2009,**29A**(3):607–612

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

增长曲线模型回归系数线性估计的可容许性 *

[1] 刘刚　[2] 张尚立
([1] 中国人民大学信息学院　北京 100872; [2] 北京交通大学理学院　北京 100044)

摘要：该文讨论增长曲线模型中回归系数线性估计的可容许性，在矩阵损失 $(d(Y)-KBL)(d(Y)-KBL)'$ 下，分别给出了回归系数的齐次与非齐次线性估计是可容许的充要条件，推广了以往文献的相关结论.

关键词：增长曲线模型；线性估计；可容许性.

MR(2000) 主题分类: 62C15; 62F30　**中图分类号**: O212.4　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-607-06

1 引言

考虑增长曲线模型

$$\begin{cases} Y = ABC + \epsilon, \\ E(\epsilon) = 0, \\ \mathrm{Cov}(\vec{\epsilon}) = \sigma^2 \cdot I_n \otimes V. \end{cases} \tag{1}$$

其中 Y 为 $p\times n$ 阶观测矩阵，A, C 分别为 $p\times q, k\times n$ 阶已知设计阵 $(q\leq p)$, 矩阵 $B_{q\times k}$ 及 $\sigma^2>0$ 是未知参数，$p\times p$ 阶矩阵 $V\geq 0$ 已知，ϵ 为误差矩阵，$\vec{\epsilon}$ 表示 ϵ 的按列拉直，$\otimes$ 表示 Kronecker 乘积. 假定线性函数 $K_{t\times q}BL_{k\times l}$ 可估，即 $\mu(K')\subseteq\mu(A')$ 且 $\mu(L)\subseteq\mu(C)$, 其中 $\mu(C)$ 表示矩阵 C 的列向量张成的线性空间 (下同), 取矩阵损失函数

$$L(d(Y), KBL) = (d(Y)-KBL)(d(Y)-KBL)'. \tag{2}$$

记 $\Theta=\{(B,\sigma^2): B\in R^{q\times k},\, \sigma^2>0\}$, 我们用 $R(d,B,\sigma^2)$ 表示 KBL 的估计 $d(Y)$ 的风险矩阵函数.

定义　设 $d_1(Y)$ 和 $d_2(Y)$ 是 KBL 的任意两个估计, 如果对一切 (B,σ^2), 均有 $R(d_1,B,\sigma^2)\leq R(d_2,B,\sigma^2)$, 且至少存在某组 (B_0,σ_0^2), 使得 $R(d_1,B_0,\sigma_0^2)-R(d_2,B_0,\sigma_0^2)\neq 0$, 则称 $d_1(Y)$ 一致优于 $d_2(Y)$. 如果在集合 Φ 中不存在任何估计一致优于 $d(Y)$, 则称 $d(Y)$ 是 KBL 在集合 Φ 中的可容许估计，记之为 $d(Y)\overset{\Phi}{\sim} KBL$.

关于增长曲线模型，许多文献 [1−5] 均讨论过 KBL 的线性估计的容许性. 在模型 (1) 及损失函数 (2) 下，潘建新 [1] 首先考虑了 $V>0$ 的情形，在估计类 $\mathcal{HL}^*$(L' 列满秩) 中得到了 DYF 的可容许特征，这里

$$\mathcal{HL}^*=\{DYF:\, DYF\in\mathcal{HL},\, DA\neq K \text{ 但 } CF=L\},$$

收稿日期: 2006-10-16; 修订日期: 2008-11-09
E-mail: liugang@ruc.edu.cn; shlzhang@center.njtu.edu.cn
* 基金项目：国家自然科学基金 (10501052,10671007) 资助

$$\mathcal{HL}=\{DYF:\ D,F \text{ 分别为 } t\times p,\ n\times l \text{ 矩阵}\}.$$

孙六全 [2] 在 $V\geq 0$ 的推广情形下，考虑了齐次估计类 (仍要求 L' 列满秩)

$$\mathcal{HL}_1=\{DYF:\ DYF\in\mathcal{HL},\ CF=L\} \tag{3}$$

与相应的非齐次估计类 (L 为满秩方阵)

$$\mathcal{L}_1=\{DYF+M:\ DYF\in\mathcal{HL}_1,\ M \text{ 为 } t\times l \text{ 矩阵}\} \tag{4}$$

