2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

与非光滑半群相伴的加权 Hardy 和 BMO 空间 *

许明

(暨南大学数学系　广州 510632)

摘要: 本文中我们给出与非光滑核有关的半群所刻画的加权 Hardy 空间与 BMO 空间，讨论了它们的性质与对偶性.

关键词: Hardy 空间；　BMO 空间；半群.

MR(2000) 主题分类: 42B20; 47B38　　**中图分类号**: O174.2　　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1　引言

给定线性算子 L 在 $L^2(R^n)$ 上产生的解析半群 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$, 它的核为 $p_t(x,y)$. 就我们所知，如果 L 是一个系数为实的，对称的椭圆算子 (见 [1]), 或者 $L=\triangle+V$ 是一个带有适合的位势算子 V 的 Schrödinger 算子 (见 [2]), 或者 L 是一个散度型的带有复的，对称以及适合维数的椭圆算子 ([3] [4]), 那么 $\{e^{-tL}\}$ 具有所谓 Gaussian 性质：

$$|p_t(x,y)|\le c/t^{n/2}e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}. \tag{1}$$

在传统理论中，当算子是 Laplace 算子时，相关的 Hardy 空间与 BMO 空间理论可见 [5]. 在 [6] 中， J. Dziubański 以及其他给出了一种相伴于 Schrödinger 算子的 Hardy 空间与 BMO 空间. 在 [7][8] 中， X.T.Duong 以及 L.X.Yan 定义了一种相伴于满足条件 (1.1) 的算子 L 的 Hardy 空间以及 BMO 空间，指出了这类空间与传统的 Hardy 空间与 BMO 空间是不同的. 问题自然产生了：加劝的情况如何？本文的目的就是回答这个问题. 就我们所知，传统的加权 Hardy 空间已经被多位作者讨论过，详细的细节可以参见 [9]. 实际上，本文讨论的加权 Hardy 空间更接近于 [10] 中的帐篷空间. 我们的劝属于 A_p 权

定义 1　我们称一个正函数 $\omega\in A_p(R^n)$ $(1\le p\le\infty)$ 权，如果 ω 满足

$$\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B\omega(Y)\mathrm{d}Y\cdot\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(Y)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}Y\Big)^{p-1}<\infty; \tag{2}$$

$$\frac{1}{|B|}\int_B\omega\mathrm{d}Y<Cess\inf_B\omega, \tag{3}$$

其中 B 是 R^n 中的任一球，满足 (2) 的权被称为 $A_pAH((1<p<\infty)$, 而满足 (3) 的被称为 A_1 权，那么 $A_\infty=\bigcup\limits_{p\ge1}A_p$.

收稿日期: 2007-10-08; 修订日期: 2008-11-06

E-mail: stxmin@163.com

* 基金项目：暨南大学青年基金

本文结构如下：在第 2 部分，我们给出一些记号和假设；在第三部分，我们给出相伴于 L 的加劝 BMO 空间的性质；第四部分，我们讨论加劝 Hardy 空间以及 BMO 空间的对偶性.

2 一些记号与假设

本文我们给出两个假设

假设 (a) 全纯半群 e^{-zL}, 其中 $|arg(z)|<\pi/2-\theta$, 它的核 $a_z(x,y)$ 满足对于所有 $\nu>\theta$

$$|a_z(x,y)|\le c_\nu h_{|z|}(x,y)$$

其中 $x,y\in R^n$ and $|arg(z)|<\pi/2-\nu$, $h_t(x,y)=\frac{s(|x-y|^m/t)}{|B(x,t^{1/m})|}$, $t,m>0$, 而 s 是一个正的，有界的，单调减的函数满足

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\kappa}s(r^m)=0,$$

其中 $\kappa>0$

假设 (b) 算子 L 在 $L^2(R^n)$ 中有有界全纯 H_∞ 泛函运算. 关于 H_∞ 泛函运算，读者可参阅 [11][3].

本文中 $L^p_\omega(R^n=\{f:\int_{R^n}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x<\infty\}$ for $1<p<\infty$. 对于 $p=\infty$, $L^\infty_\omega=\{f:\sup|f(x)\omega(x)|<\infty\}$. 我们还有 $\omega(B)=\int_B\omega(x)\mathrm{d}x$.

