2005,**25A**(3):349－356

Mathematica Acta Scientia
数学物理学报

一类含时滞 SIS 流行病模型的全局稳定性*

原三领[1]　马知恩[2]　韩茂安[3]

([1] 上海理工大学理学院　上海 200093；[2] 西安交通大学应用数学系　西安 710049；
[3] 上海交通大学数学系　上海 200030)

摘要:该文研究了一类含有限分布时滞的 SIS 流行病模型，利用李亚普诺夫泛函的方法，得到了地方病平衡点和无病平衡点全局稳定的充要条件. 揭示了时滞对平衡点稳定性的影响.

关键词:时滞；李亚普诺夫泛函；地方病平衡点；无病平衡点；全局稳定性.

MR(2000)主题分类:45J05；92D30　　**中图分类号**:O175.1　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)03-349-08

1　引言

对含时滞的流行病模型，人们作了大量的工作并得到了很多有价值的结果. 在 SIS 流行病模型中，易感者与染病者充分接触后成为染病者，染病者恢复后再次成为易感者. Cooke 与 Yorke[1] 和 Greenberg 与 Hoppensteadt[2] 分析了具有总人口为常数且含有染病期时滞的 SIS 模型. 发现当 $t\to\infty$ 时所有的解都趋于常数。Hethcote[3] 考虑了两个总人口变化且含有相应于染病期时滞的模型. 在一个类似的具有指数人口动力的 SIS 模型[4] 中，如果考虑相应于染病期的时滞，则在一个小的参数范围内染病者比例类中会出现周期解. Cooke[5] 提出了一个在人群中通过媒介(如蚊子)传播的含时滞的 SIS 模型，对此模型，Bretta 等[6] 假设核函数 f 是 γ 分布，给出了系统的正平衡态全局稳定的一个充分条件，并证明了具有“弱时滞”的系统总是全局稳定的。关于含时滞的 SIS 模型还可参看文献[7－9]等.

本文所分析的 SIS 模型不同于前面的模型，假设染病者恢复后具有暂时免疫力，经过一段时间后，免疫者失去免疫力重新成为易感者，我们把这段时间作为引起时滞的因素.

在本文，我们假设由于移民等因素，人群以常数速率 S_0 征入新成员，由于死亡或迁出离开人群的人数与人口的规模成正比(即 $\mu_d N$). 本文不考虑易感者被感染后的潜伏期，而假设易感者被感染后立即成为染病者。从染病者类移出的包括三部分：自然死亡，额外死亡和恢复者. 由于自然死亡，在 t 时刻进入易感者类的人数 $r_1 rI(t-\tau)$ $(0<r_1<1)$ 要小于在 $t-\tau$ 时刻恢复者的人数 $rI(t-\tau)$.

本文的安排如下：在第 2 节给出我们所考虑的模型，在第 3，4 节分别考察地方病平衡点的局部和全局稳定性，在第 5 节考察疾病消除平衡点的全局稳定性.

收稿日期:2004-01-28

E-mail:yuansanling@263.net

* 基金项目:国家自然科学基金和陕西省青年科学基金资助

2 模型

考虑模型

$$\begin{cases}\dot{S}(t) = -aU(S)I + S_0 - \mu_d S(t) + rr_1\int_0^h f(\tau)I(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ \dot{I}(t) = I(t)[aU(S) - (\mu_d + e + r)].\end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $S(t)$，$I(t)$分别表示易感者类和染病者类. 模型 (2.1) 中所有的参数均为正常数，且

- a 是一个染病者所具有的最大传染力；
- μ_d是人们由于自然死亡和移出从人群中移出的速率；
- e 是由于疾病而引起的死亡率(即额外死亡率)；
- r 是染病者的移出率，经过一段时间后移出者中将有 $r_1 rI(t)$，$0<r_1<1$ 部分再次恢复为易感者；
- h 是人们的最大寿命；
- S_0是常数征入率，并假设所有的征入者均为易感者；
- $U(S)$ 是染病者对易感者的功能性作用函数，$aU(S)$ 是一个染病者所具有的传染力，满足

$$U(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}S} > 0, \quad \lim_{S\to\infty} U(S) = 1. \tag{2.2}$$