中的可容许性，分别得到了 KBL 的线性估计是可容许的充要条件. 表面上看， L' 为列满秩阵或满秩方阵只是对估计类的限制，其实它对模型也附加了一定的限制条件，如要求 L' 列满秩则 C 必须行满秩. 因此讨论 KBL 的线性估计，在无限制的模型及一般的估计类中的可容许性是一个令人感兴趣的问题.

本文我们将在 $L\neq 0$ 的一般情形下，讨论齐次估计类 $\mathcal{HL}_1$ 与非齐次线性估计类 $\mathcal{L}_1$ 中的可容许，分别得到了 KBL 的线性估计是可容许的充要条件.

2 $\mathcal{HL}_1$ 中的线性可容许估计

利用 (2) 式，直接计算容易验证

引理 1 对任意的 $DYF\in\mathcal{HL}_1$, $DYP_{C'}F\in\mathcal{HL}_1$, 且对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\begin{aligned}R(DYF,B,\sigma^2)&=\sigma^2\mathrm{tr}(F'F)DVD'+(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\&\geq R(DYP_{C'}F,B,\sigma^2)\\&=\sigma^2\mathrm{tr}(F'P_{C'}F)DVD'+(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\&=\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)DVD'+(DA-K)BLL'B'(DA-K)',\end{aligned}$$

且等号成立的充要条件为

$$P_{C'}F=F, \tag{5}$$

其中 $P_{C'}=C'(CC')^-C$.

引理 1 说明： (i) 若 $DYF\overset{\mathcal{HL}_1}{\sim}KBL$, 则必有 $P_{C'}F=F$; (ii) 若 $P_{C'}F=F$, 则 DYF 的可容许性与 F 的选择无关.

引理 2 设 $L_{k\times l}\neq 0$, S_1,S 均为 $t\times q$ 阶矩阵且 S 为非零阵，则对任意 $q\times k$ 阶矩阵 B, $S_1BLL'B'S_1'\leq SBLL'B'S'$ 均成立的充要条件为 $S_1=cS,\quad |c|\leq 1$.

证 充分性显然，往证必要性. 由于 $L=(l_1,\cdots,l_k)'\neq 0$, 不妨 $l_1\neq 0$, 取 $B=(\beta,\cdots,0)$, β 为任意 q 维向量，注意到 $l_1'l_1\neq 0$, 则有 $S_1\beta\beta'S_1'\leq S\beta\beta'S'$. 由文献 [6] 中的引理 3.2, 必有 $S_1=cS,|c|\leq 1$. ▌

引理 3 设 $P_{C'}F=F$, 则 D_1YF 一致优于 DYF 的充要条件是

$$D_1VD_1'\leq DVD' \tag{6}$$

及对任意 q 维向量 β, 均有

$$(D_1A-K)\beta\beta'(D_1A-K)'\leq(DA-K)\beta\beta'(DA-K)', \tag{7}$$

且当 (6) 式中等号成立时，存在 $\beta_0\neq 0$ 使得 (7) 式成立不等号.

证 只对 $DA \neq K$ 的情形给出证明，若 $DA = K$, 证明是容易的.

必要性. 由于 $P_{C'}F = F$, 则对一切 $(B, \sigma^2) \in \Theta$, 有

$$\begin{aligned}&\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)D_1VD_1' + (D_1A-K)BLL'B'(D_1A-K)'\\ \leq\ &\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)DVD' + (DA-K)BLL'B'(DA-K)',\end{aligned}$$

且存在某组 (B_0, σ_0^2), 使得不等号成立.