3 BMO 空间与加权 Carleson 测度

设 $P_t=e^{-tL}$, $Q_t=tLe^{-tL}$, 那么

定义 2 称算子 $\{A_t:t>0\}$ 是恒等逼近，如果 A_t 的核 $a_t(x,y)$ 满足

$$A_tu(x)=\int_{R^n}a_t(x,y)u(y)dy$$

对于 $u\in L^2(R^n)\cap L^1(R^n)$, 且 $a_t(x,y)$ 满足

$$|a_t(x,y)|\le h_t(x,y)$$

对于 $x,y\in R^n$, 其中 $h_t(x,y)=\frac{s(|x-y|^m/t)}{|B(x,t^{1/m})|}$, $m>0$, 而 s 是正的，有界的，单调减的满足

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\kappa}s(r^m)=0,$$

对于某 $\kappa>0$.

下面我们设 $p_t(x,y)$ 是 $P_t=e^{-tL}$ 的核, 可以看作一恒等逼近, 而 $Q_t=tLe^{-tL}$, 设 $p_t(x,y)$ 满足所谓 Poisson 界对于 $m>0$

$$|p_t(x,y)|\le h_t(x,y)=t^{-n/m}s\Big(\frac{|x-y|}{t^{1/m}}\Big),$$

其中 s 是正的，有界的，单调减的满足

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\kappa}s(r^m)=0,$$

对于某 $\kappa > 0$.

而且在 [4] 中，证明了存在 $c > 0$ 使得 $h_t(x,y)$ 满足

$$c^{-1} \leq \int_{R^n} h_t(x,y)\mathrm{d}x \leq c, \quad c^{-1} \leq \int_{R^n} h_t(x,y)dy \leq c.$$

定义 3 给定一核为 $a_t(x,y)$ 的恒等逼近 $A_t(x,y)$, $\omega \in A_\infty$, 那么局部可积函数 $f \in BMO_L^\omega(R^n)$, 如果

$$\sup_B \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(y) - A_{t_B}(f)|dy < \infty.$$

定义 4 定义在 R^n 上的测度 μ 称为加权 Carleson 测度对于 $\omega \in A_\infty$, 如果存在 $c > 0$ 使得对任何球 B(半径 $r > 0$)

$$\mu(\hat{B}) \leq cP\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)|B|,$$

其中 $\hat{B} = \{(x,t) : x \in B, 0 < t < r\}$ 且 $P(\cdot)$ 表示一正的函数. μ 的范数表示为 $|||\mu|||_c = \inf\{c\}$.

我们需要下列引理

引理 1 如果 $f \in BMO_L^\omega$ 且 $0 < c < \omega \in A_\infty$, 那么

$$\frac{1}{|B|}\mu(\hat{B}) = \frac{1}{|B|} \int_{\hat{B}} |Q_{t^m}(I - P_{t^m})(f)(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \leq c(\frac{\omega(B)}{|B|})^2 \|f\|_{BMO_L^\omega}^2.$$

引理 1 的证明 在我们证明引理 1 时，我们需要证明下面的引理

引理 2 (John-Nirenberg 不等式) 设 $f \in BMO_L^\omega(R^n)$ 且 $0 < c < \omega \in A_\infty$, 那么对于任何球 B 且 $\lambda > 0$, 存在 $c_1, c_2 > 0$ 使得

$$\Big|\Big\{x \in B : |f(x) - P_{r_B^m}(f)| > \lambda \frac{\omega(B)}{|B|}\Big\}\Big| \leq c_1|B| \exp\Big\{-\frac{c_2\lambda}{\|f\|_{BMO_L^\omega}}\Big\},$$

其中 r_B 是 B 的半径.

