2009,**29A**(4):833–842

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

由分数次导数所确定的 $L_2(T)$ 中的一元周期函数类在 $L_q(T)$ 中的相对宽度 *

[1,2] 肖维维　[1] 刘永平 **

([1] 北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室　北京 100875;
[2] 北方工业大学理学院　北京 100144)

摘要: 作者研究了相对宽度 $K_n(W_2^\alpha(T),\ MW_2^\beta(T),\ L_2(T))$, $T=[0,2\pi]$, 确定了使等式 $K_n(W_2^\alpha(T),MW_2^\beta(T),L_2(T)) = d_n(W_2^\alpha(T),L_2(T))$ 成立的最小 M 值，得到了相对宽度 $K_n(W_2^\alpha(T),W_2^\alpha(T),L_q(T))$ 的渐近阶，其中 $\alpha\ge\beta>0$, $1\le q\le\infty$, $K_n(\cdot,\cdot,L_q(T))$ 和 $d_n(\cdot,L_q(T))$ 分别表示 Kolmogorov 意义下 $L_q(T)$ 尺度下的相对宽度和宽度， $MW_p^\alpha(T)$, $1\le p\le\infty$, 表示有如下卷积表达式的 2π 周期函数类， $f(t)=c+(B_\alpha*g)(t)$, $c\in R$, $B_\alpha*g$ 表示 B_α 和 g 的卷积， $g\in L_p(T)$ 满足 $\int_0^{2\pi}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0$ 和 $\|g\|_p\le M$, $B_\alpha\in L_1(T)$ 有如下 Fourier 展开： $B_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}{}'(\mathrm{i}k)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $\sum'$ 表示去掉 $k=0$ 的项.

关键词: 相对宽度； $n-K$ 宽度；分数次导数.

MR(2000) 主题分类: 41A46; 41A65; 46E35　**中图分类号**: O174　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)04-833-10

1　引言和结果

设 X 是一线性赋范空间， Y 是 X 的凸子集，定义量

$$E(x,Y,X)=E(x,Y)_X:=\inf_{y\in Y}\|x-y\|_X$$

为 Y 对 x 的最佳逼近. 量

$$E(W,M,X)=E(W,M)_X:=\sup_{x\in W}E(x,M)_X=\sup_{x\in W}\inf_{y\in M}\|x-y\|_X$$

表示集合 W 对集合 $M\subset X$ 的偏差.

1984 年，V. N. Konovalov 在文献 [1] 中提出了在 Kolmogorov 意义下相对宽度的定义. 设 W 和 V 是 Banach 空间 X 中的中心对称子集. W 相对于 V 在 X 中的 n 维宽度 (简称为相对宽度) 是

$$K_n(W,V,X):=\inf_{l_n}E(W,V\cap l_n)_X,$$

收稿日期：2007-10-29; 修订日期：2009-03-25

E-mail: ypliu@bnu.edu.cn; wwsunny@163.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10771016) 、北京师范大学“985 项目 ” 和北京自然科学基金 (1062004) 资助

** 通讯作者

此处下确界取遍 X 中的 n - 维子空间 l_n, $n \in \mathbf{Z}_+ := \{1,2,\cdots\}$. 当 $V = X$ 时，相对宽度就是 W 在 X 中的 n 维 Kolmogorov 宽度 (简记为 n-K 宽度), 记作 $d_n(W,X)$.

由定义知，对任意子集 $V \subseteq X$, 显然有

$$K_n(W,V,X) \geq d_n(W,X). \tag{1.1}$$

我们也把 $K_n(W,V,X)$ 和 $d_n(W,X)$ 分别简记作 $K_n(W,V)_X$ 和 $d_n(W)_X$.

设 $T=[0,2\pi]$. $C(T)$ 表示 2π 周期连续函数集. $L_p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, 表示 2π 周期 Lebesque 可测函数集且满足

$$\|f\|_{L_p(T)} := \Big(\int_T |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(T)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in T} |f(x)| < \infty, \quad p=\infty.$$

我们也把 $\|\cdot\|_{L_p(T)}$ 简记作 $\|\cdot\|_p$.

