2004,**24A**(3):354－361

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

# 一类椭圆问题正解的存在性和唯一性*

冉启康
(上海财经大学应用数学系　上海 200433)

**摘要**:该文讨论了二阶拟线性椭圆型问题

$$u|_{\partial\Omega}=0:-\mathrm{div}[(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u]=\lambda_1 u^{p-1}+g(x,u),\quad x\in\Omega$$

正解的存在性和唯一性,其中 Ω 是 $R^N$ 中的有界区域,$\lambda_1$ 是 $-\triangle_p$ 在 Ω 上对应于零 *Dirichlet* 边界条件的第一特征根,g(x, t) 满足增长条件 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g(x,t)}{t^{p-1}}=0$, $p>1$, $0\leqslant d<+\infty$.

**关键词**:拟线性椭圆问题;鞍点;正解.

**MR(2000)主题分类**:36J65　　**中图分类号**:O175.25　　**文献标识码**:A

**文章编号**:1003-3998(2004)03-354-08

## 1　引言及结果

关于二阶拟线性椭圆型问题

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega$ 是 $R^N$ 中的有界区域,$N\geqslant 2$,$f:\Omega\times R\to R$ 是 Caratheodory 函数且满足适当的增长性条件,至今已有许多文献讨论了其弱解的存在性、唯一性和正则性. 如果 $f(x,s)$ 关于 $s$ 在 $s$ 趋于无穷大时是超线性增长的,且满足一些其它的条件,则方程(1)已有大量的存在性结果,例如,见[2],[3],[4],[9]等.

最近,李工宝和周焕松在文献[3]中讨论了问题(1)正解的存在性,他们关于 $f(x,t)$ 的条件为

(f1) 对 $\forall t\geqslant 0$, $x\in\Omega$, 有 $f(x,t)\in C(\Omega\times R)$, $f(x,t)\geqslant 0$; 且对 $\forall t\leqslant 0$, $x\in\Omega$, 有 $f(x,t)\equiv f(x,0)\equiv 0$.

(f2) 对任意 $x\in\Omega$,当 $t>0$ 时, $f(x,t)/t^{p-1}$ 关于 $t$ 是非减的.

(f3) $\lim\limits_{t\to 0}f(x,t)/t^{p-1}=0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}f(x,t)/t^{p-1}=l$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立.

(fF) $\lim\limits_{t\to\infty}\{f(x,t)t-pF(x,t)\}=+\infty$, 对几乎处处 $x\in\Omega$ 一致成立.

他们证明了下列定理

LZ 定理　如果条件(f1)－(f3) 成立,那么

(i) 当 $l<\lambda_1$ 时,问题(1)没有解;

收稿日期:2001-09-12; 修订日期:2003-02-10

Email:Ranqikang@263.net

* 基金项目:国家自然科学基金(10371021)资助

(ii) 当 $l>\lambda_1$ 且 $l$ 不是 $-\triangle_p$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的特征根时,问题(1)有一个正解;

(iii) 当 $l>\lambda_1$ 且 $l$ 是 $-\triangle_p$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的特征根时,如果条件(fF)满足,且 $f(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times R)$,则问题(1) 有一个正解.

其中 $\lambda_1$ 是 $-\triangle_p$ 在 $\Omega$ 中关于零 Dirichlet 边界条件的第一特征根,即

$$\lambda_1=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x}{\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x}.$$

众所周知:$\lambda_1>0$,$\lambda_1$ 对应的特征函数在 $\Omega$ 上不变号,且存在唯一的正特征函数 $\varphi_1$ 满足:$\varphi_1$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数为 1(见[5]).