引理 2 的证明 设 $\|f\|_{BMO_L^\omega} = 1$. 对于 $\lambda < 1$, 由于 $c|B| \leq \omega(B)$, 不等式自然成立，因此我们仅需要证明如果 $N \leq \lambda < N+1 (N > 1)$,

$$\Big|\Big\{x \in B : |f(x) - P_{r_B^m}(f)| > N \frac{\omega(B)}{|B|}\Big\}\Big| \leq c_1|B| \exp\{-c_2 N\}, \tag{4}$$

这可以用 Calderón-Zygmund 分解有限次得到. 我们知道

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - P_{r_B^m}(f)|\mathrm{d}x \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - P_{r_B^m}(f)|\mathrm{d}x \leq \frac{\omega(B)}{|B|}.$$

那么对球 B 上的 $f(x) - P_{r_B^m}(f)$ 构造 Calderón-Zygmund 分解，我们有了一族球 $\{B_{1,i}\}$(每个球与其他相交球的个数是一致有界的). 我们有：

(i) $|f(x) - P_{r_B^m}(f)| \leq 2\frac{\omega(B)}{|B|}$, $x \in B \backslash \bigcup_i B_{1,i}$.

(ii) $\sum_i |B_{1,i}| \leq \frac{1}{2}|B|$.

接着对球 B 上的 $f(x) - P_{r_{B_{1,i}}^m}(f)$ 构造 Calderón-Zygmund 分解，不难得到

$$|P_{r_{B_{1,i}}^m}(f)(x) - P_{r_B^m}(f)(x)| \leq c2\frac{\omega(B)}{|B|}, \quad x \in B_{1,i}.$$

因此我们有

(i) $|f(x)-P_{r^m_{B_{1,i}}}(f)|\le 2\frac{\omega(B)}{|B|}, x\in B_{1,i}\backslash\bigcup\limits_k B_{1,i,k}$.

(ii) $\sum\limits_k |B_{1,i,k}|\le\frac{1}{2}|B_{1,i}|$.

(iii) $|f(x)-P_{r^m_B}(f)|\le|f(x)-P_{r^m_{B_{1,i}}}(f)|+|P_{r^m_{B_{1,i}}}(f)(x)-P_{r^m_B}(f)(x)|\le 2c\frac{\omega(B)}{|B|}, x\in B\backslash\bigcup\limits_{i,k}B_{1,i,k}$.

注意到 $B_{1,i,k}=B_{2,m}$. 由性质 (ii), 我们得到 $\sum\limits_{i,k}|B_{1,i,k}|\le(\frac{1}{2})^k|B|$. 用 N 次的 Calderón-Zygmund 分解，我们有

(i) $\sum\limits_m |B_{N,m}|\le(\frac{1}{2})^N|B|$.

(ii) $|f(x)-P_{r^m_B}(f)|\le 2cN\frac{\omega(B)}{|B|}, x\in B\backslash\bigcup\limits_m B_{N,m}$.

选择适合的 c_1 and c_2, 第一个不等式就是 (4), 引理 2 得证.

那么下面的推论就即得

推论 1 设 $0<c<\omega\in A_\infty$, 那么对于 $f\in BMO_L^\omega$ 和任何球 B

$$\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-P_{r^m_B}(f)(x)|^2\mathrm{d}x\le c\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\|f\|_{BMO_L^\omega}.$$

推论 1 的证明 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-P_{r^m_B}(f)(x)|^2\mathrm{d}x\\
\le{}& 2\frac{1}{|B|}\int_0^\infty\lambda\{x\in B:|f(x)-P_{r^m_B}(f)(x)|>\lambda\}\mathrm{d}\lambda\\
\le{}& 2\frac{1}{|B|}\int_0^\infty\lambda'\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\Big\{x\in B:|f(x)-P_{r^m_B}(f)(x)|>\lambda'\frac{\omega(B)}{|B|}\Big\}\mathrm{d}\lambda'\\
\le{}& c\int_0^\infty\lambda'\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\exp\Big\{-\frac{c\lambda'}{\|f\|_{BMO_L^\omega}}\Big\}\mathrm{d}\lambda'\\
\le{}& c\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\|f\|^2_{BMO_L^\omega}.\end{aligned}$$

因此推论 1 得证.