若 $k \in \mathbf{Z}$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(T)$ 的 k 阶 Fourier 系数是

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku}\mathrm{d}u.$$

记 $f \in L_1(T)$ 与 $g \in L_p(T)$ 的卷积为

$$(f*g)(x) = \int_T f(x-u)g(u)\mathrm{d}u.$$

如文献 [2–4], 我们给出分数次导数的定义如下.

函数 $f \in L_p(T)$ 的 $\alpha > 0$ 阶步长为 $h \in \mathbf{R}$ 的 (右) 差分定义为

$$(\triangle_h^\alpha f)(x) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-hj),$$

其中

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j=0,1,2,\cdots.$$

当 $\alpha = r$ 时，这与通常的整数差分 $\triangle_h^r f(x) (r \in \mathbf{Z}_+)$ 一致 (注意，当 $j \geq r+1$ 时， $\binom{r}{j}=0$).

若对于 $f \in L_p(T)$, 存在 $g \in L_p(T)$, $1 \leq p < \infty$, 使得

$$\lim_{h\to 0+} \|\frac{\triangle_h^\alpha f}{h^\alpha} - g\|_p = 0,$$

则 g 就叫做 f 在 L_p 意义下的 α 阶 Liouville-Grünwald 导数，用 $g = f^{(\alpha)}$ 表示.

若 f 和 g 属于 $C(T)$ 且

$$\lim_{h\to 0+} \Big\|\frac{\triangle_h^\alpha f}{h^\alpha} - g\Big\|_{C(T)} = 0,$$

则 g 就叫做 f 在一致范数意义下的 α 阶 Liouville-Grünwald 导数，用 $g = f^{(\alpha)}$ 表示.

设 $\alpha > 0$, $M > 0$, 我们用 $MW_p^\alpha(T)$, $1 \leq p \leq \infty$ 表示有如下形式的 2π 周期连续函数 f 的集合,

$$f(t) = c + (B_\alpha * g)(t), \tag{1.2}$$

其中， $g\in L_p(T)$, $\|g\|_p\le M$, $\int_T g(x)\mathrm{d}x=0$, 且 $B_\alpha t\in L_1(T)$ 有如下 Fourier 展式

$$B_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}{}'(\mathrm{i}k)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

$\sum'$ 表示去掉 $k=0$ 的项. 当 $M=1$ 时，用 $W_p^\alpha(T)$ 表示 $MW_p^\alpha(T)$. 不难证明：如果函数 f,g 满足 (1.2) 式，则当 $1\le p<\infty$ 时， g 是 f 在 L_p 意义下的 α 阶 Liouville-Grünwald 导数；当 $p=\infty$ 时, 若函数 g 还满足 $g\in C(T)$, 则 g 是 f 在一致范数意义下的 α 阶 Liouville-Grünwald 导数.

当 $\alpha=r$, $r\in\mathbf{Z}_+$ 时，函数类 $W_p^\alpha(T)$ 等同于通常意义下的 Sobolev 类 $W_p^r(T)$. 因此，我们也把 f 称作是 g 的 α 阶分数次不定积分.

V. N. Konovalov 在文献 [1] 中证明了

$$K_n(W_\infty^r,W_\infty^r)_\infty\asymp n^{-2},\quad r\ge 3.$$

$a_n\asymp b_n$ 表示对于正数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 存在两个正常数 c_1 和 c_2, 使对所有的 $n\in\mathbf{Z}_+$ 满足 $c_1a_n\le b_n\le c_2a_n$. 但在文献 [5–6] 中 V. M. Tikhomirov 得到

$$d_{2n-1}(W_\infty^r)_\infty=d_{2n}(W_\infty^r)_\infty=\mathcal{K}_rn^{-r},$$

其中 $\mathcal{K}_r$ 是著名的 Favard 常数. 这说明当 $r\ge 3$ 时，相对宽度与宽度是非常不同的，这也就引起了数学工作者对研究相对宽度的兴趣.

相对宽度的研究内容主要包括如下两个方面：一是估计 $K_n(W_p^r(T),MW_p^r(T),L_q(T))$ 的渐近阶，特别是研究 $M=1$ 或 $M=1+\varepsilon$ 的情形；二是研究使等式 $K_n(W_p^r(T),MW_p^r(T),L_q(T))=d_n(W_p^r(T),L_q(T))$ 成立的最小 M 值.

