Mathematica Acta Scientia
数学物理学报

2009,**29A**(4):843–857

http://actams.wipm.ac.cn

一类时滞方程的谱与解展开 *

王雷　许跟起
(天津大学数学系　天津 300072)

摘要：该文研究一类时滞方程解的展开问题. 研究的模型来自于实际高精密切割过程中具有时间延迟的机床振动问题. 对此模型，借助于泛函分析方法，将其写成抽象发展方程. 对系统确定的算子给出了较细致的谱分析，得到本征值的渐近表达式. 同时证明相应的本征向量不能构成状态空间基，但给出方程解的展开式.

关键词：时滞方程； C_0 半群；谱分析；解展开.

MR(2000) 主题分类：39B99; 47D99; 93D20　**中图分类号**：O175.7　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)04-843-15

1　引言

在实际工程的大量控制与反馈中，时滞现象是广泛存在的. 对于时滞方程，已有众多学者和专家研究，并有许多专著出版，比如文献 [1–2]. 到目前仍有许多文献在研究时滞方程，包括时滞系统的控制与解的数值计算，并不断有好的研究成果出现，如文献 [3–7] 及其后的参考文献. 我们注意到，目前研究主要集中在系统的稳定性和解的存在性上，比如周期解的存在性 [8–10], 而对解的结构特别是方程解的展开性质研究较少，而解的定量分析以及解的展开，在实际问题的计算方面又起着重要的作用. 因此对解进行定量分析，研究解的展开性质具有重要的意义.

本文主要研究时滞方程解的展开问题. 研究的模型来源于实际问题，它是高精密切割过程中具有时间延迟的机床振动问题 [11]. 问题本身是一个非线性问题，在适当的线性化后，系统的行为由如下方程描述

$$\ddot{u}(t)+2k\dot{u}(t)+\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)u(t)=\frac{k_s}{m}u\Big(t-\frac{2\pi}{N}\Big),$$

其中 $u(t)$ 表示相应振荡模的方向， k,α,k_s,m,N 都是一些物理参数，具体的意义参考文献 [11]. 文献 [11] 研究了系统的稳定性问题，这里主要研究系统所确定的算子的谱以及解的展开问题. 对此方程，我们首先将其写成发展方程的形式，然后利用半群理论建立方程的适定性，进一步研究系统算子的谱性质，最后给出解的展开.

本文内容安排如下：第二节，二阶时滞微分方程化成发展方程，利用半群理论得到系统的等价性与适定性；第三节，对系统算子进行详细的谱分析，这里我们借助于文献 [12] 中

收稿日期：2007-12-30; 修订日期：2009-05-26

E-mail: thunder@tju.edu.cn; gqxu@tju.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (60474017) 资助

计算函数零点的方法，给出算子本征值的渐近表达式；第四节，研究系统算子特征向量的性质，并证明本征向量列不能构成状态空间的基；第五节，给出系统方程解的展开形式．尽管本文的工作是对具体的方程进行，但所用方法可用于一般时滞方程解的展开研究．

2 方程的适定性

本节我们建立方程的适定性结果．先回顾方程

$$\ddot{u}(t)+2k\dot{u}(t)+\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)u(t)=\frac{k_s}{m}u\Big(t-\frac{2\pi}{N}\Big). \tag{2.1}$$

令 $x_1(t)=u(t)$, $x_2(t)=\dot{u}(t)$, $\tau=\frac{2\pi}{N}$, 记

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T,$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(\alpha^2+\dfrac{k_s}{m}) & -2k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{k_s}{m} & 0\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

将二阶微分方程 (2.1) 写成一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(\alpha^2+\dfrac{k_s}{m}) & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{k_s}{m} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-\tau)\\ x_2(t-\tau)\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+Bx(t-\tau).$$

设系统的初值为

$$x(0)=x_0,\quad x(s)=\varphi(s),\quad s\in[-\tau,0),$$

则系统 (2.1) 可写成标准的时滞微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau),\\ x(0)=x_0,\\ x(s)=\varphi(s),\ s\in[-\tau,0).\end{cases} \tag{2.3}$$

明显地，方程 (2.1) 与方程 (2.3) 等价．

设函数 $y(t,s)=x(t+s), s\in[-\tau,0]$, 易见 $y(0,s)=x(s)=\varphi(s)$, $y(t,-\tau)=x(t-\tau)$ 且有 $\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}=\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}$. 于是方程 (2.3) 可写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+By(t,-\tau),\\ \dfrac{\partial y(t,s)}{\partial t}=\dfrac{\partial y(t,s)}{\partial s},\\ x(0)=x_0,\\ y(0,s)=\varphi(s),\ s\in[-\tau,0).\end{cases} \tag{2.4}$$

设空间为

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^2\times L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^2),$$

其上的内积定义为

$$[X,Y]_{\mathcal{H}}=(x,y)_{\mathbb{C}^2}+\int_{-\tau}^{0}(f(s),g(s))_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s,\quad X=(x,f(s))^T,\ Y=(y,g(s))^T\in\mathcal{H}. \tag{2.5}$$

显然 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间.

在 $\mathcal{H}$ 中定义算子 $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x\\ y(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\delta_\tau\\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y(s)\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

其中 $\delta_\tau y=y(-\tau)$, 算子 $\mathcal{A}$ 的定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\{(x,y(s))^T\in\mathcal{H}\ \big|\ y'\in L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^2),y(0)=x\}. \tag{2.7}$$

令 $X(t)=(x(t),y(t,s))^T$, $X_0=(x_0,\varphi(s))^T$, 那么 (2.4) 式可写成 $\mathcal{H}$ 中的发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}X(t),\\ X(0)=X_0.\end{cases} \tag{2.8}$$

明显地，下面结果成立.

定理 2.1 方程 (2.3) 和 (2.8) 是等价的，即方程 (2.3) 可解的充要条件是方程 (2.8) 可解.

直接验证可知，算子 $\mathcal{A}$ 具有下面性质.

定理 2.2 由 (2.6) 和 (2.7) 式定义的算子 $\mathcal{A}$ 是空间 $\mathcal{H}$ 中的闭稠定算子.

定理 2.3 空间 $\mathcal{H}$ 上存在一个与 $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ 等价的内积，记为 $[\cdot,\cdot]_1$, 使得对某个 $M>0$, 由 (2.6) 和 (2.7) 式定义的算子 $\mathcal{A}$ 在内积 $[\cdot,\cdot]_1$ 下，满足

$$\Re[\mathcal{A}X,X]_1\le M[X,X]_1,\quad \forall X\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

因此 $\mathcal{A}-MI$ 为耗散算子.

证 考虑等价内积

$$[X,Y]_1=(x_1,x_2)_{\mathbb{C}^2}+\int_{-\tau}^{0}q(s)(y_1(s),y_2(s))_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s,$$

其中 $X=(x_1,y_1(s))^T,Y=(x_2,y_2(s))^T$, 而 $q(s)$ 是待定的正标量函数.