本文中,我们研究了 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}-\operatorname{div}[(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u]=\lambda_1 u^{p-1}+g(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

正解的存在性和唯一性,其中 $\Omega$ 是 $R^N$ 中的有界区域,$0\leqslant d<+\infty$,$N\geqslant 2$,且 $g(x,t)$满足

($F_1$) 对 $\forall t\geqslant 0$,$x\in\Omega$,有 $g(x,t)\in C(\Omega\times R)$,$g(x,t)\geqslant 0$,且 $\exists h(x)\in C(\Omega)$使得对 $\forall t\leqslant 0$,$x\in\Omega$,有 $g(x,t)\equiv g(x,0)\equiv h(x)\geqslant s>0$;

($F_2$) 对几乎处处 $x\in\Omega$,当 $t>0$ 时,$\frac{g(x,t)}{t^{p-1}}$关于 $t$ 为减函数,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g(x,t)}{t^{p-1}}=0$;

($F_3$) 对任意 $x\in\Omega$,定义

$$F(x,t)=\begin{cases}\frac{p}{t}\int_0^t g(x,s)\mathrm{d}s-g(x,t), & t>0,\\ (p-1)h(x), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

那么$\underline{F(+\infty)=\inf\limits_{x\in\Omega}F(x,+\infty)}=\inf\limits_{x\in\Omega}\liminf\limits_{t\to+\infty}F(x,t)>0$.

**注 1.1** 满足条件($F_1$)-($F_3$)的函数是存在的,例如 $g(x,t)=[\max(t,0)]^{p-2}+h(x)$.

问题(2)来自大量的实际问题,例如:当 $d=1$ 时,就是 Euler-Lagrange 方程,当 $d=0$ 时,为 $p$-Laplace 方程.

在全文中,我们用 $\|u\|=(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ 表示 $u$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中的范数. 记 $\Omega_-=x\in\Omega$: $u\leqslant 0$,$u^+=\max\{0,u\}$,$u^-=\min\{0,u\}$.

**定义 1.1** 称 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$是问题(2)的一个弱解,如果对任意 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$,均有

$$\int_\Omega(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega u^{p-1}\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,u)\varphi\mathrm{d}x$$

成立.

如果 $u$ 是问题(2)的弱解,且在 $\Omega$ 上,$u>0$ 恒成立,我们就称 $u$ 为问题(2)的一个正解.

显然,问题(2)对应的泛函 $J:W_0^{1,p}(\Omega)\to R$ 为

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x-\frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega(u^+)^p\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u^+)\mathrm{d}x,\tag{3}$$

其中 $G(x,u)=\int_0^u g(x,t)\mathrm{d}t$. 对任意 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,$J$ 在 $u$ 点是连续 Fréchet 可微的且

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_\Omega(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\lambda_1\int_\Omega(u^+)^{p-1}v\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x,u^+)v\mathrm{d}x\tag{4}$$

对任意 $u$,$v\in W_0^{1,p}(\Omega)$成立. 众所周知:$J$ 的临界点对应于问题(2)的弱解.

我们的主要结果为

**定理 1.1** 如果 $1<p<3$,且条件($F_1$)—($F_3$)成立,那么问题(2)有至少一个正解.

**定理 1.2** 设($F_1$)—($F_3$)成立,且 $u$ 是问题(2)的一个正解,那么当 $1<p\leqslant 2$ 且 $0\leqslant d<+\infty$;或 $p>2$ 且 $d=0$ 时,$u$ 是问题(2)的唯一正解.

## 2 证明

我们将定理 1.1 的证明分成下列几步完成.

为了说明问题(2)的非负解实际上在 $\Omega$ 上都是正的,我们引入下列引理

**引理 2.1** 设($F_1$)—($F_3$)成立,且 $u\in C^1(\Omega)$ 是问题(2)的非负弱解. 那么,如果 $u$ 在 $\Omega$ 上不恒等于零,则它在 $\Omega$ 上处处是正的.

**证** 这是[1]中定理 1 的一个直接结果. ▌

**引理 2.2** 设($F_1$)—($F_3$)成立,那么 $J$ 满足(P.S)条件. 即,如果$\{u_n\}$是 $W_0^{1,p}(\Omega)$中满足

$$J(u_n)\text{ 在 }R\text{ 中有界;在 }W^{-1,p'}(\Omega)\text{ 中},J'(u_n)\to 0$$

的函数列,则$\{u_n\}$存在一个子列在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中强收敛.