关于第一个问题有如下一些结果. V. M. Tikhomirov 在文献 [7] 中把文献 [1] 中的结果推广到分数次导数. V. F. Babenko 在文献 [8] 中研究了由混合偏导数所确定的多元周期可微函数类在 $p=q=1$ 情形下相对宽度的渐进阶. 在此之后， V. N. Konovalov 在文献 [9] 中研究了 $p=2,1\le q\le\infty$ 情形下一元周期 Sobolev 类的相对宽度的渐进阶，在文献 [10] 中研究了 $p=\infty,1\le q\le\infty$ 和 $p=1,(r,q)\ne(1,\infty)$ 情形下一元周期 Sobolev 类的相对宽度的渐近阶. 刘永平和杨连红在文献 [11] 中研究了由重 Laplace 算子所确定的多元周期可微函数类在 $p=2,1\le q\le\infty$ 情形下的相对宽度的渐近阶，在文献 [12] 中把文献 [10] 中的部分结果推广到了分数次导数.

关于第二个问题有如下一些结果. 在文献 [13] 中 Y. N. Subbotin 和 S. A. Telyakovskii 得到了使等式

$$K_{2m-1}(W_2^r(T),MW_2^r(T),L_2(T))=K_{2m}(W_2^r(T),MW_2^r(T),L_2(T))=m^{-r}$$

成立的最小 M 值为 $1-m^{-r}$, 其中 m 和 r 是正整数. 肖维维和刘永平在文献 [14] 中研究了分别由重 Laplace 算子和混合偏导数所确定的多元周期可微函数类及定义在球面上由重 Laplace-Beltrami 算子所确定的多元可微函数类在 $L_2(T)$ 尺度下的相对宽度的精确值，在文献 [15] 中研究了定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的 Riesz 位势和 Bessel 位势在 $L_2(\mathbf{R}^d)$ 尺度下的相对平均宽度问题，进而把周期情形下的相对宽度结果推广到了 $\mathbf{R}^d$ 空间中去.

本文中，我们的主要结果是如下两个定理.

定理 1.1 设 $n\in\mathbf{Z}_+$, $\alpha\ge\beta>0$. 则使等式

$$K_m(W_2^\alpha(T),MW_2^\beta(T))_{L_2(T)}=d_m(W_2^\alpha(T))_{L_2(T)}=n^{-\alpha},\quad m=2n\text{ 或 }2n-1 \tag{1.3}$$

成立的最小 M 值是 $M_0 := 1 - n^{-\alpha}$, 且

$$K_{2n-1}(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T))_{L_2(T)} = K_{2n}(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T))_{L_2(T)} = \begin{cases} 1-M, & 0 < M < M_0, \\ n^{-\alpha}, & M \geq M_0. \end{cases}$$

定理 1.2 设 $n \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha > 0$, 且 $1 \leq q \leq \infty$. 则

$$K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T), L_q(T)) \asymp n^{-\min\{\alpha-1/2+1/q, \alpha\}}.$$

2 定理 1.1 的证明

设

$$f_0(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},$$

易知 $f_0(x) \in W_2^\alpha(T)$. 由相对宽度的定义可知，对任何 $M > 0$ 有

$$K_{2n}(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T), L_2(T)) \geq \inf_{g \in MW_2^\beta(T)} \|f_0 - g\|_{L_2(T)}. \tag{2.1}$$

若 $0 < M < 1$, 则

$$\inf_{g \in MW_2^\beta(T)} \|f_0 - g\|_{L_2(T)} = 1 - M. \tag{2.2}$$

事实上，对任何 $g \in MW_2^\beta(T)$,

$$\|f_0 - g\|_{L_2(T)}^2 \geq (\|f_0\|_{L_2(T)} - \|g\|_{L_2(T)})^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们知道当且仅当 $g = Cf_0$, $C \in \mathbf{R}$ 时上述不等式取等号. 由于 $\|g^{(\beta)}\|_{L_2(T)} \leq M$ 和 $\|f_0^{(\beta)}\|_{L_2(T)} = 1$, 可得 $0 \leq |C| \leq M$. 又由于 $\|f_0\|_{L_2(T)} = 1$, 这就意味着 (2.2) 式成立. 由 (2.1) 和 (2.2) 式得

$$K_{2n}(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T), L_2(T)) \geq 1 - M, \quad 0 < M < 1. \tag{2.3}$$