我们只需证明对某个 $M>0$, 任给的 $X=(x,y(s))^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 都满足

$$\Re[\mathcal{A}X,X]_1\le M[X,X]_1,\quad \forall X\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

不妨设 $X=(x,y(s))^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是实的，那么

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}X,X]_1&=(Ax+B\delta_\tau y,x)_{\mathbb{C}^2}+\int_{-\tau}^{0}q(s)(y'(s),y(s))_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s\\ &=(Ax,x)_{\mathbb{C}^2}+(By(-\tau),x)_{\mathbb{C}^2}+\frac{1}{2}q(s)(y(s),y(s))_{\mathbb{C}^2}\big|_{-\tau}^{0}\\ &\quad-\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}q'(s)(y(s),y(s))_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|A\|\|x\|^2+\frac{1}{2}\|B\|\|x\|^2+\frac{1}{2}\|B\|\|y(-\tau)\|^2+\frac{1}{2}q(0)\|x\|^2\\
&\quad -\frac{1}{2}q(-\tau)\|y(-\tau)\|^2-\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}q'(s)\|y(s)\|^2\mathrm{d}s\\
&=(\|A\|+\frac{1}{2}\|B\|+\frac{1}{2}q(0))\|x\|^2+\frac{1}{2}(\|B\|-q(-\tau))\|y(-\tau)\|^2\\
&\quad +\int_{-\tau}^{0}\Big(\frac{-q'(s)}{2q(s)}\Big)q(s)\|y(s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

因为 $q(s)$ 是正标量函数，所以不妨设 $q(s)>||B||$, 同时选取 $q(s)\in\mathbb{C}^1[-\tau,0]$, 使得 $|q'(s)|<M_1|2q(s)|$, $M_1>0$. 令

$$M_2=\|A\|+\frac{1}{2}\|B\|+\frac{1}{2}q(0),$$

$M=\max\{M_1,M_2\}$, 则在新的内积下，有

$$[\mathcal{A}X,X]_1\le M\Big(\|x\|^2+\int_{-\tau}^{0}q(s)\|y(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)=M[X,X]_1,$$

因此 $\mathcal{A}-MI$ 为耗散算子. ∎

定理 2.4 设算子 $\mathcal{A}$ 如 (2.6) 和 (2.7) 式所定义，对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 令

$$\Delta(\lambda)=\lambda I_2-A-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}B, \tag{2.9}$$

其中 I_2 是 $\mathbb{C}^2$ 上的单位矩阵. 则当 $\det\Delta(\lambda)\ne 0$ 时，有 $\lambda\in\rho(\mathcal{A})$, 且 $\mathcal{A}$ 的预解式是紧的，并由下式给出

$$
\begin{cases}
(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}Y=X=(x_1,y_1(s)), \quad \forall\, Y=(x_2,y_2(s))\in\mathcal{H},\\
x_1=\Delta(\lambda)^{-1}\Big(x_2+\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau+\xi)}y_2(\xi)\mathrm{d}\xi\Big),\\
y_1(s)=x_1\mathrm{e}^{\lambda s}-\displaystyle\int_{0}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(s-\xi)}y_2(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

特别地，我们有

$$\sigma(\mathcal{A})=\sigma_p(\mathcal{A})=\big\{\lambda\in\mathbb{C}\;\big|\;\det\Delta(\lambda)=0\big\}. \tag{2.11}$$

定理的证明是一个直接验证过程，这里省略证明细节.

定理 2.5 算子 $\mathcal{A}$ 生成一个 C_0 压缩半群.

上面的结论是 Lumer-Phillips 定理的直接结果 (见文献 [14]).

3 算子 $\mathcal{A}$ 的谱分析

本节我们将着重分析算子 $\mathcal{A}$ 的谱. 在定理 2.4 中我们已经表明

$$\Delta(\lambda)=\lambda I_2-A-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}B,\quad \sigma(\mathcal{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}\;|\;\det\Delta(\lambda)=0\}.$$

将矩阵 A 和 B 的具体形式代入得到

$$\Delta(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ \alpha^2+\dfrac{k_s}{m}-\dfrac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} & \lambda+2k\end{bmatrix},$$

于是

$$\det\Delta(\lambda)=\lambda^2+2k\lambda+\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)-\frac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}. \tag{3.1}$$

明显地，当 $|\lambda|\to\infty$, 有 $|\Re\lambda|\le p,\forall p>0$, $\det\Delta(\lambda)\not\to 0$, 所以在平行于虚轴的带域至多有有限个 $\mathcal{A}$ 的本征值. 下面考虑当 $\Re\lambda\to-\infty$ 时， $\det\Delta(\lambda)$ 的零点的渐近分布. $\det\Delta(\lambda)=0$ 等价于

$$\mathrm{e}^{\lambda\tau}\lambda^2\Big[1+2k\lambda^{-1}+\lambda^{-2}\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)\Big]-\frac{k_s}{m}=0.$$

因此算子 $\mathcal{A}$ 的谱的近似表达式有下式决定

$$\Big(\lambda\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\lambda}+\sqrt{\frac{k_s}{m}}\Big)\Big(\lambda\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\lambda}-\sqrt{\frac{k_s}{m}}\Big)=0.$$

为简单起见，我们统一归为求 $f(z)$ 的零点问题，

$$f(z)=z\mathrm{e}^{hz}-b, \tag{3.2}$$

其中 $h>0$, $b\in\mathbb{R}$ 且为固定常数.

下面将给出 f 零点的渐近表达式.

引理 3.1 $f(z)$ 由 (3.2) 式给出. 当 $b=-\frac{1}{h}\mathrm{e}^{-1}$ 时， $f(z)$ 有唯一的实零点 $x=-\frac{1}{h}$; 当 $b<-\frac{1}{h}\mathrm{e}^{-1}$ 时， $f(z)$ 没有实零点；当 $-\frac{1}{h}\mathrm{e}^{-1}<b<0$, $f(z)$ 具有两个实零点，且它们都是负数；当 $b>0$ 时， $f(z)$ 有且仅有一个正的实零点.

定理 3.1 设 $f(z)$ 如前定义, 则可记其零点集合为 $\Lambda=\{\lambda_n,\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup Q$, 其中 Q 是 $f(z)$ 可能的实零点的集合 (它会因 b 取值的不同而不同), 则有下面渐近展开式成立

$$\lambda_n=\frac{1}{h}(\ln|b|-\ln\omega_n)+\mathrm{i}\Big(\omega_n-\frac{\ln\omega_n}{h^2\omega_n}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad h\omega_n=\Big(2n-\frac{1}{2}\mathrm{sign}(b)\Big)\pi. \tag{3.3}$$

证 我们容易得知当 h 和 b 都是实数时，如果 $f(\lambda)=0$, 则 $f(\overline{\lambda})=0$. 所以 f 的零点关于实轴对称. 从而 $f(z)$ 的零点的集合可以写成

$$\Lambda=\big\{(\lambda_n,\overline{\lambda_n})\mid\lambda_n=x_n+\mathrm{i}y_n,\ y_n>0,n\in\mathbb{N}\big\}\bigcup Q, \tag{3.4}$$

其中 Q 是 $f(z)$ 的实零点的集合.

