2005,**25A**(4):482－488

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一类两点边值问题的多重非负解*

程建纲

(烟台大学数学系　烟台 264005)

摘要:该文考虑两点边值问题 $[1/q(t)][q(t)y'(t)]'+p(t)f(y(t))=0,\lambda_1 y(\alpha)-\lambda_2 y'(\alpha)=0$, $y(\beta)=B$ 非负解的存在性,其中 $p(t)$ 可能在 $t=\alpha$ 或 $t=\beta$ 附近具有奇异性,$f(0)\geqslant 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)/y=+\infty$,并且存在 $y>0$,使得 $f(y)<0$.

关键词:边值问题;非负解;存在性.

MR(2000)主题分类:34B15　　**中图分类号**:O175.8　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)04-482-07

本文考虑非线性两点边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q(t)}[q(t)y'(t)]'+p(t)f(y(t))=0,\quad \alpha<t<\beta,\\&\lambda_1 y(\alpha)-\lambda_2 y'(\alpha)=0,\quad y(\beta)=B,\end{aligned}\qquad P(\lambda_1,\lambda_2,B)$$

的非负解存在性,其中 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2>0,B\geqslant 0$.

由于广泛的应用背景,近年来对此类问题的研究一直持续不断,特别是对 $p(t)f(y)$ 是非负函数并且 $B=0$ 的情形,应用上下解方法和不动点定理已获得了许多结论[1-11]. 文[1]针对环形区域上的半线性椭圆方程的径向解问题,对 $\alpha>0,\lambda_1=1,\lambda_2=0,q(t)=[t/\alpha]^{n-1}$, $p(t)\equiv 1$, $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是非负的局部 Lipschitz 连续函数,并且满足条件

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)/y=+\infty,\qquad \lim_{m\to 0+}\frac{1}{m^2}\int_0^m f(y)\mathrm{d}y=0$$

的情形,证明了存在 $B^*>0$,使得当 $0<B<B^*$ 时边值问题 $P(1,0,B)$ 至少存在两个非负解,当 $B=B^*$ 时 $P(1,0,B)$ 至少存在一个非负解,而当 $B>B^*$ 时 $P(1,0,B)$ 不存在非负解.

本文的主要内容是对 f 不满足非负性假设并且 $p(t)$ 可能在 $t=\alpha$ 或 $t=\beta$ 附近具有奇异性的情形考虑类似的结论. 假设 q,p,f 满足以下条件:

(H_1) $q:[\alpha,\beta]\to(0,\infty)$ 是取正值的连续可微函数,

(H_2) $p:(\alpha,\beta)\to[0,\infty)$ 是非负连续函数,$0<\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t<\infty$,

(H_3) $f:[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 是连续函数,$f(0)\geqslant 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)/y=+\infty$,并且存在 $y>0$,使得 $f(y)<0$,

(H_4) f 在 $[0,\infty)$ 上是局部 Lipschitz 连续函数的.

其主要结论是

定理 1　若 q,p,f 满足条件 $(H_1)-(H_4)$,则对任意给定的 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2>0$,存在 $B(\lambda_1,\lambda_2)>0$,使得当 $0\leqslant B<B(\lambda_1,\lambda_2)$ 时 $P(\lambda_1,\lambda_2,B)$ 至少存在两个非负解,当 $B=B$

收稿日期:2003-12-18;修订日期:2004-11-22

* 基金项目:国家自然科学基金(10071066;10251002)和山东省自然科学基金(Y2002A10)资助

(λ_1, λ_2)时 $P(\lambda_1, \lambda_2, B)$至少存在一个非负解，而当 $B>B(\lambda_1, \lambda_2)$时 $P(\lambda_1, \lambda_2, B)$不存在非负解.