- $f(\tau)$ 是移出者重新成为易感者所用时间为"τ"的比例. 并假设 $f(\tau)$ 在$[0,h]$上是非负的，满足

$$\int_0^h f(\tau)\mathrm{d}\tau = 1, \qquad T_f = \int_0^h \tau f(\tau)\mathrm{d}\tau < +\infty. \tag{2.3}$$

容易验证下列两个结论

i) 系统总有疾病消失平衡点 $E_0(\frac{S_0}{\mu_d}, 0)$；

ii) 假设 $\mu_d + e + r < a$ 且 $S_0 > \mu_d S^*$，系统 (2.1) 还存在唯一的正平衡点 $E^* = (S^*, I^*)$，其中

$$S^* = U^{-1}(\frac{\mu_d + d + r}{a}), \qquad I^* = \frac{S_0 - \mu_d S^*}{aU(S^*) - rr_1}.$$

在其它情况下不存在正平衡点.

3 正平衡点 E^* 的局部渐近稳定性

首先我们来考虑正平衡点 $E^* = (S^*, I^*)$ 的局部稳定性. 令

$$x_1 = S - S^*, \quad x_2 = I - I^*, \tag{3.1}$$

其中 $-S^* \leqslant x_1 < \infty$，$-I^* \leqslant x_2 < \infty$. 关于 E^* 的线性化系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -[\mu_d + aI^*U'(S^*)]x_1 - aU(S^*)x_2 + rr_1\int_0^h f(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ \dot{x}_2 = aI^*U'(S^*)x_1(t).\end{cases} \tag{3.2}$$

为方便起见，定义

$$A = \mu_d + aI^*U'(S^*), \quad B = a^2U(S^*)I^*U'(S^*), \quad C = rr_1 aI^*U'(S^*), \tag{3.3}$$

则 $B>C$,系统(3.2)成为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-Ax_1-\dfrac{B}{C}rr_1x_2+rr_1\displaystyle\int_0^h f(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{C}{rr_1}x_1(t).\end{cases}\tag{3.4}$$

设$(x_1(t),\ x_2(t))$是系统(3.4)的任意一个解. 首先考虑函数 $V_{11}(t)=x_1^2(t)$. 当 $t\geqslant h$ 时,由方程(3.4)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11}(t)=&\ 2x_1(t)\dot{x}_1(t)\\ =&-2Ax_1^2(t)-2rr_1\frac{B}{C}x_1(t)x_2(t)+2rr_1x_1(t)\int_0^h f(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ =&-2Ax_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t)-2rr_1x_1(t)\int_0^h[x_2(t)-x_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\\ =&-2Ax_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t)-2rr_1x_1(t)\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t\dot{x}_2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\\ =&-2Ax_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t)-2Cx_1(t)\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t x_1(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&-2Ax_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t)+C\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t[x_1^2(t)+x_1^2(u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\\ =&-2Ax_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t)+CT_fx_1^2(t)+C\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t x_1^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{3.5}$$

定义

$$V_{12}(t)=C\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t\int_r^t x_1^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau.\tag{3.6}$$

考虑泛函

$$V_1(t)=V_{11}(t)+V_{12}(t),$$

则

$$\dot{V}_1(t)\leqslant-2(A-CT_f)x_1^2(t)-2rr_1(\frac{B}{C}-1)x_1(t)x_2(t).$$

令

$$V_2(t)=\frac{(rr_1)^2}{C}(\frac{B}{C}-1)x_2^2,\ V(t)=V_1(t)+V_2(t).$$

则

$$\dot{V}=\dot{V}_1(t)+\dot{V}_2(t)\leqslant-2[A-CT_f]x_1^2(t).\tag{3.7}$$

由(3.7)式,我们现在来证明下列局部稳定结果.