令 $\lambda=x+\mathrm{i}y\in\Lambda$, 且 $y>0$, 则由方程 $\lambda\mathrm{e}^{h\lambda}=b$, 我们有

$$\mathrm{e}^{hx}(x\cos hy-y\sin hy)=b,\quad \mathrm{e}^{hx}(x\sin hy+y\cos hy)=0.$$

从而

$$x=-\frac{y\cos hy}{\sin hy},\quad \mathrm{e}^{hx}=-\frac{b\sin hy}{y}, \tag{3.5}$$

因此得到

$$\ln(-b\sin hy)-\ln y+\frac{hy\cos hy}{\sin hy}=0. \tag{3.6}$$

先假设 $b>0$, 这时必有 $y\in\big(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\big)$, $n\ge 1$. 设

$$g(y)=\ln b+\ln(-\sin hy)-\ln y+\frac{hy\cos hy}{\sin hy},\quad y\in\Big(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\Big),\quad n\ge 1. \tag{3.7}$$

首先，我们来证明对所有的 $n\geq 1$，$g(y)=0$ 在每个区间 $\left(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\right)$ 内有且仅有一个解．事实上，通过简单计算我们得到

$$g'(y)=\frac{2hy\sin hy\cos hy-\sin^2 hy-h^2y^2}{y\sin^2 hy},$$

它的分子的极大值在边界 $y=\frac{2n-1}{h}\pi$ 处取得,其值为 $-(2n-1)^2\pi^2<0$. 同时分母 $y\sin^2 hy>0$, 所以

$$g'(y)<0,\quad \forall y\in\left(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\right),\quad n\geq 1, \tag{3.8}$$

且有

$$\lim_{y\to\frac{2n-1}{h}\pi} g(y)=\ln b-\ln\frac{2n-1}{h}\pi+\lim_{y\to\frac{2n-1}{h}\pi}\left[\ln(-\sin hy)+\frac{hy\cos hy}{\sin hy}\right]=+\infty. \tag{3.9}$$

由于当 $y\to\frac{2n-1}{h}\pi$ 时，$\ln(-\sin hy)$ 比 $\frac{h\cos hy}{\sin hy}$ 趋向于无穷的速度慢，所以 (3.9) 式的极限值完全由 $\frac{hy\cos hy}{\sin hy}$ 决定．同理得

$$\lim_{y\to\frac{2n}{h}\pi} g(y)=-\infty. \tag{3.10}$$

综合 (3.8)–(3.10) 三式，可以得出结论：对每个 $n\geq 1$, $g(y)=0$ 在区间 $\left(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\right)$ 内存在唯一的解 y_n. 由此可得 Λ 内有无穷多个点.

对 $y_n\in\left(\frac{2n-1}{h}\pi,\frac{2n}{h}\pi\right)$, 记 $\lambda_n=x_n+\mathrm{i}y_n$, 由于 $x_n=\frac{1}{h}\ln(-\frac{b\sin hy_n}{y_n})$, 我们有

$$\text{当 } n\to\infty\text{时},\qquad x_n\to-\infty,\ y_n\to+\infty. \tag{3.11}$$

而 (3.5) 式表明，$\mathrm{e}^{hx_n}x_n=b\cos hy_n$. 联系 (3.11) 式可知，当 $n\to\infty$ 时，$\cos hy_n\to 0$. 因此，当 $n\to\infty$ 时，有

$$y_n\to\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi. \tag{3.12}$$

令 $y_n=\frac{2n\pi-\frac{1}{2}\pi+\epsilon_n}{h}$, 则 (3.12) 式表明 $\epsilon_n\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 且当 $n\to\infty$ 时，$\epsilon_n\to 0$. 由

$$\begin{aligned}0=g(y_n)&=\ln b+\ln(-\sin hy_n)-\ln y_n+\frac{hy_n\cos hy_n}{\sin hy_n}\\&=\ln b+\ln\cos\epsilon_n-\ln y_n-\frac{hy_n\sin\epsilon_n}{\cos\epsilon_n}\end{aligned} \tag{3.13}$$

得到 $\sin\epsilon_n=\frac{(-\ln y_n+\ln b+\ln\cos\epsilon_n)\cos\epsilon_n}{hy_n}$. 所以，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sin\epsilon_n=-\frac{\ln y_n}{hy_n}+\mathcal{O}\left(n^{-1}\right)=-\frac{\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi}{(2n-\frac{1}{2})\pi}+\mathcal{O}\left(n^{-1}\right),$$

进而

$$\epsilon_n=-\frac{\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi}{(2n-\frac{1}{2})\pi}+\mathcal{O}\left(n^{-1}\right),$$

因此

$$y_n=\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi-\frac{\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi}{h(2n-\frac{1}{2})\pi}+\mathcal{O}\left(n^{-1}\right). \tag{3.14}$$

然后将 (3.14) 式代入 $x_n=\frac{1}{h}\left[\ln b+\ln(-\sin(hy_n))-\ln y_n\right]$, 得

$$x_n=\frac{1}{h}\left[\ln b-\ln\frac{2n-\frac{1}{2}}{h}\pi+\mathcal{O}\Big(\frac{\ln^2 n}{n^2}\Big)\right]. \tag{3.15}$$

同样的方法考虑 $b<0$ 的情况．最终我们得到

$$\lambda_n=\frac{1}{h}(\ln|b|-\ln\omega_n)+i\Big(\omega_n-\frac{\ln\omega_n}{h^2\omega_n}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad h\omega_n=\Big(2n-\frac{1}{2}\mathrm{sign}(b)\Big)\pi.$$ ▌

下面回到算子 $\mathcal{A}$ 谱问题．设 $\xi_{1,n}$ 为式 $\xi\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\xi}=\sqrt{\frac{k_s}{m}}$ 的零点， $\xi_{2,n}$ 为式 $\xi\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\xi}=-\sqrt{\frac{k_s}{m}}$ 的零点．令 $\lambda_{j,n}=\xi_{j,n}+\eta_{j,n}\in\sigma(\mathcal{A})$, $j=1,2$. 代入 (3.1) 式得到

$$1+\frac{2\eta_{j,n}}{\xi_{j,n}}+\frac{\eta_{j,n}^2}{\xi_{j,n}^2}+\frac{2k}{\xi_{j,n}}+\frac{2k\eta_{j,n}}{\xi_{j,n}^2}+\frac{1}{\xi_{j,n}^2}\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)=\mathrm{e}^{-\eta_{j,n}\tau},$$