与 [7] 中引理 4.6 类似，我们有

$$Q_{t^m}(I-P_{t^m})=Q_{t^m}(I-P_{t^m})(I-P_{r^m_B})+Q_{t^m}(I-P_{t^m})P_{r^m_B}.$$

因此我们需要证明

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_{\hat{B}}|Q_{t^m}(I-P_{t^m})(I-P_{r^m_B})(f)(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\le c\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\|f\|^2_{BMO_L^\omega}\tag{5}$$

且

$$\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}}|Q_{t^m}(I-P_{t^m})P_{r^m_B}(f)(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\le c\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2\|f\|^2_{BMO_L^\omega}\tag{6}$$

设 $b_1=(I-P_{r^m_B})f\chi_{2B}$ 且 $b_2=(I-P_{r^m_B})f\chi_{(2B)^c}$, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}}|Q_{t^m}(I-P_{t^m})b_1(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\\
\le{}& c\frac{1}{|B|}\Big(\int_{2B}|(I-P_{r^m_{2B}})(f)(x)|^2\mathrm{d}x+|B|\cdot\sup_{x\in 2B}|P_{r^m_B}(f)(x)-P_{r^m_{2B}}(f)(x)|^2\Big).\end{aligned}$$

注意到以下结果在 [8](命题 2.6) 中得到

$$|P_{r_B^m}(f)(x) - P_{K^m + r_B^m}(f)(x)| \le c(1+\log K)\frac{\omega(B)}{|B|}\|f\|_{BMO_L^\omega}. \tag{7}$$

因此由推论 1 以及不等式 (7), 我们有

$$\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}} |Q_{t^m}(I-P_{t^m})b_1(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \le c\Big(\frac{\omega(B)}{|B|}\Big)^2$$

其他的不等式的证明类似 [8] 中引理 4.6 的证明，因此这里读者可参考 [8]. 引理 1 的证明完毕.

4 加权 Hardy 空间与 BMO 空间的对偶性

我们有以下定义

定义 5 设 $\Gamma(x) = \{(y,t) \in R^{n+1} : |x-y| < t\}$ 且 $\omega \in A_\infty$, 那么加权非切向面积函数 $S_L(f)(x)$ ($f \in L^1_\omega(R^n) \cap L^2_\omega(R^n)$) 定义为：

$$S_L(f)(x) = \Big\{\int_{\Gamma(x)} |Q_{t^m}(f)(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\Big\}^{1/2}. \tag{8}$$

径向平方函数 G_L 定义为

$$G_L(f)(x) = \Big\{\int_0^\infty |Q_{t^m}(f)(x)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\}^{1/2}. \tag{9}$$

那么我们有

命题 1 设 $\omega \in A_1$ 且 $\omega > c > 0$, 那么存在常数 $c > 0$ 使得对于 $1 < p < \infty$

$$\|S_L(f)(x)\|_{L^p_\omega} \le c\|f\|_{L^p_\omega},$$

且

$$\|G_L(f)(x)\|_{L^p_\omega} \le c\|f\|_{L^p_\omega}.$$

命题 1 的证明 命题可以由 [12] 的定理 1 的一个推广以及 [13] 中的结果得到. 由假设 (b) 以及定理 7.3([13]), 对于 $\omega \in A_2$ 我们有

$$\|G_L(f)(x)\|_{L^2_\omega} \le c\|f\|_{L^2_\omega}.$$

而且我们称存在 $c, C, \beta > 0$ 使得

$$\Big[\int_0^\infty |Q_{s^m}(I-e^{-t^m L})(x,y)|^2 \frac{1}{\mathrm{d}s}\Big]^{1/2} \le C\frac{1}{|x-y|^n}\frac{t^{\beta/m}}{|x-y|^\beta}. \tag{10}$$

对于 $x, y \in R^n$ and $|x-y| \ge ct^{1/m}$. 利用 [7] 中的一个想法，我们有

$$I - P_{t^m} = m\int_0^{t^{1/m}} Q_{\nu^m}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}.$$

那么

$$\int_0^\infty |Q_{s^m}(I-e^{-t^mL})(x,y)|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}=\int_0^\infty\Big|m\int_0^{t^{1/m}}Q_{s^m}Q_{\nu^m}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}\Big|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}$$
$$=\int_0^\infty\Big|\int_0^{t^{1/m}}h\Big(\frac{\nu}{s}\Big)\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}\Big|^2\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