定理 3.1 如果 $CT_f<A$,则系统(2.1)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

证 设$(x_1(t),\ x_2(t))$是(3.4)式的任意一个解. 令 $T_0\geqslant h$,对不等式(3.7)的两边从 T_0 到 $t\geqslant T_0$ 积分得

$$V(t)+\int_{T_0}^t 2(A-CT_f)x_1^2(s)\mathrm{d}s\leqslant V(T_0).\tag{3.8}$$

由于 $V(t)=V_1(t)+V_2(t)\geqslant x_1^2(t)+\dfrac{(rr_1)^2}{C}(\dfrac{B}{C}-1)x_2^2(t)$,从而由(3.8)式可得

$$x_1^2(t)+\frac{(rr_1)^2}{C}(\frac{B}{C}-1)x_2^2(t)+2(A-CT_f)\int_{T_0}^t x_1^2(s)\mathrm{d}s<V(T_0)<+\infty.$$

所以，$x_1(t)$和$x_2(t)$是有界的，且$x_1^2(t)\in L_1[0,\infty)$。由中值定理和(3.4)式中的方程可知，$x_1(t)$，$x_2(t)$和它们的导函数在$[0,\infty)$上是一致连续的．应用 Barbalat 引理(见 Gopalsamy[10]中引理 1.2.2 和 1.2.3)可知，当$t\to\infty$时，$(x_1(t),\dot{x}_1(t))\to(0,0)$。因此，由(3.4)式的第一个方程可得

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{B}{C}x_2(t)+\int_0^h f(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=0. \tag{3.9}$$

令$\alpha=\lim\inf\limits_{t\to\infty}x_2(t)$，$\beta=\lim\sup\limits_{t\to\infty}x_2(t)$且$\{t_m\}\to\infty$是使得当$m\to\infty$时$x_2(t_m)\to\beta$的一个序列．则由(3.9)式可得

$$\frac{B}{C}\beta=\lim_{m\to\infty}\int_0^h f(\tau)x_2(t_m-\tau)\,\mathrm{d}\tau\leqslant\beta.$$

因为$B>C$，故有$\beta\leqslant 0$．类似的，可以得到$\alpha\geqslant 0$．所以$\alpha=\beta=0$，系统(3.4)的每一个解$(x_1(t),x_2(t))$当$t\to\infty$时$(x_1(t),x_2(t))\to(0,0)$。 ▎

4 正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性

为了研究E^*的全局稳定性，考虑(2.1)式的任一正解$X(t)=(S(t),I(t))$，做如下变换

$$x_1=S-S^*,\quad x_2=\ln(I/I^*) \tag{4.1}$$

且定义

$$\xi(x_1)=U(S)-U(S^*)。$$

由假设(2.2)，$-U(S^*)\leqslant\xi(x_1)<1-U(S^*)$．由(4.1)式

$$S=x_1+S^*,\quad I=I^*e^{x_2}, \tag{4.2}$$

故对任意的$x_1\in[-S^*,+\infty]$，$x_1\xi(x_1)\geqslant 0$，且当且仅当$x_1=0$时$x_1\xi(x_1)=0$．利用(4.1)式，系统(2.1)可写为如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-\mu_d x_1(t)-aI^*e^{x_2(t)}\xi(x_1(t))-aU(S^*)I^*\\ \qquad\qquad\times(e^{x_2(t)}-1)+rr_1I^*\int_0^h f(\tau)[e^{x_2(t-\tau)}-1]\mathrm{d}\tau,\\ \dot{x}_2(t)=a\xi(x_1(t)).\end{cases} \tag{4.3}$$

此时正平衡点E^*即变为(4.3)式的零平衡点$x_1=x_2=0$.