为了给出定理 1 的证明，我们需要一些预备结论. 在本文的以下引理中，恒假设 q, p, f 满足条件$(H_1)-(H_4)$，并且当 $y<0$ 时取 $f(y)=f(0)$，同时记

$$Y=\{y\in C^1[\alpha,\beta]\cap C^2(\alpha,\beta):[q(t)y'(t)]'+q(t)p(t)f(y(t))=0,\ \alpha<t<\beta\},$$

$$Y_+=\{y\in Y: y(t)\geqslant 0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\},$$

$$C_0=[\max_{t\in[\alpha,\beta]}q(t)][\min_{t\in[\alpha,\beta]}q(t)]^{-1}. \tag{1}$$

由条件(H_2)，设 $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$ 满足 $\min\limits_{t\in[\alpha_1, \beta_1]} p(t)>0$. 又由条件$(H_3)$，取 $M_0>0$ 使得

$$-f(z)<M_0,\qquad z\in[0,\infty). \tag{2}$$

引理 1 存在 $M_1>0$ 使得对任意的 $y\in Y_+$ 成立 $\max\limits_{t\in[\alpha_1,\beta_1]} y(t)\leqslant M_1$.

证 记 $\rho=\max\limits_{t\in[\alpha_1, \beta_1]} q(t)$,

$$g(z)=\min_{t\in[\alpha_1, \beta_1]}([q(t)]^2\ p(t)f(z)),\quad z\geqslant 0. \tag{3}$$

由条件(H_3)可知 $\lim\limits_{z\to+\infty} g(z)/z=+\infty$. 由此取 $M_1>m>0$ 满足

$$\text{当 } z\geqslant m \text{ 时 } g(z)\geqslant 2h_1 z,\quad \int_m^{M_1} g(z)\mathrm{d}z\geqslant h_2+\int_0^m |g(z)|\mathrm{d}z, \tag{4}$$

其中

$$h_1=[\frac{4\pi\rho}{\sqrt{2}(\beta_1-\alpha_1)}]^2,\quad h_2=[\frac{8m\rho}{\sqrt{2}(\beta_1-\alpha_1)}]^2.$$

显然

$$\text{当 } u\geqslant M_1,\ 0\leqslant v<u \text{ 时 } g(u)>0,\ \int_v^u g(z)\mathrm{d}z>0. \tag{5}$$

而对 $u\geqslant M_1$

$$\int_0^u[\int_v^u g(z)\mathrm{d}z]^{-1/2}\mathrm{d}v\leqslant\int_0^m[\int_m^u g(z)\mathrm{d}z-\int_v^m |g(z)|\mathrm{d}z]^{-1/2}\mathrm{d}v+\int_m^u[\int_v^u 2h_1 z\mathrm{d}z]^{-1/2}\mathrm{d}v$$

$$\leqslant\frac{m}{\sqrt{h_2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{h_1}},$$

进而

$$\rho\int_0^u[\int_v^u g(z)\mathrm{d}z]^{-1/2}\mathrm{d}v\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}(\beta_1-\alpha_1),\quad u\geqslant M_1. \tag{6}$$

现在来验证对此 $M_1>0$，引理结论成立.

否则存在 $y\in Y_+$，$\tau\in[\alpha_1,\beta_1]$ 使得 $y(\tau)=\max\limits_{s\in[\alpha_1,\beta_1]} y(s)>M_1$. 显然此时

$$\text{若 } \tau\neq\alpha_1,\text{ 则 } y'(\tau)\geqslant 0;\qquad \text{若 } \tau\neq\beta_1,\text{ 则 } y'(\tau)\leqslant 0. \tag{7}$$

同时由 $y\in Y_+$ 及(3)式可知

$$[q(t)y'(t)]'=-q(t)p(t)f(y(t))\leqslant-[q(t)]^{-1}g(y(t)),\qquad t\in[\alpha_1,\beta_1]. \tag{8}$$

下面分两种情形来推得矛盾.