其中

$$h(x)=m\frac{x^m}{(1+x^m)^2}\quad\text{and}\quad\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)=(s^m+\nu^m)^2\Big(\frac{d^2P_r}{dr^2}\Big|_{r=s^m+\nu^m}(x,y)\Big).$$

由 [7], 我们知道存在 $\beta>0$ 使得

$$|\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)|\le c\frac{(s+\nu)^\beta}{(s+\nu+|x-y|)^{n+\beta}}.$$

然后

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\Big|\int_0^{t^{1/m}}h\Big(\frac{\nu}{s}\Big)\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}\Big|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}\\ \le&\int_0^\infty\int_0^{t^{1/m}}h^2\Big(\frac{\nu}{s}\Big)|\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{1}{\mathrm{d}\nu}\\ \le& c\Big[\int_0^{t^{1/m}}\int_0^{\nu}h^2\Big(\frac{\nu}{s}\Big)|\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{1}{\mathrm{d}\nu}\\ &+\int_0^{t^{1/m}}\int_\nu^{+\infty}h^2\Big(\frac{\nu}{s}\Big)|\Psi_{s,\nu}(L)(x,y)|^2\frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{1}{\mathrm{d}\nu}\Big]=I+II.\end{aligned}$$

那么

$$I\le c\int_0^{t^{1/m}}\int_0^{\nu}\Big(\frac{\nu}{s}\Big)^{-2m}\Big(\frac{\nu}{s}\Big)^{2\beta}\frac{\mathrm{d}s}{s^{1-2\beta}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}\frac{1}{|x-y|^{2n+2\beta}}\le c\frac{t^{2\beta/m}}{|x-y|^{2n+2\beta}}.$$

类似我们得到 $II\le c\frac{t^{2\beta/m}}{|x-y|^{2n+2\beta}}$. 因此我们得到 (10). 由 (10) 以及 [13] 中的定理 5.8, 我们把 $G_L(f)(x)$ 视为向量值函数，那么可得 $G_L(f)(x)$ 把 $L^1_\omega(R^n)$ 映到 $L^{1,\infty}_\omega(R^n)$ $(\omega\in A_1)$. 这里我们省略细节，读者可参考 [4][12]. 因此由插值理论，得到 $G_L(f)(x)$ 把 $L^p_\omega(R^n)$ 映到 $L^p_\omega(R^n)(1<p\le 2)$, 而 $\omega\in A_p$. 对于 $p>2$, 我们知道下面的等式成立

$$f(x)=c\int_{R^n}Q_{t^m}Q_{t^m}(f)(x)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

其中 $f\in L^p_\omega$ 且 $\omega\in A_1$ for $1<p<\infty$. 上面的等式成立是因为 L 在 $L^p_\omega(R^n)$ 中有有界全纯泛函演算对于 $1<p<\infty$(见 [13] 中定理 7.3). 由标准对偶性讨论，我们有对于 $p>2$

$$\|G_L(f)(x)\|_{L^2_\omega}\le c\|f\|_{L^2_\omega}.$$

那么我们也就证明了对于 $1<p<\infty$

$$\|G_L(f)(x)\|_{L^p_\omega}\le c\|f\|_{L^p_\omega}.$$

对于 $p \geq 2$, 注意到由标准过程，我们可得

$$\|S_L(f)(x)\|_{L^p_\omega} \leq c\|G_L(f)(x)\|_{L^p_\omega},$$

对于 $1 < p < 2$, 注意到由 [13] 中的方法，我们有 $S_L(f)(x)$ 满足加权弱 $(1,1)$ 有界估计. 因此由插值理论， $\|S_L(f)(x)\|_{L^p_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_\omega}$. 证明完毕.