定理 4.1 若下列条件成立

i) $\mu_d+e+r<a$，$S_0>\mu_d S^*$；

ii) 时滞τ满足

$$r_1[T_f^{\ *}+T_f]<\frac{2}{r}, \tag{4.4}$$

其中

$$T_f^{\ *}=\frac{1}{\mu_d+e+r}\int_0^h f(\tau)(e^{(\mu_d+e+r)\tau}-1)\mathrm{d}\tau.$$

则正平衡点E^*是全局渐近稳定的.

证 首先，我们证明E^*是全局吸引的.

设$(x_1(t),x_2(t))$是系统(4.3)的任一解．考虑函数

$$V_1(t)=\int_0^{x_1(t)}\xi(u)\mathrm{d}u. \tag{4.5}$$

则 $V_1(x_1)\geqslant 0$，且当且仅当 $x_1=0$ 时,$V_1(x_1)=0$,沿着(4.3)式的解求导

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &=\xi(x_1(t))\dot{x}_1(t)\\ &=-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))\\ &\quad -aU(S^*)I^*\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]+rr_1I^*\xi(x_1(t))\int_0^h f(\tau)[e^{x_2(t-\tau)}-1]\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))\\ &\quad -[aU(S^*)-rr_1]I^*\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]\\ &\quad +rr_1I^*\xi(x_1(t))\int_0^h f(\tau)[e^{x_2(t-\tau)}-e^{x_2(t)}]\mathrm{d}\tau\\ &=-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))\\ &\quad -[aU(S^*)-rr_1]I^*\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]\\ &\quad -rr_1I^*\xi(x_1(t))\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}a\xi(x_1(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))\\ &\quad -[aU(S^*)-rr_1]I^*\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]\\ &\quad +\frac{1}{2}rr_1aI^*[(\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau)\xi^2(x_1(t))\\ &\quad +\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}\xi^2(x_1(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau]\quad (t\geqslant h).\end{aligned}\tag{4.6}$$

定义

$$V_2(t)=\frac{1}{2}rr_1aI^*\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t\int_r^t e^{x_2(u)}\xi^2(x_1(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau,\tag{4.7}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}rr_1aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))T_f-\frac{1}{2}rr_1aI^*\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}\xi^2(x_1(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau.\tag{4.8}$$

由(4.5)和(4.7)式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_1+V_2)(x(t))\leqslant&-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^* e^{x_2(t)}\xi^2(x_1(t))\\ &-I^*[aU(S^*)-rr_1]\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]\\ &+\frac{1}{2}rr_1aI^*[\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau+T_f e^{x_2(t)}]\xi^2(x_1(t)).\end{aligned}\tag{4.9}$$

另一方面,由(2.1)式的第二个方程可以看到

$$\dot{I}(t)\geqslant-(\mu_d+e+r)I(t),$$

所以

$$\ln\frac{I(t)}{I(\tau)}\geqslant-(\mu_d+e+r)(t-\tau)\quad (t\geqslant\tau>0).$$

这样,有

$$I(\tau)\leqslant e^{(\mu_d+e+r)(t-\tau)}I(t)\quad (t\geqslant\tau>0).$$

故

$$I^*\int_{t-\tau}^t e^{x_2(u)}\mathrm{d}u=\int_{t-\tau}^t I(u)\mathrm{d}u$$

$$\leqslant \left(\int_{t-\tau}^{t}[e^{(\mu_d+e+r)(t-u)}]\mathrm{d}u\right)I(t)$$

$$=\frac{1}{\mu_d+e+r}[e^{(\mu_d+e+r)\tau}-1]I(t). \tag{4.10}$$

由(4.9)和(4.10)式,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_1+V_2)(x(t))\leqslant &-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))-aI^*e^{x_1(t)}\xi^2(x_2(t))\\&-I^*[aU(S^*)-rr_1]\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]\\&+\frac{1}{2}rr_1a[T_f^*+T_f]I(t)\xi^2(x_1(t)),\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$T_f^*=\frac{1}{\mu_d+e+r}\int_0^h f(\tau)(e^{(\mu_d+e+r)\tau}-1)\mathrm{d}\tau.$$