情形 1 $\tau\in[\alpha_1,(\alpha_1+\beta_1)/2)$. 首先来验证此时

$$y'(t)<0,\quad t\in(\tau,\beta_1). \tag{9}$$

由 $y(\tau)>M_1$ 与(5)式可得$-[q(\tau)]^{-1}g(y(\tau))<0$,由(7)式可知 $y'(\tau)\leqslant 0$. 进而利用(8)式可知存在 $\varepsilon>0$ 使的当 $t\in(\tau,\tau+\varepsilon)$时 $y'(t)<0$. 反证假设(9)式不成立，则取 $t_1=\inf\{t\geqslant\tau+\varepsilon: y'(t)=0\}\in(\tau, \beta_1)$. 由于当 $t\in(\tau,t_1)$时 $y'(t)<0$，利用(8)式可知

$$2[q(t)y'(t)]'[q(t)y'(t)]\geqslant 2g(y(t))[-y'(t)],\quad t\in(\tau,t_1).$$

进而利用(5)式，$y(\tau)>M_1$ 及 $0\leqslant y(t_1)<y(\tau)$推得

$$[q(t_1)y'(t_1)]^2 \geqslant 2\int_\tau^{t_1} g(y(s))[-y'(s)]\mathrm{d}s \geqslant 2\int_{y(t_1)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z > 0,$$

与 $y'(t_1)=0$ 矛盾，因此(9)式成立．现在利用(8),(9)式可以得到

$$2[q(t)y'(t)]'[q(t)y'(t)] \geqslant 2\, g(y(t))[-y'(t)], \quad t\in(\tau,\beta_1), \tag{10}$$

进而对任意的 $s\in(\tau,\beta_1)$

$$[q(s)y'(s)]^2 \geqslant 2\int_\tau^s g(y(t))[-y'(t)]\mathrm{d}t = 2\int_{y(s)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z.$$

再由(9)式可得

$$\rho[-y'(s)] \geqslant q(s)[-y'(s)] \geqslant \sqrt{2}\Big[\int_{y(s)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z\Big]^{1/2}, \quad s\in(\tau,\beta_1),$$

因此

$$\rho[-y'(s)]\Big[\int_{y(s)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z\Big]^{-1/2} \geqslant \sqrt{2}, \quad s\in(\tau,\beta_1).$$

利用此式可得

$$\rho\int_{y(\beta_1)}^{y(\tau)}\Big[\int_v^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z\Big]^{-1/2}\mathrm{d}v \geqslant \sqrt{2}(\beta_1-\tau) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta_1-\alpha_1),$$

与 $y(\tau)>M_1$，$0\leqslant y(\beta_1)<y(\tau)$ 和(6)式矛盾．

情形 2　$\tau\in[(\alpha_1+\beta_1)/2,\beta_1]$．类似于情形 1，首先来验证此时

$$y'(t) > 0, \quad t\in(\alpha_1,\tau). \tag{11}$$

由 $y(\tau)>M_1$ 与(5)式可得 $g(y(\tau))>0$，进而由(7)式与(8)式可知存在 $\varepsilon>0$ 使的当 $t\in(\tau-\varepsilon,\tau)$ 时 $y'(t)>0$．假若(11)式不成立，则取 $t_2=\sup\{t\leqslant\tau-\varepsilon: y'(t)=0\}\in(\alpha_1,\tau)$．由于当 $t\in(t_2,\tau)$ 时 $y'(t)>0$，利用(8)式可知

$$-2[q(t)y'(t)]'[q(t)y'(t)] \geqslant 2\, g(y(t))y'(t), \quad t\in(t_2,\tau).$$

进而利用(5)式，$y(\tau)>M_1$ 及 $0\leqslant y(t_2)<y(\tau)$ 推得

$$[q(t_2)y'(t_2)]^2 \geqslant [q(\tau)y'(\tau)]^2 + 2\int_{t_2}^{\tau} g(y(s))y'(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\int_{y(t_2)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z > 0,$$

与 $y'(t_2)=0$ 矛盾，因此(11)式成立．现在利用(8),(11)式可以得到

$$-2[q(t)y'(t)]'[q(t)y'(t)] \geqslant 2g(y(t))y'(t), \quad t\in(\alpha_1,\tau). \tag{12}$$