注 1 注意到在 [12] 中反向不等式成立

$$\|f\|_{L^p} \leq c\|S_L(f)(x)\|_{L^p}.$$

这个不等式在 $\omega \in A_\infty$ 时并不一定成立，但当 $\omega \in A_1$ 且 $\omega > c > 0$ 成立，

$$\|f\|_{L^p_\omega} \leq c\|S_L(f)(x)\|_{L^p_\omega}.$$

这可以通过对偶性，命题 1 以及下面的等式 (见 [12]) 证明，对于 $f \in L^2_\omega, g \in L^2_\omega$

$$\langle f, g\rangle = c\int_{R^n}\int_{\Gamma(x)} Q_{t^m}(f)(x)Q^*_{t^m}(g)(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

其中 $\{Q^*_{t^m}\}_t$ 是 $\{Q_{t^m}\}_t$ 的共轭算子. 这个等式在加劝范数意义下成立, 是因为对于 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p$, L 在 $L^p_\omega(R^n)$ 中满足有界全纯泛函运算 (见 [13] 中定理 7.3).

下面我们定义加权 Hardy 空间 $H^{1,\omega}_L(R^n)$

定义 6 设 $\omega \in A_\infty$, 我们称 $f \in L^1_\omega(R^n)$ 属于加权 Hardy 空间 $H^{1,\omega}_L(R^n)$, 如果

$$S_L(f) \in L^1_\omega, \quad \text{and}, \quad \|f\|_{H^{1,\omega}_L} \sim \|S_L(f)\|_{L^1_\omega}.$$

定理 1 在给定假设下， $\omega \in A_1$, $\omega > c > 0$, 那么 $H^{1,\omega}_L \bigcap L^2_\omega(R^n)$ 的对偶空间是 $BMO^\omega_{L^*} \bigcap L^2_\omega(R^n)$, 其中 L^* 是 L 的共轭算子.

在给出证明前，我们需要一些引理.

定义 7 设 $\omega \in A_1$, $\omega > c > 0$. 定义

$$\mathcal{A}(f)(x) = \Big(\int_{\Gamma(x)} |f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\Big)^{1/2}$$

以及

$$\mathcal{C}(f)(x) = \sup_{x\in B}\Big(\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}} |f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\Big)^{1/2}.$$

加权 “帐篷空间” $T^{p,\omega}_2$ 定义为那些函数 f 满足 $\mathcal{A}(f) \in L^p_\omega (1 < p < \infty)$, 而 $T^{\infty,\omega}_2$ 定义为那些函数 f 满足 $\mathcal{C}(f) \in L^\infty_{1/\omega}$. 那么函数 $a(x,t)$ 被称为加权 T^1_2 原子，如果

1. $suppa \subset \hat{B}$, 其中 B 是 R^n 中的球.
2. $\int_{\hat{B}} |a(x,t)|^2\omega(x)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \leq \omega(B)^{-1}$.

我们有以下命题

命题 2 设 $\omega \in A_1$ 且 $\omega > c > 0$, 那么

a. 下列不等式成立如果 $f \in T^{1,\omega}_2$ 且 $g \in T^{\infty,\omega}_2$

$$\int_{R^{n+1}_+} |f(x,t)g(x,t)|\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \leq c\int_{R^n} \mathcal{A}(f)(x)\mathcal{C}(g)(x)\mathrm{d}x.$$

b. $T^{\infty,\omega}_2$ 是 $T^{1,\omega}_2$ 的对偶.

c. 如果 $f \in T_2^{1,\omega}$, 那么 $f = \sum_j \lambda_j a_j$, 其中 a_j are $T_2^{1,\omega}$ 且 $\sum_j |\lambda_j| \le c\|f\|_{T_2^{1,\omega}}$.

命题 2 可以被看作 [10] 中定理 1 的直接推广. 读者可参考 [10][14] 其中的证明.

引理 3 设 $\omega \in A_1$ 且 $\omega > c > 0$, $F(x,t) = Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m})(f)(x)$, $G(x,t) = Q_{t^m}(g)(x)$, 那么

$$\int_{R^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x = c\int_{R^{n+1}_+} F(x,t)G(x,t)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$$

上式在 $f \in BMO^\omega_{L^*} \bigcap L^2_\omega$ 且 $g \in H^\omega_L \bigcap L^2_\omega$ 时成立.

