2}}.$$

从而

$$|x'|_0 \leqslant \frac{T^{n-2}}{2^{n-1}}\int_0^T \left|x^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^{n-2}}{2^{n-1}|1-|c||}\int_0^T \left|Ax^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{d_2T^{n-2}}{2^{n-1}|1-|c|| - d_1T^{n-2}}. \tag{3.12}$$

由 (3.6) 和 (3.12) 式知，存在与 λ 和 x 无关的常数 M_0 和 M_1, 使得 $|x|_0 < M_0$, $|x'| < M_1$.

取 $M = \max\{M_0, M_1\}$, $\Omega = \{x : \|x\| < M\}$ 和 $\Omega_2 = \{x | x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L\}$, 则

$$QNx = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[f\left(x'(t)\right) + g\Big(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big)\right]\mathrm{d}t.$$

$\forall\, x \in \Omega_2$, 那么 $QNx \neq 0$, 从而引理 2 的条件 (1) 和 (2) 满足. 下证条件 (3) 满足，定义映射 $J : \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$, $Jx = x$ 及 $H(x,\mu) = \mu x - T(1-\mu)JQNx$, $\forall\,(x,\mu) \in \Omega\times[0,1]$, 从而

$$H(x,\mu) = \mu x + (1-\mu)\int_0^T \left[f\left(x'(t)\right) + g\Big(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\Big)\right]\mathrm{d}t,\ \forall (x,\mu) \in (\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L)\times[0,1].$$

易知 $H(x,\mu)>0$, 故

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(x,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(x,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0.$$

所以引理 2 的条件 (3) 也满足. 从而根据引理 2 知算子方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}\cap\mathrm{Dom}(L)$ 中至少存在一个解, 即方程 (1.1) 至少存在一个 T - 周期解. ▌

定理 2 若 n 为偶数, $|c|<1$, 且存在常数 $r_1\geqslant 0$, $r_2\geqslant 0$, $K>0$ 及 $E>0$ 满足

[H_1'] $|f(x)|\leqslant r_1|x|+K$, $\forall x\in R$;

[H_2'] $xg(x)>0$(或 $xg(x)<0$), 且当 $|x|>E$ 时, $|g(x)|>K+r_1|x|$;

[H_3'] $\lim\limits_{x\to+\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$);

[H_4'] $r_2T^n(T+2)<2^{n-1}(1-|c|)$.

则方程 (1.1) 至少存在一个 T - 周期解.

注 由于 n 为偶数且 $|c|<1$, 此时条件 [H_4'] 比定理 1 中的 [H_4] 要弱, 它不受 r_1 的限制.

证 不妨设 $xg(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}|\frac{g(x)}{x}|\leqslant r_2$, $n=2k$, k 为正整数. 将方程 (3.1) 两端同乘以 $x''(t)$ 并在 $[0,T]$ 上积分得

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t=&(-1)^{k-1}c\int_0^T x^{(k+1)}(t)x^{(k+1)}(t-\tau)\mathrm{d}t\\&-\lambda\int_0^T x''(t)g\left(\int_{-r}^0x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\mathrm{d}t+\int_0^Tx''(t)p(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant&|c|\left(\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t-\tau)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&+\int_0^T\left|x''(t)g\left(\int_{-r}^0x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\right|\mathrm{d}t+\int_0^T|x''(t)p(t)|\,\mathrm{d}t\\\leqslant&|c|\left(\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{-\tau}^{T-\tau}\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&+\int_0^T\left|x''(t)g\left(\int_{-r}^0x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\right|\mathrm{d}t+\int_0^T|x''(t)p(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant&\frac{1}{1-|c|}|x''|_0\left(\int_0^T\left|g\left(\int_{-r}^0x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\right|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)|\mathrm{d}t\right)\\\leqslant&\frac{2T}{1-|c|}|x''|_0\left((r_2+\varepsilon)|x|_0+g_\rho+\frac{1}{2}|p|_0\right).\end{aligned}\tag{3.13}$$