令

$$V_3(x_2)=\int_0^{x_2}[e^s-1]\mathrm{d}s.$$

则 $V_3(x_2)\geqslant 0$, $x_2\in(-\infty,+\infty)$,且当且仅当 $x_2=0$ 时,$V_3(x_2)=0$,沿着(4.3)式的解求导

$$\dot{V}_3(t)=[e^{x_2(t)}-1]\dot{x}_2(t)=a\xi(x_1(t))[e^{x_2(t)}-1]. \tag{4.12}$$

选择常数 $\alpha(>0)$ 使得

$$\alpha a=I^*[aU(S^*)-rr_1].$$

定义李雅普诺夫泛函如下

$$V(x)(t)=V_1(x)(t)+V_2(x)(t)+\alpha V_3(x)(t).$$

则由(4.10)和(4.11)式得

$$\dot{V}(x)(t)\leqslant-\mu_d x_1(t)\xi(x_1(t))+I\xi^2(x_1(t))[-a+\frac{1}{2}rr_1a(T_f^*+T_f)].$$

类似于定理 3.1 的证明,可以证明(4.1)式的正平衡点 E^* 是全局吸引的. 另一方面,可以证明(4.4)式蕴含着 $CT_f<A$. 事实上,由(4.4)式和中值定理可以看到

$$2rr_1T_f\leqslant rr_1[\frac{1}{\mu_d+e+r}\int_0^h f(\tau)(e^{(\mu_d+e+r)\tau}-1)\mathrm{d}\tau+T_f]<2,$$

即 $rr_1T_f<1$. 所以

$$rr_1aI^*U'(S^*)T_f<aI^*U'(S^*)<\mu_d+aI^*U'(S^*).$$

从而

$$CT_f<A.$$

由定理 3.1, E^* 是局部渐近稳定的. 又因 E^* 是全局吸引的,故 E^* 是全局渐近稳定的。 ▌

当时滞 τ 是确定时滞时,有下列结论

推论 4.1 若下列条件成立

i) $\mu_d+e+r<a$, $S_0>\mu_d S^*$;

ii) 时滞 τ 满足

$$r_1[\tau^*+\tau]<\frac{2}{r}, \tag{4.13}$$

其中

$$\tau^*=\frac{1}{\mu_d+e+r}(e^{(\mu_d+e+r)\tau}-1),$$

则正平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

5 无病平衡点 E_0 的全局稳定性

现在我们来考察疾病消失平衡点 $E_0(\bar{S}, 0)$ 的稳定性,其中 $\bar{S}=\frac{S_0}{\mu_d}$. 我们有下面的定理

定理 5.1 当 $\mu_d+e+r>a$ 时,疾病消失平衡点是全局渐近稳定的.

证 令

$$x(t)=S(t)-\bar{S}, \qquad \xi(x(t))=U(x(t)+\bar{S})-U(\bar{S}),$$

由假设(2.2), $-\bar{S}\leqslant x(t)<+\infty$, $-U(\bar{S})\leqslant\xi(x(t))<1-U(\bar{S})$, 此时系统(2.1)即

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-a\xi(x(t))I(t)-aU(\bar{S})I(t)-\mu_d x(t)+rr_1\int_0^h f(\tau)I(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \dot{I}(t)=aI(t)\xi(x(t))+I(t)[-(\mu_d+e+r)+aU(\bar{S})].\end{cases}\tag{5.1}$$

由系统(5.1)的第二个方程,可以看到

$$\begin{aligned}\dot{I}(t)&=aI(t)\xi(x(t))+I(t)[-(\mu_d+e+r)+aU(\bar{S})]\\ &\leqslant a(i-U(\bar{S}))I(t)+[-(\mu_d+e+r)+aU(\bar{S})]I(t)\\ &=[a-(\mu_d+e+r)]I(t).\end{aligned}$$

当 $a<\mu_d+e+r$ 时, $I(t)\leqslant I(t_0)\exp\{[a-(\mu_d+e+r)](t-t_0)\}$. 所以当 $t\rightarrow+\infty$时, $I(t)\rightarrow 0$.