因此，要使 (1.3) 式成立必有 $1 - M \leq n^{-\alpha}$, 即

$$M \geq 1 - n^{-\alpha} = M_0. \tag{2.4}$$

下证

$$K_{2n-1}(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T), L_2(T)) \leq 1 - M, \quad 0 < M \leq M_0. \tag{2.5}$$

事实上，对任何 $f \in W_2^\alpha(T)$, 记其 Fourier 展式为

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

其中 $a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$, $k = 0, 1, \cdots$, $b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$, $k = 1, 2, \cdots$. 函数 f 的 Fourier 展式也可写成如下复形式

$$\sum_{v \in \mathbf{Z}} c_v(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}vx},$$

其中当 v 是正整数时， $c_v(f)=\frac{a_v(f)-\mathrm{i}b_v(f)}{2}$, $c_{-v}(f)=\frac{a_v(f)+\mathrm{i}b_v(f)}{2}$, $c_0(f)=\frac{a_0(f)}{2}$. 由此可知

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L_2(T)}^2=2\pi\sum_{v\in\mathbf{Z}}c_v(f)c_{-v}(f)v^{2\alpha}=\pi\sum_{v=1}^{\infty}v^{2\alpha}(a_v^2(f)+b_v^2(f))\le 1. \tag{2.6}$$

记

$$T_{2n-1}(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}M(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx).$$

易知 $T_{2n-1}(f,x)\in MW_2^{\beta}(T)$. 当 $0<M\le M_0$ 时，有

$$(1-M)n^{\alpha}\ge 1. \tag{2.7}$$

由 (2.6) 和 (2.7) 式可知

$$\|f(\cdot)-T_{2n-1}(f,\cdot)\|_{L_2(T)}^2\le(1-M)^2.$$

由此得到 (2.5) 式. 由 (2.3) 和 (2.5) 式以及

$$K_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T),L_2(T))\ge K_{2n}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T),L_2(T)), \tag{2.8}$$

可得当 $0<M\le M_0$ 时，有

$$K_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}=K_{2n}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}=1-M. \tag{2.9}$$

把 M_0 代入 (2.9) 式，由 (2.4) 式知使等式 (1.3) 成立的最小 M 值是 M_0. 显然， M 值越大，$K_n(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T),L_2(T))$ 就越小. 因此，当 $M\ge M_0$ 时有

$$K_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}\le K_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),M_0W_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}=n^{-\alpha}. \tag{2.10}$$

由文献 [16] 及 (2.6) 式知

$$d_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),L_2(T))=d_{2n}(W_2^{\alpha}(T),L_2(T))=n^{-\alpha}. \tag{2.11}$$

由 (1.1) 和 (2.11) 式知，对任何 $M>0$ 有

$$K_{2n}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T),L_2(T))\ge d_{2n}(W_2^{\alpha}(T),L_2(T))=n^{-\alpha}. \tag{2.12}$$

因此，由 (2.8), (2.10) 及 (2.12) 式知，当 $M\ge M_0$ 时，有

$$K_{2n}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}=K_{2n-1}(W_2^{\alpha}(T),MW_2^{\beta}(T))_{L_2(T)}=n^{-\alpha}. \tag{2.13}$$

定理 1.1 证毕. ∎

3 定理 1.2 的证明

为证明定理 1.2, 我们先给出如下几个引理.

引理 A (孙永生 [17]) 设 X 为一实线性赋范空间， X^* 为 X 的对偶空间， Y 为 X 中一凸子集. 则对任何 $x\in X$ 下述等式成立，

$$E(x,Y)_X:=\inf_{y\in Y}\|x-y\|_X=\sup_{x^*\in X^*,\|x^*\|_{X^*}\le 1}(\langle x^*,x\rangle-\sup_{y\in Y}\langle x^*,y\rangle),$$

其中 $\langle x^*, x\rangle$ 表示线性泛函 x^* 在 $x\in X$ 处的值.