由此可得 $\eta_{j,n}=O(\xi_{j,n}^{-1})$. 从而我们有下面结果．

定理 3.2 假设算子 $\mathcal{A}$ 如 (2.6) 和 (2.7) 式所定义，则 $\mathcal{A}$ 的谱只有四个渐近分支，且由下式给出

$$\sigma(\mathcal{A})=\Big\{\lambda_{j,n},\overline{\lambda_{j,n}}\mid\lambda_{j,n}=\xi_{j,n}+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N},\quad j=1,2\Big\}. \tag{3.16}$$

定理 3.3 算子 $\mathcal{A}$ 如上定义，则它的谱均为简单本征值．对任意的 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$ 相应的特征向量为

$$\Phi_\lambda=(x,\mathrm{e}^{\lambda s}x)^T,$$

其中 x 是方程 $\Delta(\lambda)x=0$ 的一个非零解，并且具有形式 $x=(1,\lambda)^T$.

证 注意到当 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$ 时

$$\det\Delta(\lambda)=\lambda^2+2k\lambda+\Big(\alpha^2+\frac{k_s}{m}\Big)-\frac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0,$$

$$[\det\Delta(\lambda)]'=2\lambda+2k+\frac{k_s\tau}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}.$$

明显地， $\det\Delta(\lambda)$ 与 $[\det\Delta(\lambda)]'$ 不同时为零，所以 $\mathcal{A}$ 的每个本征值都是简单的．

设 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $X=(x,y(s))^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是相应于 λ 的一个本征向量，即 $\mathcal{A}X=\lambda X$,

$$\begin{cases}Ax+B\delta_\tau y(s)=\lambda x,\\ y'(s)=\lambda y(s),\quad s\in[-\tau,0].\\ y(0)=x.\end{cases}$$

解上式中的微分方程，得到

$$y(s)=\mathrm{e}^{\lambda s}x,\quad s\in[-\tau,0].$$

将其带入方程中的第一个等式，得 $(\lambda I-A-B\mathrm{e}^{-\lambda\tau})x=0$. 因为 $\Delta(\lambda)=\lambda I-A-B\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$, 所以有

$$\Delta(\lambda)x=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ \alpha^2+\frac{k_s}{m}-\frac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} & \lambda+2k\end{pmatrix}x=0,$$

由于 λ 是 $\mathcal{A}$ 的本征值，所以有 $\det\Delta(\lambda)=0$, 故上述方程有非零解．求解上述方程，可得 x 的形式为 $x=(1,\lambda)^T$. ▌

4 本征向量的非基性质

本节研究算子 $\mathcal{A}$ 的本征向量的非基性质. 为此目的, 首先确定算子 $\mathcal{A}$ 的共轭算子的形式. $\forall\, X=(x_1,y_1(s))^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A}), Y=(x_2,y_2(s))^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$, 其中 $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ 待定,

$$\begin{aligned}[AX,Y]_{\mathcal{H}}&=(Ax_1+B\delta y_1(s),x_2)+\int_{-\tau}^{0}(y_1'(s),y_2(s))\mathrm{d}s\\&=(x_1,A^*x_2)+(y_1(-\tau),B^*x_2)+(y_1(s),y_2(s))|_{-\tau}^{0}-\int_{-\tau}^{0}(y_1(s),y_2'(s))\mathrm{d}s\\&=(x_1,A^*x_2+y_2(0))+(y_1(-\tau),B^*x_2-y_2(-\tau))+\int_{-\tau}^{0}(y_1(s),-y_2'(s))\mathrm{d}s\\&=[X,\mathcal{A}^*Y]_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)=\left\{(x,y(s))\in\mathcal{H}\;\middle|\;y(-\tau)=B^*x,y'(s)\in L^2([-\tau,0],\mathbb{C}^2)\right\},\tag{4.1}$$

$$\mathcal{A}^*\begin{pmatrix}x\\y(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^*&\delta_0\\0&-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y(s)\end{pmatrix},\tag{4.2}$$

其中 $\delta_0y(s)=y(0)$, A^* 为 A 的共轭转置矩阵, B^* 为 B 的共轭转置矩阵.

类似于算子 $\mathcal{A}$ 的情形, 我们有下面结果.

定理 4.1 设 $\mathcal{A}^*$ 如上定义, 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 令

$$\Delta(\lambda)^*=\overline{\lambda}I_2-A^*-\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}B^*,\tag{4.3}$$

其中 I_2 是 $\mathbb{C}^2$ 上的单位矩阵. 当 $\det\Delta(\lambda)^*\neq0$ 时, 有 $\overline{\lambda}\in\rho(\mathcal{A}^*)$, 且 $\mathcal{A}^*$ 的预解式是紧的, 并由下式给出

$$\begin{cases}(\overline{\lambda}I-\mathcal{A}^*)^{-1}X=Z,\quad X=(x,y(s))\in\mathcal{H},\quad\forall\,Z=(z,h(s))\in\mathcal{D}(A^*).\\z=(\Delta(\lambda)^*)^{-1}\Big(x+\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{\overline{\lambda}\xi}y(\xi)\mathrm{d}\xi\Big),\\h(s)=\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}\tau}B^*z+\displaystyle\int_{-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\overline{\lambda}\xi}y(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{cases}\tag{4.4}$$

特别地, 我们有

$$\sigma(\mathcal{A}^*)=\sigma_p(\mathcal{A}^*)=\left\{\overline{\lambda}\in\mathbb{C}\;\middle|\;\det\Delta(\lambda)^*=0\right\}.\tag{4.5}$$

定理 4.2 由 (4.1) 和 (4.2) 式定义的算子 $\mathcal{A}^*$ 的谱为 $\sigma(\mathcal{A}^*)$. 则对任意的 $\overline{\lambda}\in\sigma(\mathcal{A}^*)$, 相应的特征向量为 $\Psi_\lambda=(y,\mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(\tau+s)}B^*y)^T$, 其中 y 是方程 $\Delta(\lambda)^*y=0$ 的非零解, 并且具有形式 $y=(\overline{\lambda}-2k,1)^T$, 且有 $\mathcal{A}^*\Psi_\lambda=\overline{\lambda}\Psi_\lambda$.

下面证明本征向量列不能构成状态空间的基.