进而对任意的 $s\in(\alpha_1,\tau)$

$$[q(s)y'(s)]^2 \geqslant 2\int_s^\tau g(y(t))y'(t)\mathrm{d}t = 2\int_{y(s)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z,$$

再由(11)式可知

$$\rho\, y'(s)\Big[\int_{y(s)}^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z\Big]^{-1/2} \geqslant \sqrt{2}, \quad s\in(\alpha_1,\tau).$$

进而得到

$$\rho\int_{y(\alpha_1)}^{y(\tau)}\Big[\int_v^{y(\tau)} g(z)\mathrm{d}z\Big]^{-1/2}\mathrm{d}v \geqslant \sqrt{2}(\tau-\alpha_1) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta_1-\alpha_1),$$

与 $y(\tau)>M_1$，$0\leqslant y(\alpha_1)<y(\tau)$ 和(6)式矛盾．

最后综合以上两种情形可知对此 $M_1>0$，引理 1 结论成立． ▌

引理 2　存在 $M>0$ 使得对任意的 $y\in Y_+$ 成立

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} y(t) \leqslant M, \quad \max_{t\in[\alpha,\beta]} |y'(t)| \leqslant M.$$

证　设 C_0，M_0 分别由(1),(2)式给出，$M_1>0$ 由引理 1 给出．记

$$C_1 = C_0 M_1(\beta_1-\alpha_1)^{-1}, \quad C_2 = C_0\int_\alpha^\beta p(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

$$M_2 = M_1 + C_1(\beta-\alpha) + M_0(\beta-\alpha)C_2.$$

则对任意的 $y \in Y_+$，由引理 1 及微分中值定理可知存在 $\tau \in (\alpha_1, \beta_1)$ 使得

$$|y'(\tau)| = |y(\beta_1) - y(\alpha_1)|(\beta_1 - \alpha_1)^{-1} \leqslant M_1(\beta_1 - \alpha_1)^{-1}, \quad y(\tau) \leqslant M_1.$$

进而由(1),(2)式可知当 $t \in [\tau, \beta]$ 时

$$\begin{aligned} y(t) &= y(\tau) + q(\tau)y'(\tau)\int_\tau^t \frac{\mathrm{d}s}{q(s)} - \int_\tau^t \frac{1}{q(s)}\int_\tau^s q(\eta)p(\eta)f(y(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_1 + C_1(\beta - \alpha) + M_0(\beta - \alpha)C_2 = M_2, \end{aligned}$$

当 $t \in [\alpha, \tau]$ 时

$$\begin{aligned} y(t) &= y(\tau) - q(\tau)y'(\tau)\int_t^\tau \frac{\mathrm{d}s}{q(s)} - \int_t^\tau \frac{1}{q(s)}\int_s^\tau q(\eta)p(\eta)f(y(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_1 + C_1(\beta - \alpha) + M_0(\beta - \alpha)C_2 = M_2. \end{aligned}$$

又由

$$y'(t) = \frac{q(\tau)y'(\tau)}{q(t)} - \frac{1}{q(t)}\int_\tau^t q(\eta)p(\eta)f(y(\eta))\mathrm{d}\eta, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

可知

$$|y'(t)| \leqslant C_1 + C_2 \max_{z \in [0, M_2]} |f(z)|, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

由此推得引理结论成立. ▌

下面的简单引理表明虽然 $p(t)$ 可能在 $t = \alpha$ 或 $t = \beta$ 附近具有奇异性，但此时相应的 Gronwall 不等式仍然成立.

引理 3 设 $k_1, k_2 \geqslant 0$. 若 ϕ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的非负连续函数，满足

$$\phi(t) \leqslant k_1 + k_2\int_\alpha^t p(\eta)\phi(\eta)\mathrm{d}\eta, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

则

$$\phi(t) \leqslant k_1 \exp[k_2\int_\alpha^t p(\eta)\mathrm{d}\eta], \quad t \in [\alpha, \beta].$$

下面利用引理 3 对 $p(t)$ 可能在 $t = \alpha$ 或 $t = \beta$ 附近具有奇异性，但满足条件 (H_2) 的情形给出关于初值问题的相应结论.