**证** 我们将证明分为两步完成. 首先,我们证明$\{u_n\}$在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中界,如果不成立,不妨设 $\|u_n\|\to\infty$. 记 $v_n=u_n/\|u_n\|$,$v_n^+=u_n^+/\|u_n\|$. 由 $W_0^{1,p}(\Omega)$是自反的及嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\to\to L^p(\Omega)$是紧的,知存在 $v_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 使得(如有必要,取子列)

$$\begin{aligned}
&v_n\rightharpoonup v_0 \quad \text{在 } W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 中弱收敛;}\\
&v_n^+\rightharpoonup v_0^+ \quad \text{在 } W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 中弱收敛;}\\
&v_n\to v_0 \quad \text{在 } L^p(\Omega)\text{ 中强收敛;}\\
&v_n^+\to v_0^+ \quad \text{在 } L^p(\Omega)\text{ 中强收敛.}
\end{aligned}$$

由 $J(u_n)$的有界性及 $\|u_n\|\to\infty$得到

$$\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^p}=\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x-\frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega(v_n^+)^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{G(x,u_n^+)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x\to 0. \tag{5}$$

由($F_2$)知

$$\int_\Omega\frac{G(x,u_n^+)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x\to 0.$$

由(5)式得到

$$\int_\Omega\frac{(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x-\lambda_1\int_\Omega(v_n^+)^p\mathrm{d}x\to 0.$$

使用不等式 $(d+|x|^2)^{\frac{p}{2}}\geqslant|x|^p$,我们有

$$\|\nabla v_n\|^p\leqslant\frac{(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|u_n\|^p}.$$

结合 $\lambda_1$的性质与范数的下半连续性,我们得到

$$\begin{aligned}
\lambda_1\int_\Omega|v_0^+|^p\mathrm{d}x&\leqslant\int_\Omega|\nabla v_0|^p\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla v_n|^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega(v_0^+)^p\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{6}$$

因此 $v_0{}^+=\varphi_1$，所以 $\int_\Omega (v_0{}^+)^p\mathrm{d}x>0$. 由(3)，(4) 及条件 $1<p<3$，我们有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\frac{\langle J'(u_n),u_n\rangle-pJ(u_n)}{\|u_n\|}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\Omega[(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}-1}|\nabla u_n|^2-(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}]\mathrm{d}x}{\|u_n\|}+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega v_n{}^+F(x,u_n{}^+)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\Big[\int_\Omega v_n{}^+F(x,u_n{}^+)\mathrm{d}x-\frac{d\int_\Omega(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{d}x}{\|u_n\|}\Big]\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega v_n{}^+F(x,u_n{}^+)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{7}$$

对 $0<\varepsilon<\underline{F(+\infty)}$，设

$$C_\varepsilon=\begin{cases}\underline{F(+\infty)}-\varepsilon, & \underline{F(+\infty)}\in R,\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \underline{F(+\infty)}=+\infty,\end{cases}$$

则存在 $K>0$，$C(K)>0$，使得对任意 $t>K$ 和几乎处处 $x\in\Omega$，有

$$F(x,t)\geqslant C_\varepsilon,\tag{8}$$

且对所有 $t\in[0,+K]$和几乎处处 $x\in\Omega$，有

$$|F(x,t)|\leqslant C(K),\tag{9}$$

则

$$\int_\Omega F(x,u_n{}^+)v_n{}^+\,\mathrm{d}x=\int_{0\leqslant u_n{}^+\leqslant K}F(x,u_n{}^+)v_n{}^+\,\mathrm{d}x+\int_{u_n{}^+>K}F(x,u_n{}^+)v_n{}^+\,\mathrm{d}x.$$