在上式中取 $B=0$, 可以得到 (6) 式成立. 令 $\sigma^2 \to 0$, 则对一切 $q \times k$ 阶矩阵 B, 有

$$(D_1A-K)BLL'B'(D_1A-K)' \leq (DA-K)BLL'B'(DA-K)'.$$

由引理 2, 有 $D_1A - K = c(DA-K), \quad |c| \leq 1$, (7) 式显然成立.

若 (6) 式成立等号, 必有 $|c| < 1$, 否则 D_1YF 将不可能一致优于 DYF. 由于 $DA - K \neq 0$, 存在 $\beta_0 \neq 0$, 使得 $(DA-K)\beta_0 \neq 0$, 则有

$$(D_1A-K)\beta_0\beta_0'(D_1A-K)' = c^2(DA-K)\beta_0\beta_0'(DA-K)' \neq (DA-K)\beta_0\beta_0'(DA-K)'.$$

充分性. 由于 (7) 式成立，由引理 2 的证明，必有 $D_1A - K = c(DA-K), \quad |c| \leq 1$, 则对一切 $(B, \sigma^2) \in \Theta$, 有

$$\begin{aligned}R(D_1YF, B, \sigma^2) &= \sigma^2\mathrm{tr}(F'F)D_1VD_1' + (D_1A-K)BLL'B'(D_1A-K)'\\ &= \sigma^2\mathrm{tr}(F'F)D_1VD_1' + c^2(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\ &\leq \sigma^2\mathrm{tr}(F'F)DVD' + (DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\ &= R(DYF, B, \sigma^2).\end{aligned}$$

若 (6) 式成立不等号，则有 $R(D_1YF, 0, 1) - R(DYF, 0, 1) \neq 0$; 若 (6) 式成立等号，必有 $|c| < 1$. 取 $\beta_1 \neq 0$, 使得 $(DA-K)\beta_1 \neq 0$. 令 $B_0 = (\beta_1, \cdots, 0)$, $L = (l_1, \cdots, l_k)', l_1 \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma^2 \to 0} R(D_1YF, B_0, \sigma^2) &= (D_1A-K)\beta_1\beta_1'(D_1A-K)' \cdot l_1'l_1\\ &= c^2(DA-K)\beta_1\beta_1'(DA-K)' \cdot l_1'l_1\\ &\leq \lim_{\sigma^2 \to 0} R(DYF, B_0, \sigma^2).\end{aligned}$$

此时必存在 (B_0, σ_0^2), 使得 $R(D_1YF, B_0, \sigma_0^2) - R(DYF, B_0, \sigma_0^2) \neq 0$. 因此 D_1YF 将一致优于 DYF. ▍

注 1 引理 3 的证明表明， (7) 式等价于 $D_1A - K = c(DA-K), \quad |c| \leq 1$.

考虑线性模型

$$\begin{cases} X = A\beta + \epsilon, \\ E(\epsilon) = 0, \\ \mathrm{Cov}(\epsilon) = \sigma^2 \cdot V \end{cases} \tag{8}$$

和矩阵损失

$$L(d(X), K\beta) = (d(X) - K\beta)(d(X) - K\beta)', \tag{9}$$

其中 A, V 为模型 (1) 和损失函数 (2) 下的 A, V, β 和 σ^2 为未知参数.

注意到 (6),(7) 两式恰是在线性模型 $(X, A\beta, \sigma^2V, V \geq 0)$ 下， $K\beta$ 的估计 D_1Y 一致优于 DY 的充要条件，结合引理 1, 我们可以得到

引理 4 $DYF \overset{\mathcal{HL}_1}{\sim} KBL$ 的充要条件为

$$P_{C'}F = F, \tag{10}$$

$$DX \sim K\beta. \tag{11}$$

这里记号 $DX \sim K\beta$ 表示在模型 (8) 和损失函数 (9) 下，在齐次线性估计类中， DX 是 $K\beta$ 的可容许估计.