上述引理通常被称作是对偶定理.

引理 B (Pinkus[18]) 设 $y\in L_2(T)$ 有如下 Fourier 展式

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(y)\cos kt+b_k(y)\sin kt),$$

$c_{k_1}(y)\ge c_{k_2}(y)\ge\cdots$ 为序列 $\{c_k(y)\}$ 的非增重排, 其中 $c_k(y):=(a_k^2(y)+b_k^2(y))^{1/2}$, $k=1,2,\cdots$. 记

$$K(y):=\{y_\alpha|y_\alpha(\cdot):=y(\cdot+\alpha),\alpha\in[0,2\pi]\}.$$

则

$$d_{2n}(K(y),L_2(T))\ge\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}c_{k_m}^2(y)\Big)^{1/2}.$$

上述引理是 Ismagilov 定理的推论.

由文献 [12] 中定理 4 的注，可得如下引理.

引理 C (刘永平，杨连红 [12]) 若 $f\in W_p^r(T)(1\le p<\infty)$, 则当实数 α 满足 $0<\alpha<r$ 时， f 的 Liouville-Grünwald 导数 $f^{(\alpha)}$ 存在且属于 $L_p(T)$, 同时成立如下不等式

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L_p(T)}\le C\|f\|_{L_p(T)}^{1-\frac{\alpha}{r}}\|f^{(r)}\|_{L_p(T)}^{\frac{\alpha}{r}},\tag{3.1}$$

其中 C 仅依赖于 α 和 r.

与文献 [9] 中的证明类似，可证得如下引理.

引理 3.1 设 $n\in\mathbf{Z}_+$, $\alpha>0$, $1\le q\le\infty$, $1/q+1/q'=1$, $y\in L_{q'}(T)$ 满足 $\|y\|_{q'}\ne 0$, $\int_T y(t)\mathrm{d}t=0$, 则

$$\begin{aligned}&K_n(K(B_{2\alpha}*y),W_2^\alpha(T))_{L_q(T)}\\ \ge{}&\|B_\alpha*y\|_2\|y\|_{q'}^{-1}(\|B_\alpha*y\|_2-(\|B_\alpha*y\|_2^2-(d_n(K(B_\alpha*y))_{L_2(T)})^2)^{1/2}).\end{aligned}$$

至此我们用 c 来表示与 n 无关的常数. 与文献 [18] 中的证明类似，可证得如下引理.

引理 3.2 设 $n\in\mathbf{Z}_+$, $1\le q\le\infty$. 则 $d_n(W_2^\alpha(T),L_q(T))\ge cn^{-\alpha}$.

定理 1.2 的证明 首先我们来证上界. 用 T^{2n-1} 表示形如 $T_n(x)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的三角多项式组成的空间.

对任何 $f\in W_2^\alpha(T)$, 设其 Fourier 展式为

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx),$$

且其 Fourier 部分和为

$$S_n(f,x):=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx).$$

通过简单计算可得到

$$\|f^{(\alpha)}\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\pi k^{2\alpha}(a_k^2(f)+b_k^2(f)).$$

由于 $\|S_n^{(\alpha)}(f,\cdot)\|_2 \le \|f^{(\alpha)}\|_2 \le 1$, 故 $S_n(f,x) \in T^{2n-1} \cap W_2^\alpha(T)$ 且 $\|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_2 \le n^{-\alpha}$.

因此，成立如下不等式

$$E(W_2^\alpha(T), T^{2n-1} \cap W_2^\alpha(T))_{L_2(T)} \le n^{-\alpha}.$$

当 $1 \le q \le 2$ 时，注意到不等式 $\|f\|_q \le (2\pi)^{1/q-1/2}\|f\|_2$. 因此可得

$$K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \le cn^{-\alpha}, \quad 1 \le q \le 2. \tag{3.2}$$

当 $2 < q \le \infty$ 时，取定 $m \in \mathbf{Z}_+$, 有

$$f(x) - S_{2^m}(f,x) = \sum_{\mu=m}^{\infty} (S_{2^{\mu+1}}(f,x) - S_{2^\mu}(f,x)),$$