因为 $\Omega$ 是有界区域，由(8)式和(9)式，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{0\leqslant u_n{}^+\leqslant K}F(x,u_n{}^+)v_n{}^+\,\mathrm{d}x\Big|&\leqslant\int_{0\leqslant u_n{}^+\leqslant K}|F(x,u_n{}^+)|\frac{u_n{}^+}{\|u_n\|}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{C(K)K\mathrm{meas}(\Omega)}{\|u_n\|}\to0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{u_n{}^+>K}F(x,u_n)v_n{}^+\,\mathrm{d}x&\geqslant\lim_{n\to\infty}C_\varepsilon\int_{u_n{}^+>K}v_n{}^+\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}C_\varepsilon\Big(\int_\Omega v_n{}^+\,\mathrm{d}x-\int_{0\leqslant u_n{}^+\leqslant K}v_n{}^+\,\mathrm{d}x\Big)=C_\varepsilon\int_\Omega v_0{}^+\,\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

与(7)式矛盾. 因此$\{u_n\}$在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中有界. 所以,存在 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，使得

$$u_n\to u \text{ 在 } L^p(\Omega) \text{ 中强收敛.}$$

下面，我们完成引理 2.2 的证明.

因为

$$\begin{aligned}0\leftarrow\langle J'(u_n),u_n-u\rangle&=\int_\Omega(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\&\quad-\lambda_1\int_\Omega(u_n{}^+)^{p-1}(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x,u_n{}^+)(u_n-u)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由上式的最后两项收敛于零，我们得到

$$\int_\Omega(d+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to0.\tag{10}$$

由

$$0 \leftarrow \langle J'(u),\, u_n - u\rangle = \int_\Omega (d + |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) \mathrm{d}x$$
$$- \lambda_1 \int_\Omega (u^+)^{p-1}(u_n - u)\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,\, u^+)(u_n - u)\mathrm{d}x,$$

我们知

$$\int_\Omega (d + |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u)\mathrm{d}x \to 0. \tag{11}$$

由(10)式及(11)式,我们有

$$0 \leftarrow \int_\Omega (d + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}-1} \nabla u_n - (d + |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u)\mathrm{d}x.$$

类似于文[10](p53－54)中定理 2.1 的证明，可以得到 $D_i(u_n) \to D_i(u)$ 在 $\Omega$ 中几乎处处收敛,且$\{|Du_n|^p\}$等度连续的. 所以 $\|u_n\| \to \|u\|$. 再由 $W_0^{1,p}(\Omega)$的一致凸性得 $u_n \to u$(在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中强收敛). 证毕. ▌

**引理 2.3** 设 $\varphi_1 > 0$ 为 $\lambda_1$ 对应的特征函数，且 $(F_1)-(F_3)$ 成立，则 $J$ 满足:如将 $W_0^{1,p}(\Omega)$分解为 $E_1 = \langle \varphi_1 \rangle$ 与 $E_2 = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ 0 = \int_\Omega u {\varphi_1}^{p-1}\mathrm{d}x\}$ 的直和，那么

(a) 当$|a| \to +\infty$时,$J(a\varphi_1) \to -\infty$.

(b) $J$ 在 $E_2$ 中有下界.

**证** (a) 如果结论不成立，则存在$\{a_n\} \subset R$，$|a_n| \to +\infty$，使得 $J(a_n\varphi_1) \geqslant C$ 对所有 $n \in N$ 对某个 $C \in R$ 成立. 不失一般性,设 $a_n \to +\infty$. 则

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \frac{J(a_n\varphi_1)}{a_n} \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{[d + {a_n}^2 |\nabla \varphi_1|^2]^{\frac{p}{2}}}{a_n}\mathrm{d}x - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega {a_n}^{p-1} {\varphi_1}^p \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{G(x,\, a\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x\} \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{[d + {a_n}^2 |\nabla \varphi_1|^2]^{\frac{p}{2}}}{a_n}\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega {a_n}^{p-1} |\nabla \varphi_1|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{G(x,\, a\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x\} \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \{\frac{{a_n}^{p-1}}{p}\int_\Omega [(\frac{d}{{a_n}^2} + |\nabla \varphi_1|^2)^{\frac{p}{2}} - (|\nabla \varphi_1|^2)^{\frac{p}{2}}]\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{G(x,\, a\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x\}.
\end{aligned}$$