由文献 [7] 中的定理 3.1 容易得到

定理 1 在模型 (1) 和损失函数 (2) 下， $DYF \overset{\mathcal{HL}_1}{\sim} KBL$ 的充要条件为

(i) $P_{C'}F = F, DV = DP_AV$;

(ii) $DA = K$ 或者 $DA \neq K$, 对任意 $a \in (0,1)$, 有 $g(a,D) = DAHA'D' - KHK' + a(DA-K)H(DA-K)' \geq 0$ 不成立，其中 $P_A = A(A'T^+A)^+A'T^+, H = (A'T^+A)^+ - I, T = V + AA'$.

注 2 若 $C = F = L = I$, 可得多元模型 $(Y, XB, \sigma^2 \cdot \Sigma \otimes V)$ 下 $DY \sim SB$ 的充要条件.

3 $\mathcal{L}_1$ 中的线性可容许估计

引理 5 对任意的 $DYF + M \in \mathcal{L}_1$, $DYP_{C'}F + MP_{L'} \in \mathcal{L}_1$, 且对一切 $(B, \sigma^2) \in \Theta$, 有

$$\begin{aligned} R(DYF+M, B, \sigma^2) &= R(DYF, B, \sigma^2) + MM' + (DA-K)BLM' + ML'B'(DA-K)' \\ &\geq R(DYP_{C'}F + MP_{L'}, B, \sigma^2) \\ &= R(DYP_{C'}F, B, \sigma^2) + MP_{L'}M' + (DA-K)BLM' \\ &\quad + ML'B'(DA-K)', \end{aligned}$$

且等号成立的充要条件为

$$P_{C'}F = F \text{ 且 } M = MP_{L'}. \tag{12}$$

引理 6 设 S, G 分别为 $t \times q, k \times t$ 阶矩阵，记 $H = SBG + G'B'S'$, 则存在 $q \times k$ 阶矩阵 $B \neq 0$, 使得 $H \neq 0$ 的充要条件是 $S \neq 0$ 且 $G \neq 0$.

证 必要性显然，往证充分性，只需证明存在 $B_0 \neq 0$, 使得 SBG 非反对称阵即可.

由于 $S_{t\times q} = (s_1, \cdots, s_t)' \neq 0, G_{k\times t} = (g_1, \cdots, g_t) \neq 0$, 若存在 i, 使得 $s_i \neq 0, g_i \neq 0$, 取 $B_0 = s_i \cdot g_i' \neq 0$, 则有 $e_i'SB_0Ge_i = e_i'S \cdot (s_ig_i') \cdot Ge_i = s_i's_i \cdot g_i'g_i \neq 0$. 若否，必存在 $i \neq j$, 使得 $s_i \neq 0, g_j \neq 0$ 且 $s_j = 0, g_i = 0$, 取 $B_0 = s_i \cdot g_j' \neq 0$, 则有 $e_i'SB_0Ge_j = e_i'S \cdot (s_ig_j') \cdot Ge_j = s_i's_i \cdot g_j'g_j \neq 0$, $e_j'SB_0Ge_i = e_j'S \cdot (s_ig_j') \cdot Ge_i = s_j's_i \cdot g_j'g_i = 0$. 即有 $e_i'SB_0Ge_j \neq -e_j'SB_0Ge_i$, 故 SBG 非反对称. ▮

引理 7 设 $DA = K$, 则 $DYF + M \overset{\mathcal{L}_1}{\sim} KBL$ 的充要条件是 $P_{C'}F = F, DV = DP_AV$ 且 $M = 0$.

此引理的证明是容易的，略.