引理 4 对任意给定的 $(A, \xi) \in [0, \infty) \times (-\infty, \infty)$，存在唯一的 $\Phi_\alpha(A, \xi) \in Y$ 满足 $\Phi_\alpha(A, \xi)(\alpha) = A$, $\Phi_\alpha(A, \xi)'(\alpha) = \xi$. 进一步, $\Phi_\alpha(A, \xi)(\beta)$ 与 $\Phi_\alpha(A, \xi)'(\beta)$ 关于 (A, ξ) 在 $[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上是连续的.

证 仅需对任意给定的 $K > 0$，对 $(A, \xi) \in [0, K] \times [-K, K]$ 的情形考虑此引理的结论. 设 C_0，M_0 分别由(1),(2)式给出. 记

$$M_3 = K + C_0 K(\beta - \alpha) + M_0 C_0(\beta - \alpha)\int_\alpha^\beta p(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{13}$$

由条件 (H_4) 取 $m > 0$，使得

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant m|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in [0, M_3]. \tag{14}$$

定义

$$g(z) = \begin{cases} f(M_3), & z > M_3, \\ f(z), & z \leqslant M_3. \end{cases} \tag{15}$$

考虑到当 $z < 0$ 时 $g(z) = f(z) = f(0)$，因而 $\sup\limits_{z \in (-\infty, \infty)} |g(z)| = \max\limits_{z \in [0, M_3]} |f(z)|$. 由此利用 Schauder 不动点定理不难验证对任意给定的 $(A, \xi) \in [0, K] \times [-K, K]$，积分方程

$$y(t) = A + q(\alpha)\xi\int_\alpha^t \frac{\mathrm{d}s}{q(s)} - \int_\alpha^t \frac{1}{q(s)}\int_\alpha^s q(\eta)p(\eta)g(y(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s, \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{16}$$

存在解 $y \in C[\alpha, \beta]$，并且由(1),(2),(13)和(15)式可知

$$y(t) \leqslant K + C_0 K(\beta - \alpha) + M_0 C_0(\beta - \alpha)\int_\alpha^\beta p(\eta)\mathrm{d}\eta = M_3, \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{17}$$

由此可见 y 也是积分方程

$$y(t)=A+q(\alpha)\xi\int_\alpha^t\frac{\mathrm{d}s}{q(s)}-\int_\alpha^t\frac{1}{q(s)}\int_\alpha^s q(\eta)p(\eta)f(y(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s,\quad t\in[\alpha,\beta]\tag{18}$$

的解. 进而对任意给定的 $(A,\xi)\in[0,K]\times[-K,K]$，积分方程(18)存在解 $y\in C[\alpha,\beta]$. 其次，若 $y\in C[\alpha,\beta]$ 是积分方程(18)的解，则由条件 $(H_1)-(H_3)$ 可知 $y\in Y$，并且 $y(\alpha)=A$，$y'(\alpha)=\xi$. 另一方面，对任意的 $(A_1,\xi_1),(A_2,\xi_2)\in[0,K]\times[-K,K]$，若 y_1，$y_2\in Y$ 分别是积分方程(18)当 $(A,\xi)=(A_1,\xi_1)$ 与 $(A,\xi)=(A_2,\xi_2)$ 时的解，则由(1)，(2)和(13)式可知

$$y_i(t)\leqslant M_3,\quad t\in[\alpha,\beta],\ i=1,2.\tag{19}$$

进而由(1)，(14)，(18)式推得对任意的 $t\in[\alpha,\beta]$，

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant|A_1-A_2|+|\xi_1-\xi_2|C_0(\beta-\alpha)+C_0(\beta-\alpha)m\int_\alpha^t p(\eta)|y_1(\eta)-y_2(\eta)|\mathrm{d}\eta,$$

$$|y_1'(t)-y_2'(t)|\leqslant|\xi_1-\xi_2|C_0+C_0m\int_\alpha^t p(\eta)|y_1(\eta)-y_2(\eta)|\mathrm{d}\eta.$$