引理 3 的证明 利用命题 2 中的 (a), 引理 1 以及控制收敛引理, 当 $f \in BMO^\omega_{L^*}$ 且 $g \in H^\omega_L \bigcap L^2_\omega$ 下式绝对收敛

$$\int_{R^{n+1}_+} F(x,t)G(x,t)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_\delta^N \int_{R^n} F(x,t)G(x,t)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}.$$

那么

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_\delta^N Q^2_{t^m}(I - P_{t^m})(g)(y)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = g,$$

其中等式在 L^2_ω 中收敛. 等式成立是由于 L 在 L^2_ω 中满足全纯泛函运算且 $I = c\int t^{2m}e^{-2t^m}(1-e^{-t^m})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$(见 [11]).

由于 $f \in L^2_\omega$, 那么由控制收敛定理可得

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_{R^n} f(y)\Big[\int_\delta^N Q^2_{t^m}(I - P_{t^m})(g)(y)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\Big]\mathrm{d}y = c^{-1}\int_{R^n} f(y)g(y)dy$$

上式在 $f, g \in L^2_\omega$ 中收敛.

下面给出定理 1 的证明

定理 1 的证明 第一步：我们要证明对于 $f \in BMO^\omega_{L^*} \bigcap L^2_\omega$,

$$l(g) = \int_{R^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

是一个线性有界泛函对于 $g \in H^{1,\omega}_L \bigcap L^2_\omega$. 我们只需证明存在 $c > 0$ 使得对于 $g \in H^{1,\omega}_L \bigcap L^2_\omega$

$$\Big|\int_{R^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big| \le c\|f\|_{BMO^\omega_{L^*}}\|g\|_{H^{1,\omega}_L}. \tag{11}$$

由引理 3 以及命题 2 , 我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{R^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big| &\le c\Big|\int_{R^n_+} Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m})(f)(x)Q_{t^m}(g)(x)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\\ &\le c\int_{R^n} \mathcal{C}(Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m}))(f)(x)\mathcal{A}Q_{t^m}(g)(x)\mathrm{d}x\\ &\le \|\mathcal{C}(Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m}))(f)(x)\|_{L^\infty_{1/\omega}}\int_{R^n} S_L(g)(x)\omega(x)\mathrm{d}x\\ &\le c\|\mathcal{C}(Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m}))(f)(x)\|_{L^\infty_{1/\omega}}\|g\|_{H^{1,\omega}_L}.\end{aligned}$$

由引理 1, 易得

$$\|\mathcal{C}(Q^*_{t^m}(I - P^*_{t^m}))(f)(x)\|_{L^\infty_{1/\omega}} \le c\|f\|_{BMO^\omega_{L^*}}.$$

因此我们有 (11).

第二步：首先我们需要对于 $f\in L^2_\omega(B)$ 证明

$$\|(I-P_{r_B^m})(f)\|_{H_L^{1,\omega}}\le c\omega(B)^{1/2}\|f\|_{L^2_\omega}. \tag{12}$$

需要验证

$$\|S_L(I-P_{r_B^m})(f)\|_{L^1_\omega}\le c\omega(B)^{1/2}\|f\|_{L^2_\omega}.$$

注意到

$$\int S_L(I-P_{r_B^m})(f)(x)\omega(x)\mathrm{d}x=\Big(\int_{4B}+\int_{(4B)^c}\Big)\dots=I+II$$

那么

$$I\le c\omega(B)^{1/2}\|(I-P_{r_B^m})(f)\|_{L^2_\omega}\le c\omega(B)^{1/2}\|f\|_{L^2_\omega}.$$

设球 B 的中心在原点而半径为 r_B, 那么由 [8] 中的估计 (4.11), 对于 $x\in(4B)^c$, 存在 $\epsilon>0$ 使得

$$|S_L(I-P_{r_B^m})(f)(x)|^2\le cr_B^{2\epsilon}|x|^{-2(n+\epsilon)}\|f\|^2_{L^1}.$$

利用双倍条件 $\omega(2B)\le c\omega(B)$ 以及 $\omega\in A_1$, 我们有

$$\begin{aligned}II&\le r_B^{\epsilon}\|f\|_{L^1}\int_{(4B)^c}|x|^{-(n+\epsilon)}\omega(x)\mathrm{d}x\\&\le c\Big\{\int_B\omega^{-1}(x)\mathrm{d}x\Big\}^{-1/2}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\|f\|_{L^2_\omega}\\&\le c\omega(B)^{1/2}\|f\|_{L^2_\omega}.\end{aligned}$$