由 (3.5) 式可得

$$|x|_0\leqslant\frac{T+2}{2}|x'|_0+E\leqslant\frac{T+2}{4}\int_0^T|x''(t)|\mathrm{d}t+E\leqslant\frac{T(T+2)}{4}|x''|_0+E.\tag{3.14}$$

从而由 (3.13) 和 (3.14) 式得

$$\int_0^T\left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{(r_2+\varepsilon)T^2(T+2)}{2(1-|c|)}|x''|_0^2+\frac{2T}{1-|c|}\left((r_2+\varepsilon)E+g_\rho+\frac{1}{2}|p|_0\right)|x''|_0.\tag{3.15}$$

由 (3.11) 和 (3.15) 式得

$$\begin{aligned}\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t &\leqslant \frac{(r_2+\varepsilon)T^{2k}(T+2)}{2^{2k-1}(1-|c|)}\Big(\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|\mathrm{d}t\Big)^2 + d_3\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{(r_2+\varepsilon)T^n(T+2)}{2^{n-1}(1-|c|)}\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t + d_3\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|\mathrm{d}t, \end{aligned}\tag{3.16}$$

其中 $d_3=\frac{T^k}{2^{k-1}(1-|c|)}((r_2+\varepsilon)E+g_\rho+\frac{1}{2}|p|_0)$. 又由 [H$_4$] 知存在常数 $\varepsilon>0$, 使得 $(r_2+\varepsilon)T^n(T+2)<2^{n-1}(1-|c|)$. 从而由 (3.16) 式知存在与 λ 和 x 无关的常数 M_2, 使得 $\int_0^T \left|x^{(k+1)}(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant M_2$, 结合 (3.6) 和 (3.11) 式知存在与 λ 和 x 均无关的常数 M_0 和 M_1, 使得 $|x|_0<M_0$, $|x'|_0<M_1$. 接下来的证明与定理 1 相类似. ▌

作为应用，我们考虑如下例子

$$(x(t)+3x(t-\tau))^5+\left(1+\frac{1}{3\pi^6}x'(t)e^{-(x'(t))^2}\right)+g\left(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=\sin t.$$

取 $g(x)=\frac{1}{3\pi^5}x$, 从而 $r_1=\frac{1}{3\pi^6}$, $r_2=\frac{1}{3\pi^5}$, $c=-3$, $T=2\pi$, $n=5$, $\frac{T^{n-1}[r_1+r_2(T+2)]}{2^{n-1}|1-|c||}=\frac{4\pi^2+2\pi+1}{6\pi^2}<1$. 于是由定理 1 可知方该程存在 2π - 周期解.

参 考 文 献

[1] Lu S P. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. Acta Math Sini, 2004, **47**(2): 299–304 (Chinese, Series)

[2] Lu S P, Ge W G. Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. Nonlinear Anal, 2004, **56**: 501–514

[3] Lu S P, Ge W G, Zheng Z X. Periodic solutions to neutral differential equation with deviating arguments. Appl Math Comput, 2004, **152**: 17–27

[4] Lu S P, Ge W G. On the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argumeng. Adva Math, 2005, **34**(4): 425–432

[5] Liu X P, Jia M, Ren R. On the existence and uniqueness of periodic solutions to a type of Duffing equation with complex deviating argument. Acta Math Sci, 2007, **27A**(1): 37–44

[6] Peng S G. Periodic solutions of Liénard equations with delay. J Engi Math, 2004, **21**(3): 463–466

[7] Fang H. Periodic solutions of high order nonliner neutral differential equations. Pure Appl Math, 2000, **16**(2): 14–18

[8] Wang K, Lu S P. On the existence of periodic solutions for a kind of high-order neutral functional differential equation. J Math Anal Appl, 2007, **326**(2): 1161–1173

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1977

Existence of Periodic Solutions for a Type of High Order Neutral Functional Differential Equations

Wang Kai

(*School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance & Economics, Anhui Bengbu 233030*)

Abstract: By employing the coincidence degree theory, the author studies a kind of higher order neutral functinal differential equation with distributed delay. Some simple conditions which guarantee the existence of periodic solutions to the equation are obtained.

Key words: Distributed delay; Periodic solutions; Coincidence degree.

MR(2000) Subject Classification: 34K15; 34C25