当 $1 < p \leqslant 2$ 时，我们有

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{J(a_n\varphi_1)}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \{\frac{{a_n}^{p-1}}{p}\int_\Omega (\frac{d}{{a_n}^2})^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{G(x,\, a\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x\}. \tag{12}$$

当 $p > 2$ 时，我们有

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{J(a_n\varphi_1)}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \{\frac{{a_n}^{p-1}}{p}\int_\Omega [(\frac{\theta d}{{a_n}^2} + |\nabla \varphi_1|^2)^{\frac{p}{2}-1} \frac{d}{{a_n}^2}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{G(x,\, a\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x\}, \tag{12'}$$

其中 $\theta \in (0,1)$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 及满足(8)中的 $K > 0$,因为当 $\tau > k$ 时有

$$(-\frac{G(x,\, \tau)}{\tau^p})' = \frac{F(x,\tau)}{\tau^p} \geqslant \frac{C_\varepsilon}{\tau^p} = (-\frac{1}{p-1} \cdot \frac{C_\varepsilon}{\tau^{p-1}})',$$

所以

$$\frac{G(x,\, t)}{t^p} - \frac{G(x,\, s)}{s^p} \geqslant \frac{C_\varepsilon}{p-1}(\frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{s^{p-1}}). \tag{13}$$

对 $s > t > K$ 成立. 在(13)式中两边令 $s \to +\infty$,我们得到

$$\frac{G(x,\, t)}{t} \geqslant \frac{C_\varepsilon}{p-1} \tag{14}$$

对任意 $t>K$ 成立. 由(12),(12′),(14),及 $1<p<3$,我们有

$$0\leqslant \lim_{n\to+\infty}\inf \frac{J(a_n\varphi_1)}{a_n}\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup \frac{J(a_n\varphi_1)}{a_n}$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\sup\int \frac{G(x,a_n\varphi_1)}{a_n}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant -\frac{1}{p-1}\underline{F(x,+\infty)}\int_\Omega \varphi_1\mathrm{d}x<0$$

与假设矛盾. 从而(a)成立.

为了证明(b),我们使用文[2]中结论:存在 $\bar{\lambda}>\lambda_1>0$ 使得对任意 $u\in E_2$,有

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\geqslant\bar{\lambda}\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x.$$

设 $u\in E_2$. 则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $C>0$ 使得

$$J(u)\geqslant\frac{1}{p}[\|u\|^p-\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}}\|u\|^p]-\int_\Omega G(x,u^+)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{p}\|u\|^p(1-\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}})-C\kappa\|u\|-\frac{\varepsilon}{p}K^p\|u\|^p$$

$$\geqslant\frac{1}{p}\|u\|^p(1-\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}}-\varepsilon K^p)-C\kappa\|u\|. \tag{15}$$

其中 $K$ 和 $\kappa$ 分别为 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ 及 $W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^1(\Omega)$ 的常数. 取 $\varepsilon>0$ 适当小,使得 $1-\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}}-\varepsilon K^p>0$,由(15)式知 $J$ 在 $E_2$ 中有下界. 这就完成了引理 2.3 的证明. ∎

由引理 2.2,引理 2.3 及鞍点定理(见[6]),我们得到:问题(2)至少有一个非平凡弱解 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

在(4)中取 $v=u^-$,则有

$$\langle J'(u),u^-\rangle=\int_{\Omega^-}[d+|\nabla u|^2]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega^-}h(x)|u|\mathrm{d}x=0,$$

从而 $u\geqslant0$ 在 $\Omega$ 中几乎处处成立. 由[8]我们知 $u\in C^{1,\alpha}(\Omega)$. 所以根据引理 2.1 有 $u>0$ 在 $\Omega$ 上处处成立. 定理 1.1 成立.

为了证明定理 1.2,我们引入下列引理 2.4.