由系统(2.1) 的第二个方程,我们有

$$\dot{I}(t)\geqslant-(\mu_d+e+r)I(t).$$

从 $t-\tau$ 到 t 对此不等式两边积分得

$$I(t-\tau)\leqslant I(t)e^{(\mu_d+e+r)\tau}.$$

由系统 (5.1) 的第一个方程,我们有

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&\leqslant-a[\xi(x(t))+U(\bar{S})]I(t)-\mu_d x(t)+rr_1\int_0^h f(\tau)e^{(\mu_d+e+r)\tau}I(t)\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant-u_d x(t)+rr_1e^{(\mu_d+e+r)h}I(t),\end{aligned}\tag{5.2}$$

由(5.2)式可知:当 $I(t)\rightarrow 0$ 时, $x(t)\rightarrow 0$. 所以当 $\mu_d+e+r>a$ 时,疾病消失平衡点是全局渐近稳定的. ▌

参 考 文 献

[1] Cooke K L, Yorke J A. Some equations modeling growth processes and gonorrhea epidemics. Math Biosci, 1973, **16**(1): 75−101

[2] Greenberg J M, Hoppensteadt F. Asymptotic behavior of solutions to a population equation. SIAM J PPL Math, 1975, **28**(4): 662−674

[3] Herthcote H W, Van Driessche P. Two SIS epidemiologic models with delays. J Math Biol, 2000, **40**(1): 3−26

[4] Herthcote H W, Van Driessche P. An SIS epidemic model with variable population size and a delay. J Math Biol, 1995, **34**(2): 177−194

[5] Cooke K L. Stability analysis for a vector disease model. Rocky Mount J Math, 1979, **9**(1): 31−42

[6] Beretta E, Capsso V, Rinldi F. Global stability results for a generalized Lotka-Volterra system with distributed delays. J Math Biol, 1988, **26**(4): 661−688

[7] Bruer F. Models for the spread of universally fatal diseases. J Math Biol, 1990, **28**(3): 451—462

[8] Brauer F. Models for universally fatal diseases, II. Differential Equtions Models in Biology, Epidemiology and Ecology. Lecture Notes in Biomathematics 92, In: Busenberg S, Martelli M, eds. Berlin: Springer-Verlag; New York: Heidelberg, 1991. 57—69

[9] Hethcote H W, Stech H W, Van Driessche P. Periodicity and stability in epidemic models: a survey. Differential Equations and Applications in Ecology, Epidemics and Population Problems. In: Busenberg S N, Cooke K L, eds. New York: Academic Press, 1981. 65—82

[10] Goplsamy. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992

[11] Yuan Sanling, Ma Zhien, Zhen Jin. Persistence and periodic solution on a nonautonomous SIS model with delays. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, **19**(1):1—10

[12] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 1993

Global Stability on an SIS Epidemic Model with Time Delays

Yuan Sanling[1] Ma Zhien[2] Han Maoan[3]

([1]*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093)

([2]*Department of Applied Mathematics, Xi′an Jiaotong University, Xi′an* 710049)

([3]*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract: In this paper, the authors study an SIS epidemic model with a finite distributed time delay, by means of Liapunov functional, some sufficient conditions of global stability to endemic equilibrium and disease free equilibrium have been obtained. The influence of time delay on the stability of equilibria is displayed.

Key words: Time delay; Liapunov functional; Endemic equilibrium; Disease free equilibrium; Global stability.

MR(2000) Subject Classification: 45J05; 92D30