引理 8 设 $DA \neq K$, 则 $DYF + M \overset{\mathcal{L}_1}{\sim} KBL$ 的充要条件是

$$P_{C'}F = F \text{ 且 } M = MP_{L'}; \tag{13}$$

$$DYF \overset{\mathcal{HL}_1}{\sim} KBL. \tag{14}$$

证 由引理 5, 条件 (13) 是必要的，故在 (13) 式成立的情况下，证明

$$DYF + M \overset{\mathcal{L}_1}{\sim} KBL \Longleftrightarrow DYF \overset{\mathcal{HL}_1}{\sim} KBL.$$

必要性易证，只证充分性. 若对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$
\begin{aligned}
&R(D_1YP_{C'}F_1+M_1,B,\sigma^2)\\
&=\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)D_1VD_1'+(D_1A-K)BLL'B'(D_1A-K)'\\
&\quad+(D_1A-K)BLM_1'+M_1L'B'(D_1A-K)'+M_1M_1'\\
&\le R(DYF+M,B,\sigma^2)\\
&=\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)DVD'+(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\
&\quad+(DA-K)BLM'+ML'B'(DA-K)'+MP_{L'}M',
\end{aligned}\tag{15}
$$

则必有 $D_1VD_1'\le DVD'$, 且对任意 $q\times k$ 阶矩阵 B, 有

$$(D_1A-K)BLL'B'(D_1A-K)'\le(DA-K)BLL'B'(DA-K)'.$$

由引理 2, $D_1A-K=c(DA-K),\quad |c|\le 1$, 则有

$$
\begin{aligned}
R(D_1YP_{C'}F_1,B,\sigma^2)&=\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)D_1VD_1'+c^2(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\
&\le\sigma^2\mathrm{tr}(L'(CC')^-L)DVD'+(DA-K)BLL'B'(DA-K)'\\
&=R(DYF,B,\sigma^2).
\end{aligned}
$$

但 $DYF\overset{\mathcal{HL}_1}{\sim}KBL$, 则必有 $D_1VD_1'=DVD'$ 且 $|c|=1$.

下面只证 $c=1$ 的情形， $c=-1$ 的情形可类似进行.

$$
\begin{aligned}
R^*(B,\sigma^2)&\triangleq R(D_1YP_{C'}F_1+M_1,B,\sigma^2)-R(DYF+M,B,\sigma^2)\\
&=(DA-K)BL(M_1-M)'+(M_1-M)L'B'(DA-K)'\\
&\quad+M_1M_1'-MP_{L'}M.
\end{aligned}\tag{16}
$$

分两种情况讨论.

(i) $LM_1'\ne LM'$, 即 $L(M_1-M)'\ne 0$, 由引理 6, 存在 B_0, 使得

$$J\triangleq(DA-K)B_0L(M_1-M)'+(M_1-M)L'B_0'(DA-K)'\ne 0.$$

注意到 J 为对称阵，故必有 $\alpha_{t\times 1}\ne 0$, 使得 $\alpha'J\alpha\ne 0$, 此时若 $\alpha'J\alpha>0$, 取 $B=mB_0$; 若 $\alpha'J\alpha<0$, 取 $B=-mB_0$, 则 $\alpha'R^*(B,\sigma^2)\alpha\to+\infty$ $(m\to+\infty)$, 这与 (15) 式矛盾.

(ii) $LM_1'=LM'$, 等价地 $P_{L'}M_1'=P_{L'}M'$. 若 $P_{L'}M'=0$, 则必有 $M_1=0$, 否则 $R^*(B,\sigma^2)=M_1M_1'\ge 0$ 与 (15) 式矛盾，而此时

$$R(D_1YP_{C'}F_1+M_1,B,\sigma^2)\equiv R(DYF+M,B,\sigma^2).$$

若 $P_{L'}M'\ne 0$, 由于 $P_{L'}M_1'=P_{L'}M'$, 则有 $M_1'=P_{L'}^-P_{L'}M'$, 注意到 $P_{L'}$ 为投影阵，存在正交阵 Q, 使得

$$P_{L'}=Q\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q',\quad P_{L'}^-=Q\begin{pmatrix}I_r&N_1\\N_2&N\end{pmatrix}Q',\quad r=rk(L),$$