**引理 2.4**[5] 对任意 $R^N$ 中的点 $W_1$ 和 $W_2$,如果 $p>2$,那么

$$|W_2|^p\geqslant|W_1|^p+p|W_1|^{p-2}W_1\cdot(W_2-W_1)+\frac{|W_2-W_1)|^p}{2^{p-1}-1}; \tag{16}$$

如果 $1<p\leqslant2$,那么

$$|W_2|^p\geqslant|W_1|^p+p|W_1|^{p-2}W_1\cdot(W_2-W_1)+\frac{3p(p-1)}{16}\frac{|W_2-W_1)|^2}{(|W_1|+|W_2|)^{2-p}}. \tag{17}$$

**定理 1.2 的证明** 设 $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 为问题(2)的两个弱正解. 类似于[7]或[8],我们能证明 $u,v\in C^{1,\alpha}(\Omega)$. 由定义,我们有

$$\int_\Omega(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega u^{p-1}\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,u)\varphi\mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$\int_\Omega(d+|\nabla v|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla v\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega v^{p-1}\psi\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,v)\psi\mathrm{d}x \tag{19}$$

对所有 $\varphi,\psi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立. 对 $\varepsilon>0$,设 $u_\varepsilon=u+\varepsilon$, $v_\varepsilon=v+\varepsilon$

$$\varphi = \frac{u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p}{u_\varepsilon{}^{p-1}}, \quad \psi = \frac{v_\varepsilon{}^p - u_\varepsilon{}^p}{v_\varepsilon{}^{p-1}},$$

则$\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}$, $\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon} \in L^\infty(\Omega)$,且 $\varphi$, $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

因为

$$\nabla\varphi = [1+(p-1)(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon})^p]\nabla u - p(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon})^{p-1}\nabla v,$$

$$\nabla\psi = [1+(p-1)(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon})^p]\nabla v - p(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon})^{p-1}\nabla u,$$

$$|\nabla \log u_\varepsilon| = \frac{|\nabla u|}{u_\varepsilon},$$

所以,我们得到

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\int_\Omega[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x + \int_\Omega[\frac{g(x,u)}{u^{p-1}}\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{g(x,u)}{v^{p-1}}\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega[d+|\nabla u_\varepsilon|^2]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega[d+|\nabla v_\varepsilon|^2]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega\frac{v_\varepsilon{}^p}{u_\varepsilon{}^p}[d+|\nabla u_\varepsilon|^2]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega\frac{u_\varepsilon{}^p}{v_\varepsilon{}^p}[d+|\nabla v_\varepsilon|^2]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega u_\varepsilon{}^p[\frac{d}{|\nabla v_\varepsilon|^2}+1]^{\frac{p}{2}-1}p|\nabla\log v_\varepsilon|^{p-2}\nabla\log v_\varepsilon\cdot(\nabla\log u_\varepsilon - \nabla\log v_\varepsilon)\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega v_\varepsilon{}^p[\frac{d}{|\nabla u_\varepsilon|^2}+1]^{\frac{p}{2}-1}|\nabla\log u_\varepsilon|^{p-2}\nabla\log u_\varepsilon\cdot(\nabla\log v_\varepsilon - \nabla\log u_\varepsilon)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由(17)式知,当 $1<p\leqslant 2$ 且 $0\leqslant d<+\infty$时,有

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\int_\Omega[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x + \int_\Omega[\frac{g(x,u)}{u^{p-1}}\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{g(x,u)}{v^{p-1}}\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x\\
\geqslant&\frac{3p(p-1)}{16}\int_\Omega(\frac{1}{v_\varepsilon{}^{p-1}}+\frac{1}{v_\varepsilon{}^{p-1}})\frac{(v_\varepsilon\nabla u - u_\varepsilon\nabla v)^2}{(v_\varepsilon|\nabla u|+u_\varepsilon|\nabla v|)^{2-p}}\mathrm{d}x\geqslant 0.
\end{aligned}$$