因此

$$\|f(\cdot) - S_{2^m}(f,\cdot)\|_q \le \sum_{\mu=m}^{\infty} \|S_{2^{\mu+1}}(f,\cdot) - S_{2^\mu}(f,\cdot)\|_q. \tag{3.3}$$

由文献 [19] 可知

$$\|S_{2^{\mu+1}}(f,\cdot) - S_{2^\mu}(f,\cdot)\|_q \le 3(2^{\mu+1}-1)^{1/2-1/q}\|S_{2^{\mu+1}}(f,\cdot) - S_{2^\mu}(f,\cdot)\|_2, \quad \mu \ge m.$$

显然

$$\|S_{2^{\mu+1}}(f,\cdot) - S_{2^\mu}(f,\cdot)\|_2 \le c2^{-\mu\alpha}.$$

因此，当 $\mu \ge m$ 时，我们有

$$\|S_{2^{\mu+1}}(f,\cdot) - S_{2^\mu}(f,\cdot)\|_q \le 3(2^{\mu+1}-1)^{1/2-1/q}c2^{-\mu\alpha} \le c2^{-(\alpha-1/2+1/q)\mu}.$$

由 (3.3) 式可知

$$\|f(\cdot) - S_{2^m}(f,\cdot)\|_q \le c\sum_{\mu=m}^{\infty} 2^{-(\alpha-1/2+1/q)\mu} \le c2^{-(\alpha-1/2+1/q)m}.$$

因此，对任何 $m \in \mathbf{Z}_+$, 我们有

$$E(W_2^\alpha(T), T^{2^{m+1}-1} \cap W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \le c2^{-(\alpha-1/2+1/q)m}, \quad 2 < q \le \infty.$$

即，对任何 $n \in \mathbf{Z}_+$, 我们有

$$K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \le cn^{-(\alpha-1/2+1/q)}, \quad 2 < q \le \infty. \tag{3.4}$$

由 (3.2) 及 (3.4) 式，我们就得到了定理 1.2 中渐近式的上界估计.

下面我们给出下界的证明. 由于 $K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \ge d_n(W_2^\alpha(T), L_q(T))$, 因此利用引理 3.2 可得

$$K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \ge cn^{-\alpha}, \quad 1 \le q \le 2. \tag{3.5}$$

当 $2 < q < \infty$ 时，设

$$D_m(x) := \sum_{v \in \mathbf{Z}, |v| < m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}, \quad m \in \mathbf{Z}_+.$$

令

$$y_n(x) := D_{4n}(x) - D_n(x), \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

显然有

$$K(\|B_\alpha * y_n\|_2^{-1}(B_{2\alpha} * y_n)) \subset W_2^\alpha(T).$$

因此，我们可以得到

$$\begin{aligned} K_{2n}(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} &\geq K_{2n}(K(\|B_\alpha * y_n\|_2^{-1}(B_{2\alpha} * y_n)), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \\ &= \|B_\alpha * y_n\|_2^{-1} K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

利用引理 3.1, 可知

$$\begin{aligned} &K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \\ \geq\ &\|B_\alpha * y_n\|_2 \|y_n\|_{q'}^{-1}(\|B_\alpha * y_n\|_2 - (\|B_\alpha * y_n\|_2^2 - (d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)))^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

由 y_n 的定义可知 $\|y_n\|_{q'} \leq \|D_{4n}\|_{q'} + \|D_n\|_{q'}$. 利用不等式

$$a(a - (a^2 - b^2)^{1/2}) \geq \frac{1}{2} b^2, \qquad a > b > 0, \tag{3.7}$$

我们可以得到

$$K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \geq \frac{1}{2}(\|D_{4n}\|_{q'} + \|D_n\|_{q'})^{-1}(d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)))^2. \tag{3.8}$$

由 (3.6) 和 (3.8) 式可知

$$K_{2n}(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \geq \|B_\alpha * y_n\|_2^{-1} \frac{1}{2}(\|D_{4n}\|_{q'} + \|D_n\|_{q'})^{-1}(d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)))^2. \tag{3.9}$$