定理 4.3 设 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $E(\lambda;\mathcal{A})$ 为相应的 Riesz 谱映射. 则对任意的 $X\in\mathcal{H}$, 我们有

$$E(\lambda;\mathcal{A})X=[X,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}}\Phi_\lambda,\tag{4.6}$$

其中

$$\Phi_\lambda=\big(x(\lambda),\mathrm{e}^{\lambda s}x(\lambda)\big)^T,\quad\Delta(\lambda)x(\lambda)=0,\tag{4.7}$$

$$\Psi_\lambda = (y(\overline{\lambda}), \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(s+\tau)}B^*y(\overline{\lambda}))^T, \quad \Delta(\lambda)^*y(\overline{\lambda}) = 0, \tag{4.8}$$

且满足条件 $[\Phi_\lambda, \Psi_\lambda]_{\mathcal{H}} = 1$. 从而

$$\|E(\lambda;\mathcal{A})\| = \|\Psi_\lambda\|\|\Phi_\lambda\|. \tag{4.9}$$

进一步，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时， Riesz 谱投影 $E(\lambda;\mathcal{A})$ 具有范数估计

$$\|E(\lambda;\mathcal{A})\| \approx \frac{|\lambda|\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}}{|\Re\lambda|}. \tag{4.10}$$

所以本征向量序列 $\{\Phi_\lambda|\lambda\in\sigma(\mathcal{A})\}$ 不能构成空间 $\mathcal{H}$ 的一组基.

证　由于对任意的 $\lambda,\zeta\in\sigma(\mathcal{A})$, $\lambda\neq\zeta$, Φ_λ 是算子 $\mathcal{A}$ 相应于 λ 的本征向量， Ψ_ζ 是算子 $\mathcal{A}^*$ 相应于 $\overline{\zeta}$ 的本征向量， $[\Phi_\lambda,\Psi_\zeta]_{\mathcal{H}} = 0$.

设 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, 它是算子 $\mathcal{A}$ 的简单本征值， $E(\lambda;\mathcal{A})$ 为相应的 Riesz 谱映射，则 $E(\lambda;\mathcal{A})\mathcal{H}$ 是空间 $\mathcal{H}$ 的一维子空间，并由 Φ_λ 张成．若 Ψ_λ 是算子 $\mathcal{A}^*$ 的本征向量，使得 $[\Phi_\lambda,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}}=1$, 则对任意向量 $X\in\mathcal{H}$, 有 $E(\lambda;\mathcal{A})X = [X,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}}\Phi_\lambda$. 因此， $\|E(\lambda;\mathcal{A})\| = \|\Psi_\lambda\|\|\Phi_\lambda\|$.

根据定理 3.3 和定理 4.2 可知， Φ_λ 和 Ψ_λ 具有如下形式

$$\Phi_\lambda = \left(x_\lambda, \mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda\right)^T, \quad x_\lambda = k_1(\lambda)x(\lambda), \quad \Delta(\lambda)x(\lambda) = 0,$$

$$\Psi_\lambda = (y_{\overline{\lambda}}, \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(s+\tau)}B^*y_{\overline{\lambda}})^T, \quad y_{\overline{\lambda}} = k_2(\lambda)y(\overline{\lambda}), \quad \Delta(\lambda)^*y(\overline{\lambda}) = 0.$$

为找到满足等式 $[\Phi_\lambda,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}} = 1$ 的 Φ_λ 和 Ψ_λ, 我们只需找到合适的向量 x_λ 和 $y_{\overline{\lambda}}$. 现设

$$x_\lambda = k_1(\lambda)(1,\lambda)^T, \quad y_{\overline{\lambda}} = k_2(\lambda)(\overline{\lambda}-2k, 1)^T,$$

其中， $k_1(\lambda), k_2(\lambda)\in\mathbb{C}$ 为待定系数．此时有

$$\begin{aligned} 1 = [\Phi_\lambda,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}} &= (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} + \int_{-\tau}^0 (\mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda, \mathrm{e}^{-\overline{\lambda}(s+\tau)}B^*y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s \\ &= (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} + \int_{-\tau}^0 \mathrm{e}^{-\lambda\tau}(B^*x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2}\mathrm{d}s \\ &= (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} + \tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(Bx_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

注意到

$$(Bx_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} = k_1(\lambda)\overline{k_2(\lambda)}\frac{k_s}{m}, \quad (x_\lambda, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} = k_1(\lambda)\overline{k_2(\lambda)}(2\lambda-2k),$$

因此有

$$k_1(\lambda)\overline{k_2(\lambda)}\Big(2\lambda - 2k + \tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\frac{k_s}{m}\Big) = 1.$$

记 $\eta(\lambda) = 2\lambda - 2k + \tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\dfrac{k_s}{m}$, 并取

$$k_1(\lambda) = \sqrt{|\Re\lambda|}\mathrm{e}^{\lambda\tau}, \quad \overline{k_2(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{|\Re\lambda|}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\eta(\lambda)},$$

那么必有 $[\Phi_\lambda,\Psi_\lambda]_{\mathcal{H}} = 1$, 且

$$\|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(x_\lambda, \mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda)\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \|x_\lambda\|_{\mathbb{C}^2}^2 + \|\mathrm{e}^{\lambda s}x_\lambda\|_{L^2}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|k_1(\lambda)(1,\lambda)^T\|_{\mathbb{C}^2}^2 + \int_{-\tau}^{0} \|e^{\lambda s} k_1(\lambda)(1,\lambda)^T\|_{\mathbb{C}^2}^2 ds \\
&= |k_1(\lambda)|^2 \left[1+|\lambda|^2\right] + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda s} e^{\overline{\lambda} s} |k_1^2(\lambda)|(1+|\lambda|^2) ds \\
&= |\Re\lambda| e^{2\Re\lambda\tau} \left[1+|\lambda|^2\right] + |\Re\lambda| e^{2\Re\lambda\tau} \left[1+|\lambda|^2\right] \int_{-\tau}^{0} e^{2\Re\lambda s} ds \\
&= |\Re\lambda| e^{2\Re\lambda\tau} \left[1+|\lambda|^2\right] \Big(1 + \frac{1-e^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}\Big).
\end{aligned}
$$

当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时，有

$$
\|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{H}}^2 = |\Re\lambda| e^{2\Re\lambda\tau}[1+|\lambda|^2] + \frac{[1+|\lambda|^2]\left(e^{2\Re\lambda\tau}-1\right)}{-2} \approx \frac{|\lambda|^2}{2}. \tag{4.11}
$$

下面估计向量 Ψ_λ 的范数.