又利用引理 3 可知对任意的 $t\in[\alpha,\beta]$，

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant[|A_1-A_2|+|\xi_1-\xi_2|C_0(\beta-\alpha)]\exp[C_0(\beta-\alpha)m\int_\alpha^t p(\eta)\mathrm{d}\eta].$$

最后综合以上讨论可知对任意给定的 $(A,\xi)\in[0,K]\times[-K,K]$，存在唯一的 $\Phi_\alpha(A,\xi)\in Y$ 满足 $\Phi_\alpha(A,\xi)(\alpha)=A,\Phi_\alpha(A,\xi)'(\alpha)=\xi$. 并且 $\Phi_\alpha(A,\xi)(\beta)$ 与 $\Phi_\alpha(A,\xi)'(\beta)$ 关于 (A,ξ) 在 $[0,K]\times[-K,K]$ 上是连续的.

用完全类似的方法可以证明如下的引理 5.

引理 5 对任意给定的 $(B,\eta)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$，存在唯一的 $\Phi_\beta(B,\eta)\in Y$ 满足 $\Phi_\beta(B,\eta)(\beta)=B,\Phi_\beta(B,\eta)'(\beta)=\eta$. 进一步，$\Phi_\beta(B,\eta)(\alpha)$ 与 $\Phi_\beta(B,\eta)'(\alpha)$ 关于 (B,η) 在 $[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ 上是连续的.

引理 6 若 $\xi\leqslant0$，则 $\Phi_\alpha(0,\xi)(\beta)\leqslant0$.

证 由于当 $z\leqslant0$ 时 $f(z)=f(0)\geqslant0$，因此结合引理 4 不难验证当 $\xi\leqslant0$ 时

$$\Phi_\alpha(0,\xi)(t)=q(\alpha)\xi\int_\alpha^t\frac{\mathrm{d}s}{q(s)}-\int_\alpha^t\frac{1}{q(s)}\int_\alpha^s q(\eta)p(\eta)f(0)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s,\quad t\in[\alpha,\beta],\tag{20}$$

特别 $\Phi_\alpha(0,\xi)(\beta)\leqslant0$. ▎

引理 7 若 $y\in Y$，$y(\alpha)\geqslant0$ 并且 $y(\beta)\geqslant0$，则 $y\in Y_+$.

证 否则取 $\tau\in(\alpha,\beta)$ 使得 $y(\tau)=\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]}y(t)<0$. 记 $t_1=\sup\{t<\tau:y(t)\geqslant0\}$. 由于当 $t\in(t_1,\tau)$ 时 $y(t)<0$，因此当 $t\in(t_1,\tau)$ 时 $[q(t)y'(t)]'=-q(t)p(t)f(y(t))=-q(t)p(t)\cdot f(0)\leqslant0$. 结合 $y'(\tau)=0$ 可知当 $t\in(t_1,\tau)$ 时 $y'(t)\geqslant0$，与 $y(t_1)=0$，$y(\tau)<0$ 矛盾. ▎

引理 8 设 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant0$，$\lambda_1+\lambda_2>0$. 若 $B_n\geqslant0$，$P(\lambda_1,\lambda_2,B_n)$ 存在非负解 $y_n\in Y_+$，$n=1,2,\cdots$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B_0$，则 $P(\lambda_1,\lambda_2,B_0)$ 存在非负解 $y_0\in Y_+$.