由 y_n 的定义我们知道

$$(B_\alpha * y_n)(x) = \sum_{|v|=n}^{4n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}}{(\mathrm{i}v)^\alpha}.$$

因此

$$\|B_\alpha * y_n\|_2^2 = 2\pi \sum_{|v|=n}^{4n-1} \frac{1}{|(\mathrm{i}v)|^{2\alpha}} \leq 12\pi n^{-2\alpha+1}. \tag{3.10}$$

利用引理 B, 可得

$$d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)) \geq c n^{-\alpha+1/2}. \tag{3.11}$$

由文献 [20] 知

$$\|D_m\|_{q'} \leq c m^{1/q}, \quad m \in \mathbf{Z}_+. \tag{3.12}$$

由 (3.9) 至 (3.12) 式可得

$$K_{2n}(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_q(T)} \geq c n^{-\alpha+1/2-1/q}, \quad 2 < q < \infty. \tag{3.13}$$

当 $q = \infty$ 时，设

$$V_{m,n}(x) := D_n(x) + \frac{m}{m-n} \sum_{|v|=n+1}^{m-1} \Big(1 - \frac{|v|}{m}\Big) \mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}, \quad m, n \in \mathbf{Z}_+, \quad n < m.$$

令

$$y_n(x) := V_{5n,n}(x) - V_{3n,n}(x),$$

即

$$y_n(x) = \frac{1}{4}\sum_{|v|=n+1}^{3n-1}\Big(\frac{|v|}{n}-1\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx} - \frac{5}{4}\sum_{|v|=3n}^{5n-1}\Big(1-\frac{|v|}{5n}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}.$$

则

$$(B_\alpha * y_n)(x) = \frac{1}{4}\sum_{|v|=n+1}^{3n-1}\Big(\frac{|v|}{n}-1\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}}{(\mathrm{i}v)^\alpha} - \frac{5}{4}\sum_{|v|=3n}^{5n-1}\Big(1-\frac{|v|}{5n}\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}}{(\mathrm{i}v)^\alpha}.$$

利用引理 B 可得

$$d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)) \geq cn^{-\alpha+1/2}. \tag{3.14}$$

通过简单计算可得

$$\|B_\alpha * y_n\|_2 \leq cn^{-\alpha+1/2}. \tag{3.15}$$

又由文献 [21] 可知

$$\max\{\|V_{5n,n}\|_1, \|V_{3n,n}\|_1\} \leq c, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \tag{3.16}$$

由于 $K(\|B_\alpha * y_n\|_2^{-1}(B_{2\alpha} * y_n)) \subset W_2^\alpha(T)$, 因此

$$\begin{aligned} K_{2n}(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)} &\geq K_{2n}(K(\|B_\alpha * y_n\|_2^{-1}(B_{2\alpha} * y_n)), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)} \\ &= \|B_\alpha * y_n\|_2^{-1} K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

由引理 3.1 和 (3.7) 式可得

$$K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)} \geq \frac{1}{2}\|y_n\|_1^{-1}(d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)))^2.$$

注意到 $\|y_n\|_1 \leq \|V_{5n,n}\|_1 + \|V_{3n,n}\|_1$, 我们得到

$$K_{2n}(K(B_{2\alpha} * y_n), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)} \geq \frac{(d_{2n}(K(B_\alpha * y_n), L_2(T)))^2}{2(\|V_{5n,n}\|_1 + \|V_{3n,n}\|_1)}. \tag{3.18}$$

由 (3.14) 至 (3.18) 式，我们得到

$$K_{2n}(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T))_{L_\infty(T)} \geq cn^{-\alpha+1/2}. \tag{3.19}$$

由 (3.5), (3.13) 及 (3.19) 式，我们得到了定理 1.2 的下界估计. 定理 1.2 证毕. ∎

参 考 文 献

[1] Konovalov V N. Estimates of diameters of Kolmogorov type for classes of differentiable periodic functions. Mat Zametki, 1984, **35**(3): 369–380

[2] Butzer P L, Westphal U. An Access to Fractional Differentiation via Fractional Difference Quotients//Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1975

[3] Butzer P L, Dyckhoff H, Görlich E, Stens R L. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes. Canad J Math, 1977, **29**(4): 781–793