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_\lambda\|_{\mathcal{H}}^2 &= (y_{\overline{\lambda}}, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} + \int_{-\tau}^{0} \Big(e^{-\overline{\lambda}(s+\tau)} B^* y_{\overline{\lambda}}, e^{-\overline{\lambda}(s+\tau)} B^* y_{\overline{\lambda}}\Big)_{\mathbb{C}^2} ds \\
&= (y_{\overline{\lambda}}, y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} + (B^* y_{\overline{\lambda}}, B^* y_{\overline{\lambda}})_{\mathbb{C}^2} \int_{-\tau}^{0} e^{-2\Re\lambda(s+\tau)} ds.
\end{aligned}
$$

由于

$$
B^* y_{\overline{\lambda}} = k_2(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k_s}{m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda} - 2k \\ 1 \end{pmatrix} = k_2(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k_s}{m} \end{pmatrix},
$$

因此，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_\lambda\|_{\mathcal{H}}^2 &= |k_2(\lambda)|^2 \left[|\lambda|^2 - 4k\Re\lambda + 4k^2 + 1\right] + |k_2(\lambda)|^2 \left[\frac{k_s^2}{m^2} \cdot \frac{1-e^{-2\Re\lambda\tau}}{2\Re\lambda}\right] \\
&= \frac{|\lambda|^2 + 4k|\Re\lambda| + 4k^2 + 1 + \frac{k_s^2}{m^2} \cdot \frac{e^{-2\Re\lambda\tau}-1}{2|\Re\lambda|}}{|\Re\lambda| e^{2\Re\lambda\tau} |2\lambda - 2k + \tau \frac{k_s}{m} e^{-\lambda\tau}|^2} \\
&= \frac{|\lambda|^2 + 4k|\Re\lambda| + 4k^2 + 1 + \frac{k_s^2}{m^2} \cdot \frac{e^{-2\Re\lambda\tau}-1}{2|\Re\lambda|}}{|\Re\lambda| |(2\lambda - 2k) e^{\lambda\tau} + \tau \frac{k_s}{m}|^2} \approx \frac{e^{2|\Re\lambda|\tau}}{|\Re\lambda|^2}.
\end{aligned}
$$

结合上式和 (3.1) 式，可以知道，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时，有

$$
\|E(\lambda;\mathcal{A})\| = \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{H}} \|\Psi_\lambda\|_{\mathcal{H}} \approx \frac{|\lambda| e^{|\Re\lambda|\tau}}{|2\Re\lambda|} \to +\infty. \qquad \blacksquare
$$

5 时滞方程解的展开

在这一节中，我们将研究系统解的展开. 首先回顾一些相关的基本结果，它们出自于文献 [13].

设 $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，算子 $\mathcal{A}$ 是 $T(t)$ 的生成元. 假定算子 $\mathcal{A}$ 的谱是离散的，即 $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda_n; n \in \mathbb{Z}\}$. 对每个 $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A})$, 记 $E(\lambda_n;\mathcal{A})$ 是空间 X 上的 Riesz 投影. 定义空间 X 的 $T(t)$ - 不变谱子空间

$$
Sp(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{span}\left\{\sum_{j=1}^{m} E(\lambda;\mathcal{A})x \,|\, x \in X;\ \forall\, m \in \mathbb{N}\right\}},
$$

以及 X 的另一个 $T(t)$ - 不变子空间

$$\mathcal{M}_\infty := \left\{x \in X \;\middle|\; E(\lambda;\mathcal{A})x = 0, \forall\, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\}.$$

对每个 $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A})$, 我们用 m_n 表示 λ_n 的代数重数，并定义算子

$$D_n := (\mathcal{A} - \lambda_n)E(\lambda_n;\mathcal{A}) \quad 及 \quad D_n^0 = E(\lambda_n;\mathcal{A}),$$

则对每个 $n \in \mathbb{N}, D_n$ 是有界线性算子，且具有以下性质

$$D_n^k = (\mathcal{A} - \lambda_n)^k E(\lambda_n;\mathcal{A}) \quad 且 \quad D_n^{m_n} = 0.$$

在文献 [13] 中，我们已证明了下面的结果.

定理 5.1 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，算子 $\mathcal{A}$ 是其生成元. 假设 $\mathcal{A}$ 满足

(c1) 存在常数 M_1, ρ_1 及 ρ_3 使得

$$\sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k \|D_n^k\|}{k!} \le M_1 \mathrm{e}^{-\rho_1 \Re\lambda_n} \mathrm{e}^{\rho_3 t}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ t \ge 0; \tag{5.1}$$

(c2) 存在一个 $\tau_0 > 0$, 使得序列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\Re\lambda_n \tau_0}$ 收敛.

那么我们可以定义两族算子

$$T_1(t):\ X \to Sp(\mathcal{A}) \quad 及 \quad T_2(t): X \to \mathcal{M}_\infty,$$

它们的参数在区间 $[\tau_0 + \rho_1, \infty)$ 中取值，且满足

1) $T_1(t)$ 是紧算子， $T_1(t)$ 和 $T_2(t)$ 是强连续的;

2) $T_j(t)T(s) = T(s)T_j(t) = T_j(t+s)$, 对 $t \ge \tau_0 + \rho_1,\ s \ge 0, j = 1, 2$ 成立;

3) $T(t)$ 有如下分解

$$T(t) = T_1(t) + T_2(t),\ t \ge \tau_0 + \rho_1.$$

另外，如果 $\mathcal{A}$ 的谱满足下面的条件

(c3) 存在常数 $M_2 > 0$ 及 $\rho_2 > 0$, 使得

$$|\Im\lambda_n| \le M_2 \mathrm{e}^{-\rho_2 \Re\lambda_n},$$

则对每个 $x \in X, T_1(t)$ 在区间 $(\tau_0 + \rho_1 + \rho_2, \infty)$ 上是可微的.

注记 5.1 在定理 5.1 中，如果 λ_n 是算子 $\mathcal{A}$ 的简单本征值，则条件 (c1) 变成如下形式

$$\|E(\lambda_n;\mathcal{A})\| \le M_1 \mathrm{e}^{-\rho_1 \Re\lambda_n}. \tag{5.2}$$

从文献 [13] 的证明过程可知，定理 5.1 中的算子 $T_1(t)$ 就是

$$T_1(t)x := \sum_{n=1}^{\infty} T(t)E(\lambda_n;\mathcal{A})x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\lambda_n;\mathcal{A})T(t)x, \quad \forall\, x \in X. \tag{5.3}$$

上式刚好是解关于算子 $\mathcal{A}$ 的根向量的部分展开，而 $T_2(t)x := T(t)x - T_1(t)x$ 是系统的小解.

定理 5.2 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的一个 C_0 半群， $\mathcal{A}$ 是其生成元，假设定理 5.1 中的条件 (c1)–(c3) 成立. 另外，如果下列条件之一成立

1) 算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量在空间 X 中完全;

2) 算子 $\mathcal{A}$ 的预解式在 $\mathcal{M}_\infty$ 上的限制是在空间 X 中取值的有限指数 h 型的整函数.