证 利用引理 2，不失一般性假设在 $C[\alpha,\beta]$ 中 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n'(\alpha)=\xi$. 由

$$y_n(t)=y_n(\alpha)+q(\alpha)y_n'(\alpha)\int_\alpha^t\frac{\mathrm{d}s}{q(s)}-\int_\alpha^t\frac{1}{q(s)}\int_\alpha^s q(\eta)p(\eta)f(y_n(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s,$$

利用 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$y_0(t)=y_0(\alpha)+q(\alpha)\xi\int_\alpha^t\frac{\mathrm{d}s}{q(s)}-\int_\alpha^t\frac{1}{q(s)}\int_\alpha^s q(\eta)p(\eta)f(y_0(\eta))\mathrm{d}\eta\mathrm{d}s,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

进而推得 $y_0\in Y_+$，$y_0'(\alpha)=\xi$. 最后结合

$$\lambda_1y_0(\alpha)-\lambda_2y_0'(\alpha)=\lim_{n\to\infty}[\lambda_1y_n(\alpha)-\lambda_2y_n'(\alpha)]=0,$$

$$y_0(\beta)=\lim_{n\to\infty}y_n(\beta)=\lim_{n\to\infty}B_n=B_0$$

可知 $y_0\in Y_+$ 是 $P(\lambda_1,\lambda_2,B_0)$的非负解. ▌

定理 1 的证明 对给定的 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$, $\lambda_1+\lambda_2>0$.

第一步，首先来说明存在 $B>0$，使得 $P(\lambda_1,\lambda_2,B)$存在非负解. 由条件(H_3)，取 $m_0>0$ 满足 $f(m_0)=0$. 记

$$\phi_1(h)=\lambda_1\Phi_\beta(m_0+h,0)(\alpha)-\lambda_2\Phi_\beta(m_0+h,0)'(\alpha),\quad h\geqslant 0. \tag{21}$$

由 $\Phi_\beta(m_0,0)(t)\equiv m_0$ 可知 $\phi_1(0)=\lambda_1 m_0\geqslant 0$. 又由引理 2 和引理 7 可知当 h 充分大时 $\Phi_\beta(m_0+h,0)(\alpha)<0$. 记

$$h_1=\inf\{h>0: \Phi_\beta(m_0+h,0)(\alpha)<0\}. \tag{22}$$

假若 $\Phi_\beta(m_0+h_1,0)'(\alpha)\leqslant 0$，则由引理 6 可知 $\Phi_\alpha(0,\Phi_\beta(m_0+h_1,0)'(\alpha))(\beta)\leqslant 0$. 另一方面，由 $\Phi_\beta(m_0+h_1,0)(\alpha)=0$ 可知

$$\Phi_\alpha(0,\Phi_\beta(m_0+h_1,0)'(\alpha))(\beta)=\Phi_\beta(m_0+h_1,0)(\beta)=m_0+h_1>0,$$

推得矛盾. 因此 $\Phi_\beta(m_0+h_1,0)'(\alpha)>0$ 成立. 进而推得 $\phi_1(h_1)\leqslant 0$. 由此取 $h_2\in[0,h_1]$满足

$$0=\phi_1(h_2)=\lambda_1\Phi_\beta(m_0+h_2,0)(\alpha)-\lambda_2\Phi_\beta(m_0+h_2,0)'(\alpha). \tag{23}$$

而由(22)式可知 $\Phi_\beta(m_0+h_2,0)(\alpha)\geqslant 0$. 结合 $\Phi_\beta(m_0+h_2,0)(\beta)=m_0+h_2>0$，利用引理 7 推得 $\Phi_\beta(m_0+h_2,0)\in Y_+$ 是 $P(\lambda_1,\lambda_2,m_0+h_2)$的非负解.

第二步，由第一步的讨论，取

$$B(\lambda_1,\lambda_2)=\sup\{B>0: P(\lambda_1,\lambda_2,B)\ \text{存在非负解}\}. \tag{24}$$

由于 $P(\lambda_1,\lambda_2,B)$的非负解一定在 Y_+ 中，因此利用引理 2 和引理 8 可知 $B(\lambda_1,\lambda_2)<\infty$ 并且 $P(\lambda_1,\lambda_2,B(\lambda_1,\lambda_2))$存在非负解 $y_0\in Y_+$.