[4] Zygmund A. Trigonometric Series I-II. New York: Cambridge University Press, 1959

[5] Tikhomirov V M. Widths of sets in functional spaces and theory of best approximations. Uspekhi Mat Nauk, 1960, **15**(3): 81–120

[6] Tikhomirov V M. Best methods for approximation and interpolation of differentiable functions in the space $C[-1,1]$. Mat Sb, 1969, **80**(2): 290–304

[7] Tikhomirov V M. Some remarks on relative diameters. Banach Center Publ, 1989, **22**: 471–474

[8] Babenko V F. On the relative widths of classes of functions with bounded mixed derivative. East J Approx, 1996, **2**(3): 319–330

[9] Konovalov V N. Approximation of Sobolev classes by their sections of finite dimensional. Ukain Math J, 2002, **54**(5): 795–805

[10] Konovalov V N. Approximation of Sobolev classes by their finite-dimensional sections. Mat Zametki, 2002, **72**(3): 370–382

[11] Liu Yongping, Yang Lianhong. Relative width of smooth classes of multivariate periodic functions with restrictions on iterated Laplace derivatives in the L_2-metric. Acta Math Scientia, 2006, **26B**(4): 720–728

[12] Liu Yongping, Yang Lianhong. Relative widths of smooth functions determined by fractional order derivatives. J Complexity, 2008, **24**: 259–282

[13] Subbotin Y N, Telyakovskii S A. Relative widths of classes of differentiable functions in the L^2 metric. Uspekhi Mat Nauk, 2001, **56**(4): 159–160

[14] 肖维维，刘永平． L_2 尺度下可微函数类的相对宽度．北京师范大学学报 (自然科学版), 2007, **43**(5): 493–495

[15] Liu Yongping, Xiao Weiwei. Relative average width of Sobolev space in $L_2(R^d)$. Analysis Mathematica, 2008, **34**(1): 71–82

[16] Lorentz G G, Golitschek M V, Makovoz Y. Constructive Approximation. Berlin: Springer, 1996

[17] 孙永生．函数逼近论 (上册)．北京：北京师范大学出版社， 1989

[18] Pinkus A. n-widths in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1985

[19] Nikol'skii S M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. New York: Springer-Verlag, 1975

[20] Tikhomirov V M. Some Problems in Approximation Theory (in Russian). Moscow: Moscow University, 1976

[21] Dzyadyk V K. Introduction to the Theory of Uniform Polynomial Approximation of Functions (in Russian). Moscow: Nauka, 1977

Relative Widths of Function Classes of $L_2(T)$ Determined by Fractional Order Derivatives in $L_q(T)$

[1,2]Xiao Weiwei [1]Liu Yongping

([1]*School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, Beijing 100875;*

[2]*College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100144*)

Abstract: The relative widths $K_n(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T), L_2(T))$, $T=[0,2\pi]$, is studied and the smallest number M which makes the equality $K_n(W_2^\alpha(T), MW_2^\beta(T), L_2(T)) = d_n(W_2^\alpha(T), L_2(T))$ valid is obtained, and the asymptotic order of relative widths $K_n(W_2^\alpha(T), W_2^\alpha(T), L_q(T))$ is obtained, where $\alpha \ge \beta > 0$, $1 \le q \le \infty$, $K_n(\cdot,\cdot,L_q(T))$ and $d_n(\cdot, L_q(T))$ denote respectively the relative widths and the widths in the sense of Kolmogorov in $L_q(T)$, and $MW_p^\alpha(T)$, $1 \le p \le \infty$, denotes the collection of 2π-periodic and continuous functions f representable as a convolution $f(t) = c + (B_\alpha * g)(t)$, where $B_\alpha * g$ denotes the convolution of B_α and g, for $g \in L_p(T)$ satisfying $\int_0^{2\pi} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$ and $\|g\|_p \le M$. Here B_α is in $L_1(T)$ with the Fourier expansion $B_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}{}'(\mathrm{i}k)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, where $\sum'$ means that the term is omitted when $k=0$.

Key words: Relative widths; $n-K$ widths; Derivatives of fractional order.

MR(2000) Subject Classification: 41A46; 41A65; 46E35