当 $p>2$ 且 $d=0$ 时,由(16)式知

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\int_\Omega[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x + \int_\Omega[\frac{g(x,u)}{u^{p-1}}\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{g(x,u)}{v^{p-1}}\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x\\
\geqslant&\frac{1}{2^{p-1}-1}\int_\Omega(\frac{1}{v_\varepsilon{}^{p-1}}+\frac{1}{v_\varepsilon{}^{p-1}})|v_\varepsilon\nabla u - u_\varepsilon\nabla v|^p\mathrm{d}x\geqslant 0.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0_+$, 我们得到$\frac{u}{u_\varepsilon}\to 1$, $\frac{v}{v_\varepsilon}\to 1$ 在 $\Omega$ 中几乎处处成立,且

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lambda_1\int_\Omega[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega[\frac{g(x,u)}{u^{p-1}}\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon{}^{p-1}} - \frac{g(x,u)}{v^{p-1}}\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon{}^{p-1}}](u_\varepsilon{}^p - v_\varepsilon{}^p)\mathrm{d}x\leqslant 0.
\end{aligned}$$

因此,在两种情况下,我们均有

$$|\nabla u - u\nabla v| = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 中几乎处处成立},$$

即 $u=kv$ 对某个常数 $k>0$ 成立. 由(18)和(19)知

$$\int_\Omega\frac{f(x,v)}{v^{p-1}}v^{p-1}\varphi\mathrm{d}x = \int_\Omega\frac{f(x,kv)}{(kv)^{p-1}}v^{p-1}\varphi\mathrm{d}x$$

对所有 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$成立,从而由$(F_2)$知 $k=1$,证毕. ▌

## 参 考 文 献

[1] Patrizia Pucci, James Serrin, Zou Henghui. A strong maximum principle a compact support principle for singular elliptic inequalities. J Math Pures Appl, 1999, **78**: 769－789

[2] Jiri Bouchala, Pavel Dribek. Strong Resonance for some quasilinear elliptic equations. J Mathematics Analysis and Applications, 2000, **245**: 7－19

[3] Li Gongbao, Zhou Huansong. Asymptotically linear Dirichlet problem for the $p$-Laplacian, Nonlinear Analysis, 2001, **43**: 1043－1055

[4] Pavel Drabek, Jesus Hernandez. Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems. Nonlinear Analysis, 2001, **44**: 189－204

[5] Peter Lindqvist. On the equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, **109**(1): 157－164

[6] Rabinnowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Amer Math Soc, 1986, **65**

[7] Tolksdorf P. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domain with conical boundary points. Communs partial diff Eqns, 1983, **8**: 773－817

[8] Tolksdorf P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. J diff Eqns, 1984, **51**(1): 121－150

[9] Ran Qikang, Fang Ainong. Existence of infinitely many solutions on a class of elliptic equations with Neumann problem. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2000, **21**(2): 87－95

[10] Shen yaotian, Yan Shusen. Variational method of quasilinear elliptic equations. GuangZhou: Academic Press, 1995

[11] 杨海涛,吴绍平. $R^N$ 上一类半线性椭圆方程解的存在唯一性和渐进性质. 数学物理学报, 1997, **17**(4): 403－411

# Existence and Uniqueness of Positive Solutions for a Class of Elliptic Problems

Ran Qikang

(*Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai* 200433)

**Abstract**: In this paper, the author studies the existence and uniqueness of positive solutions for the quasilinear elliptic problem

$$u|_{\partial\Omega}=0;\ -\mathrm{div}[(d+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1}\nabla u]=\lambda_1 u^{p-1}+g(x,u)\qquad x\in\Omega,$$

where $\Omega$ is a bounded domain in $R^N$, $\lambda_1$ is the first eigenvalue of $-\triangle_p$ on $\Omega$ subject to zero Dirichlet boundary conditions, and $g(x,t)$ satisfies the growth condition $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{g(x,t)}{t^{p-1}}=0$, $p>1$, $0\leqslant d<+\infty$.

**Key words**: Quasilinear elliptic problem; Saddle point; Positive solutions.

**MR(2000) Subject Classification**: 35J65