则 $T(t)$ 对 $t>\tau_1$ 是可微半群，其中

$$\tau_1 := \max\{\tau_0+\rho_1+\rho_2, \tau_0+\rho_1+h\}. \tag{5.4}$$

注记 5.2 如果定理 5.2 中的条件满足，则定理 5.2 表明，当 $t>\tau_1$ 时，我们有

$$T(t)x=\sum_{n=1}^{\infty}T(t)E(\lambda_n;\mathcal{A})x=\sum_{n=1}^{\infty}E(\lambda_n;\mathcal{A})T(t)x,\quad x\in X. \tag{5.5}$$

这是解关于算子 $\mathcal{A}$ 的根向量的完全展开.

下面来验证定理 5.1 和定理 5.2 中的条件.

命题 5.1 设算子 $\mathcal{A}$ 由第二节所定义，则对 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, λ 是 $\mathcal{A}$ 的简单本征值，相应的 Riesz 投影 $E(\lambda;\mathcal{A})$ 具有估计式

$$\|E(\lambda;\mathcal{A})\|\le M_1\mathrm{e}^{-\rho_1\Re\lambda},$$

其中， $M_1>0$ 是常数， $\rho_1=\frac{3\tau}{2}$. 因此，定理 5.1 中的条件 (c1) 对 $\mathcal{A}$ 成立.

证 根据第四节中的讨论可知 $E(\lambda;\mathcal{A})$ 的范数具有如下估计式

$$\|E(\lambda;\mathcal{A})\|\approx\frac{|\lambda|\mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau}}{|2\Re\lambda|}.$$

注意到当 $\Re\lambda\to-\infty$ 时， λ 满足渐近方程 $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda\tau}=\frac{k_s}{m}+o(1)$, 所以当 $|\Re\lambda|$ 充分大时，$|\lambda|^2\le 2\frac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\Re\lambda\tau}$. 将其代人 $\|E(\lambda;\mathcal{A})\|$ 的估计式中得

$$\|E(\lambda;\mathcal{A})\|\approx\frac{|\lambda|\mathrm{e}^{-\Re\lambda\tau}}{|2\Re\lambda|}\le M_1\mathrm{e}^{-\frac{3\tau}{2}\Re\lambda}, \tag{5.6}$$

于是 $\rho_1=\frac{3\tau}{2}$. ▌

命题 5.2 设算子 $\mathcal{A}$ 如前定义，则对 $\tau_0>\frac{\tau}{2}$, 定理 5.1 中的条件 (c2) 成立. 进一步地，存在常数 $M_2>0$ 及 $\rho_2=\frac{\tau}{2}$, 使得

$$|\Im\lambda|\le M_2\mathrm{e}^{-\rho_2\Re\lambda},$$

也即定理 5.1 中的条件 (c3) 也成立.

证 在前面的证明中我们已得到 $|\lambda|^2\le 2\frac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\Re\lambda\tau}$, 所以对充分大的 $|\Re\lambda|$,

$$|\Im\lambda|\le|\lambda|\le M_2\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{2}\Re\lambda}.$$

为验证定理 5.1 中的条件 (c2), 我们只需证明对某一 $\tau_0>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\Re\lambda_{j,n}\tau_0}<\infty,\quad j=1,2$$

成立. 由于

$$\mathrm{e}^{\Re\lambda\tau_0}=\mathrm{e}^{\frac{1}{h}[\ln|b|-\ln|\omega_n|]\tau_0}=\left|\frac{b}{\omega_n}\right|^{\frac{\tau_0}{h}},\quad h=\frac{\tau}{2},$$

取 $\tau_0 > \frac{\tau}{2}$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\Re\lambda\tau_0} = \left(\frac{b\tau}{2\pi}\right)^{\frac{2\tau_0}{\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\mathrm{sign}(b)\right)^{\frac{2\tau_0}{\tau}}} < +\infty.$$

那么定理 5.1 中的条件 (c2) 成立. 综上所述，命题得证. ▌

命题 5.3 设算子 $\mathcal{A}$ 如前定义, 则其预解式是复平面 $\mathbb{C}$ 上具有有限指数型的亚纯函数, 且指数最大为 2τ. 因此，定理 5.1 中的条件 2) 成立.

证 根据定理 2.4, 算子 $\mathcal{A}$ 的预解式的表达式为

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{e}^{\lambda s} x - \int_0^s \mathrm{e}^{\lambda(s-t)} g(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

其中

$$x = \Delta(\lambda)^{-1} \left[y + \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)} g(s)\mathrm{d}s \right]. \tag{5.8}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \left\| \mathrm{e}^{\lambda s} x - \int_0^s \mathrm{e}^{\lambda(s-t)} g(t)\mathrm{d}t \right\|_{\mathbb{C}^2} &\le \mathrm{e}^{\Re\lambda s} \|x\|_{\mathbb{C}^2} + \left[\int_s^0 |\mathrm{e}^{\lambda(s-t)}|^2 \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_s^0 \|g(t)\|^2 \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \mathrm{e}^{\Re\lambda s} \|x\|_{\mathbb{C}^2} + \|g\|_{L^2} \sqrt{\frac{1 - \mathrm{e}^{2\Re\lambda s}}{2\Re\lambda}}. \end{aligned}$$

因此，当 $\Re\lambda \to -\infty$ 时，有

$$\left\| \mathrm{e}^{\lambda s} x - \int_0^s \mathrm{e}^{\lambda(s-t)} g(t)\mathrm{d}t \right\|_{L^2}^2 \le M_1 \mathrm{e}^{2|\Re\lambda|\tau} \left(\|x\|_{\mathbb{C}^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right),$$

其中 $M_1 > 0$ 为一常数.

对 x 有

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathbb{C}^2} &\le \|\Delta^{-1}(\lambda)\|_2 \left\| y + \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{-\lambda(\tau+s)} g(s)\mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{C}^2} \\ &\le M_2 \mathrm{e}^{|\Re\lambda|\tau} \|\Delta^{-1}(\lambda)\|_2 \left(\|y\|_{\mathbb{C}^2} + \|g\|_{L^2} \right), \end{aligned}$$

其中 $M_2 > 0$ 是一常数．所以

$$\|x\|_{\mathbb{C}^2}^2 \le M_3 \mathrm{e}^{2|\Re\lambda|\tau} \|\Delta^{-1}(\lambda)\|_2^2 \left(\|y\|_{\mathbb{C}^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right),$$

其中 $M_3 = 2M_2^2$.

根据文献 [15], 如果算子 T 是可逆矩阵，则存在与 T 无关，只依赖于空间 $\mathbb{C}^n$ 中范数的常数 $\gamma > 0$, 使得

$$\|T^{-1}\| \le \gamma \frac{\|T\|^{n-1}}{|\det(T)|}.$$

对本文则研究 $\Delta(\lambda) = \lambda I_2 - A - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} B$ 是可逆矩阵，那么

$$\|\Delta^{-1}(\lambda)\| \le \gamma \frac{\|\Delta(\lambda)\|_F}{|\det(\Delta(\lambda))|}.$$

注意到 $\|T\| \le \|T\|_F$, 其中, $\|\cdot\|_F$ 是矩阵的 Frobenious 范数. 下面计算 $\|\Delta(\lambda)\|_F$.