第三步，首先引理 6 表明 $\Phi_\alpha(0,0)(\beta)\leqslant 0$. 因此由 $\Phi_\alpha(y_0(\alpha),y_0'(\alpha))(\beta)=y_0(\beta)=B(\lambda_1,\lambda_2)>0$ 推得$(y_0(\alpha),y_0'(\alpha))\neq(0,0)$. 记

$$\phi_2(h)=\Phi_\alpha(hy_0(\alpha),hy_0'(\alpha))(\beta),\quad h\geqslant 0. \tag{25}$$

则 $\phi_2(0)=\Phi_\alpha(0,0)(\beta)\leqslant 0$，并且由引理 2 和引理 7 可知当 h 充分大时 $\phi_2(h)<0$. 进而利用 $\phi_2(1)=y_0(\beta)=B(\lambda_1,\lambda_2)>0$ 可知对任意给定的 $B\in[0,B(\lambda_1,\lambda_2))$存在 $h_3\in[0,1)$, $h_4>1$ 使得 $\phi_2(h_3)=\phi_2(h_4)=B$. 最后由引理 7 可知 $\Phi_\alpha(h_3y_0(\alpha),h_3y_0'(\alpha))$与 $\Phi_\alpha(h_4y_0(\alpha),h_4y_0'(\alpha))$是 $P(\lambda_1,\lambda_2,B)$的两个非负解，进而定理 1 结论成立. ▌

参 考 文 献

[1] Hai D D. Positive solutions for semilinear elliptic equations in annular domains. Nonlinear Anal, 1999, **37**(8):1051－1058

[2] Anuradha V, Hai D D, Shivaji R. Existence results for superlinear semipositone boundary value problems. Proc Amer Math Soc, 1996, **124**(3):757－763

[3] Hai D D, Shivaji R. An existence result for a class of superlinear p-Laplacian semipositone systems. Diff Integral Eqns, 2001, **14**(2):231－240

[4] Castro A, Gadam S, Shivaji R. Evolution of positive solution curves in semipositone problems with concave nonlinearities. J Math Anal Appl, 2000, **245**(1):282－293

[5] Cheng J, Zhang Z. On the existence of positive solutions for a class of singular boundary value problems. Nonlinear Anal, 2001, **44**(5):645－655

[6] Ma R. Positive solutions for semipositone $(k,n-k)$ conjugate boundary value problems. J Math Anal Appl, 2000, **252**(1):220－229

[7] Erbe L H, Mathsen R M. Positive solutions for singular nonlinear boundary value problems. Nonlinear Anal, 2001, **46**(7):979－986

[8] Jiang D. Multiple positive solutions to singular boundary value problems for superlinear second order ODES. Acta Math Scientia, 2002, **22**B(2):199－206

[9] Maatoug L. On the existence of positive solutions of a singular nonlinear eigenvalue problem. J Math Anal Appl, 2001, **261**(1):192-204

[10] 程建纲. 一类 Dirichlet 边值问题的正解存在性. 数学学报, 2002, **45**(2):301-306

[11] 姚庆六. 方程 $\Delta u+g(|X|)f(u)=0$ 的环上 Dirichlet 边值问题的正对径解. 数学物理学报, 2000, **20**(3):414-418

Multiple Nonnegative Solutions for a Class of Two-point Boundary Value Problems

Cheng Jiangang

(*Department of Mathematics*, *Yantai University*, *Yantai* 264005, *China*)

Abstract: This paper deals with the existence of nonnegative solutions to two-point boundary value problems $[1/q(t)][q(t)y'(t)]'+p(t)f(y(t))=0, \lambda_1 y(\alpha)-\lambda_2 y'(\alpha)=0$ and $y(\beta)=B$, where $p(t)$ may be singular at $t=\alpha$ or $t=\beta$, $f(0)\geqslant 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)/y=+\infty$, and there exists $y>0$ such that $f(y)<0$.

Key words: Boundary value problem; Nonnegative solution; Existence.

MR(2000) Subject Classification: 34B15