现在我们证明对于 $H_L^{1,\omega}\bigcap L^2_\omega$ 上的泛函 l, 存在函数 $f\in BMO^\omega_{L^*}\bigcap L^2_\omega$ 使得 $\|f\|_{BMO^\omega_{L^*}}\le c\|l\|$ 且对于 $g\in H_L^{1,\omega}\bigcap L^2_\omega$ 使得

$$l(g)=\int_{R^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

我们有一系列不相交的方体 $\{Q_j\}$ 使得 $\bigcup\limits_j Q_j=R^n$, 由传统方法知道在每个方体上的限制都是一个 $L^2_\omega(Q_j)$ 上的有界线性泛函，因此 $f=\sum\limits_j f_j$ 且 $f_j\in L^2_\omega$ 使得对于任意 $g\in H_L^{1,\omega}\bigcap L^2_\omega$

$$l(g)=\int_{R^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

那么对任何球 B

$$\begin{aligned}\Big(\int_B|f-P^*_{r_B^m}(f)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}&\le\sup_{\|g\|_{L^2_\omega}\le1}\Big|\int_{R^n}(f(x)-P^*_{r_B^m}(f)(x))g(x)\mathrm{d}x\\&\le\sup_{\|g\|_{L^2_\omega}\le1}\Big|\int_{R^n}f(x)(I-P_{r_B^m})(g)(x)\mathrm{d}x\\&\le\sup_{\|g\|_{L^2_\omega}\le1}|l((I-P_{r_B^m})(g))|\\&\le\|l\|\sup_{\|g\|_{L^2_\omega}\le1}\|((I-P_{r_B^m})(g))\|_{H_L^{1,\omega}}.\end{aligned}$$

根据 (12), 我们有

$$\Big(\int_B|f-P^*_{r_B^m}(f)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\le c\|l\|\omega(B)^{1/2}.$$

因此我们完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Aronson D. Bounds for fundamental solutions of a parabolic equation. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 890–896
[2] Shen Z W. On fundamental solution of generalized Schödinger operators. J Funct Anal, 1999, **167**: 521–564
[3] Auscher P, Tchamitchian P. Square root problem for divergence operators and related topics. Asterisque, 1998, **249**
[4] Duong X T. MacIntosh Alan. Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains. Rev Mat Iberoamericana, 1999, **15**(2): 233–265
[5] Stein E M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton. Univ Press, 1970
[6] Dziubański J, Garrigós G, Martínez T, Torrea J, Zienkiewicz J. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. Math Z, 2005, **249**: 329–356
[7] Duong X T, Yan L X. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. Amer J Math, 2005, **18**: 943–973
[8] Duong X T, Yan L X. New function spaces of BMO type, John-Nirenberg inequality, interpolation and applications. Comm Pure Appl Math, 2005, **58**: 1375–1420
[9] Strömberg J, Torkinsky A. Weighted Hardy spaces. Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, 1989, **1381**
[10] Coifman R, Meyer Y, Stein E M. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis. J Funct Anal, 1984, **78**: 2453–251
[11] Alan McIntosh. Operators which have an H_∞-calculus, Miniconference on operator theory and partial differential equations. Proc Center Math Analysis, ANU, Canberra, 1986, **14**: 210–231
[12] Auscher P, Duong X T, McIntosh A. Boundeness of Banach space valued singular integral operators and Hardy spaces. Preprint, 2004
[13] Martell J M. Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications. Studia Math, 2004, **161**: 113–145
[14] Deng D G. On a generalized Carleson inequality. Studia Math, 1984, **78**: 2453–251

Weighted Hardy and BMO Spaces Associated with Semigroup with Non-smooth Kernel

Xu Ming
(*Department of mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632*)

Abstract: In the paper we give weighted Hardy spaces and BMO spaces associated with semigroup with non-smooth kernel, then give their properties and duality arguments.

Key words: Hardy spaces; BMO spaces; Semigroup.
MR(2000) Subject Classification: 42B20; 47B38