其中 N_1, N_2, N 为适当阶数的矩阵．容易计算

$$R^*(B,\sigma^2) = M_1M_1' - MP_{L'}M' = M(P_{L'}^- P_{L'})'(P_{L'}^- P_{L'})M' - MP_{L'}M'$$
$$= MQ\begin{pmatrix} N_2'N_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q'M' \geq 0.$$

显然若 $N_2 \neq 0$, 则与 (15) 式矛盾；而当 $N_2 = 0$ 时，有

$$R(D_1YP_{C'}F_1 + M_1, B, \sigma^2) \equiv R(DYF + M, B, \sigma^2).$$ ▌

定理 2 在模型 (1) 和损失函数 (2) 下， $DYF + M \overset{\mathcal{L}_1}{\sim} KBL$ 的充要条件是

(i) $P_{C'}F = F, DV = DP_AV$;

(ii) $DA = K, M = 0$ 或者 $DA \neq K, M = MP_{L'}$, 且对任意 $a \in (0,1)$, 有

$$g(a,D) = DAHA'D' - KHK' + a(DA-K)H(DA-K)' \geq 0$$

不成立.

注 3 若 $C = F = L = I$, 可得到多元模型 $(Y, XB, \sigma^2 \cdot \Sigma \otimes V)$ 下， $DY + M \sim SB$ 的充要条件．特别地，取 $C = F = L = 1$, 可以得到文献 [8] 中的定理 1.

注 4 这里的证明方法刻划了增长曲线模型与线性模型，非齐次估计与齐次估计之间可容许性的联系．定理 1 与文献 [7], [2] 形式上完全一致，而定理 2 与文献 [8], [2] 基本一致，只是增加了条件 $M = MP_{L'}$, 这一条件很重要 [2]．容易知道，若 L' 列满秩，此条件是必须的；而当 L' 行满秩时，条件自然满足，这时的结果形式上保持一致.

参 考 文 献

[1] 潘建新．增长曲线模型回归系数线性估计的可容许性．应用数学学报， 1989, **12**: 456–465

[2] 孙六全．一般增长曲线模型回归系数线性估计的可容许性．应用数学学报， 1994, **17**: 628–630

[3] 覃红．一般增长曲线模型回归系数线性估计的泛容许性．数学物理学报， 1994, **14**: 472–478

[4] 艾明要．一般的增长曲线模型均值矩阵线性估计的泛容许性．华中师范大学学报， 1999, **33**: 31–36

[5] 刘刚，谢民育．增长曲线模型回归系数线性估计的可容许性．数学物理学报， 1995, **15**: 12–19

[6] 朱显海，鹿长余．线性模型中参数的线性估计的可容许性．数学年刊， 1987, **8**: 220–226

[7] 吴启光．一般的 Gauss-Markoff 模型中回归系数的线性估计的可容许性．应用数学学报， 1986, **9**: 251–256

[8] 吴启光．矩阵损失下回归系数的非齐次线性估计的可容许性．应用数学学报， 1987, **10**: 428–433

Admissibility for Linear Estimators of the Regression Coefficients in the Growth Curve Model

[1]Liu Gang [2]Zhang Shangli

([1]*School of Information, Renming University of China, Beijing 100872;*
[2]*School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044*)

Abstract: In this paper, the admissibility for linear estimators of regression coefficients in the general growth curve model is discussed. Under the matrix loss function $(d(Y)-KBL)(d(Y)-KBL)'$, some necessary and sufficient conditions for linear estimators to be admissible are obtained, which extend some results in literature.

Key words: Growth curve model; Linear estimator; Admissibility.

MR(2000) Subject Classification: 62C15; 62F30