因为

$$\Delta(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ \alpha^2+\dfrac{k_s}{m}-\dfrac{k_s}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} & \lambda+2k\end{pmatrix},$$

根据矩阵的 Frobenious 范数定义得

$$\|\Delta(\lambda)\|_F^2 \le (5+3|\lambda|^2+2\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau})\left(\|A\|_F^2+\|B\|_F^2\right).$$

对 $\Delta(\lambda)$, 当 $\Re\lambda>0$ 时, 我们有

$$\det\Delta(\lambda)=\det\left(\lambda I_2-A-\mathrm{e}^{-\tau\lambda}B\right)=\lambda^2+O(1).$$

因此

$$\|\Delta^{-1}(\lambda)\|^2 \le \gamma^2\frac{\|\Delta(\lambda)\|_F^2}{|\det\Delta(\lambda)|^2} \le \gamma^2\left[\|A\|_F^2+\|B\|_F^2\right]\frac{3|\lambda|^2+2\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}+5}{|\det(\lambda I_2-A)+o(1)|^2} \le M_4,$$

其中, $M_4>0$ 是常数.

对 $\Re\lambda<0$, 当 $|\lambda|$ 足够大时, 下式成立

$$\det\Delta(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\mathrm{e}^{\lambda\tau}\lambda^2-\frac{k_s}{m}+o(1)]=\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\Big(\prod_{j=1}^{2}(\lambda\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\lambda}-b_j)+o(1)\Big),$$

其中 $b_1=\sqrt{\frac{k_s}{m}}$, $b_2=-\sqrt{\frac{k_s}{m}}$. 因此, 对 $|\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\tau}{2}}-b_j|>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\Delta^{-1}(\lambda)\|^2 &\le \gamma^2\frac{\|\Delta(\lambda)\|_F^2}{|\det\Delta(\lambda)|^2} \le \gamma^2\left[\|A\|_F^2+\|B\|_F^2\right]\frac{3|\lambda|^2+2\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}+5}{\mathrm{e}^{-2\Re\lambda\tau}\Big|\prod\limits_{j=1}^{2}\left(\lambda\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\lambda}-b_j+o(1)\right)\Big|^2}\\ &=\gamma^2\left[\|A\|_F^2+\|B\|^2\right]\frac{3|\lambda|^2\mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau}+5\mathrm{e}^{2\Re\lambda\tau}+2}{\Big|\prod\limits_{j=1}^{2}\left(\lambda\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}\lambda}-b_j+o(1)\right)\Big|^2} \le M_5.\end{aligned}$$

从而

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})Y\|_{\mathcal{H}}^2=\|X\|_{\mathcal{H}}^2=\|x\|_{\mathbb{C}^2}^2+\|f\|_{L^2}^2 \le M^2\mathrm{e}^{4|\Re\lambda|\tau}\left(\|y\|_{\mathbb{C}^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\right),$$

其中 $M>0$ 为一常数. 所以有下式成立

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})\|_{\mathcal{H}} \le M\mathrm{e}^{2\tau|\Re\lambda|}.$$ ▮

到现在为止, 我们已经验证了定理 5.1 中的全部条件. 且有 $\rho_1=\frac{3\tau}{2}$, $\rho_2=\frac{\tau}{2}$, $\tau_0>\frac{\tau}{2}$, 以及预解式的型 2τ. 根据定理 5.1 及定理 5.2 的结果, 我们得到了如下结论.

定理 5.3 设算子 $\mathcal{A}$ 如前定义, 则当 $t>4\tau$ 时, 系统的解可以展开成如下形式

$$\begin{aligned}X(t)=T(t)X_0&=\sum_{\mu_j\in Q}\left[\mathrm{e}^{t\mu_j}(X_0,\Psi(\mu_j))_{\mathcal{H}}\Phi(\mu_j)\right]\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\mathrm{e}^{t\lambda_n}(X_0,\Psi(\overline{\lambda_n}))_{\mathcal{H}}\Phi(\lambda_n)+\mathrm{e}^{t\overline{\lambda_n}}(X_0,\Psi(\lambda_n))_{\mathcal{H}}\Phi(\overline{\lambda_n})\Big),\end{aligned}$$

其中, Q 为可能的实零点的集合. $\Psi(\lambda),\Phi(\lambda)$ 分别在定理 3.2 及 4.3 中给出.

参 考 文 献

[1] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977
[2] Hale J K, Verdyn Lunel S M. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993
[3] Tian H J, Kuang J X. The numerical stability of linear multistep methods for delay differential equations with many delays. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, **33**: 883–889
[4] Nguang S K. Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, **45**: 756–762
[5] Hale J K, Verdyn luner S M. Stability and control of feedback systems with time delays. International Journal of Systems Science, 2003, **34**: 497–504
[6] Sun L P. Stability analysis for linear delay differential equations and numberical examples. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2003, **18**: 390–402
[7] Fan M, Di S, Wang K. Stability and boundedness of the solutions to neutral functional differential equations with finite delay. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, **276**: 545–560
[8] 林发兴. 一致稳定性和周期解、概周期解的存在性. 中国科学， 1994, **24A**(4): 361–370
[9] 迪申加卜，范猛，王克. 具无限时滞中立型泛函微分方程解的稳定性与有界性. 数学物理学报， 2005, **25A**(5): 593–603
[10] 王根强, 燕居让. 多变时滞 n 阶非线性中立型泛函微分方程周期解存在性. 数学物理学报，2006, **26A**(2): 306–313
[11] Stepan G. Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions. New York: Longaman Scientific & Technical, 1989
[12] Hagen T. Asymptotic solutions of characteristic equations. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2005, **6**: 429–446
[13] Xu G Q, Yung S P. Properties of a class of C_0 semigroups on Banach spaces and their applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, **328**: 245–256
[14] Pazy A. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer, 1983
[15] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. New York: Springer-Verlag, 1984

Spectral Analysis and Expansion of Solution to a Class of Delay Differential Equations

Wang lei Xu Genqi
(*Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072*)

Abstract: In this paper, the authors investigate the spectrum and expansion of solutions for a class of delay differential equations. The model under consideration comes from a practical problem, which describes machine tool vibration in cutting process. They tranform the model into a first order differential equation in a Hilbert state space. And then using the theory of C_0 semigroup, they obtain the well-posed-ness of the sytem. By a detailed spectrum analysis, they give an explicit asymptotic expression of all eigenvalues. In addtion, they show that the eigenfunctions of the system do not form a basis for the state space; however, they get the exspansion of solution of the system according to the eigenfunctions.

Key words: Delay differential equation; Spectrum; Solution expanssion.
MR(2000) Subject Classification: 39B99; 47D99; 93D20