2005,**25A**(5):612－620

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

整函数与其两个导数 *CM* 共享一个值*

[1] 王建平 [2] 仪洪勋
([1] 绍兴文理学院数学系 绍兴 312000;[2] 山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘要:该文研究了与两个导数共享一个非零、有穷值的整函数的唯一性问题,给出了函数确定的表达式,回答了仪洪勋,杨重骏提出的一个问题[3, p458].

关键词:整函数;公共值;唯一性。
MR(2000)主题分类:30D35 **中图分类号**:O174.5 **文献标识码**:A
文章编号:1003-3998(2005)05-612-09

1 引言及结果

我们称复数 c 是两个非常数亚纯函数 f 和 g 的公共值,如果由 $f(z)=c$ 可以推出 $g(z)=c$,反之亦然. 以下我们将区分 CM 公共值(记重数)和 IM 公共值(不记重数),假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论的基本结果及常用记号[3].

Rubel Yang 证明了下述定理

定理 A[1] 设 f 为非常数整函数. 如果 f 和 f' CM 共享两个判别的有穷复数,则 $f\equiv f'$.

此后,许多学者深入地研究了与一个导数共享两个值的整函数的唯一性问题,得到一系列有趣的结果[4－9].

1986 年,Jank,Mues 和 Volkmann 证明了下列结果

定理 B[2] 设 f 为非常数亚纯函数,a 为非零有穷复数. 如果 f,f' 和 f'' CM 共享值 a,则 $f\equiv f'$.

定理 B 导致了以下更一般的 Yi-Yang 问题

问题 1[3, p458] 设 f 为非常数亚纯函数,a 为非零有穷复数,n 和 m 均为正整数,并且满足 $n<m$. 如果 f,$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}$ CM 共享值 a,其中 n 和 m 的奇偶性不同. 则是否必有 $f\equiv f^{(n)}$?

事实上,问题 1 的答案就一般情形而言是否定的. 以下是杨连中[7]给出的一个反例.

反例 1 设 n 和 m 都是正整数,满足 $m>n+1$,b 为非零常数,满足 $b^n=b^m\neq 1$. 若令 $a=b^n$,$f(z)=e^{bz}+a-1$,则不难看出 f,$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}$ CM 共享值 a,但是 $f\not\equiv f^{(n)}$.

以上反例表明:如果要使问题 1 具有肯定的答案,则必须对函数 f 或正整数 n、m 附加一定的条件.

最近,作者证明了以下结果

收稿日期:2003-08-26;修订日期:2004-07-31
E-mail:jpwang604@eyou.com
* 基金项目:国家自然科学基金(10371065)和浙江省自然科学基金(M103006)资助

定理 C[8] 设 f 为整函数，a 为非零有穷复数，m（$\geqslant 2$）为整数．如果 f 和 $f'CM$ 共享值 a，并且由 $f(z)=a$ 可以推出 $f^{(m)}(z)=a$，则 $f(z)=be^{cz}+a-\dfrac{a}{c}$，其中 b，c 均为非零常数，并且满足 $c^{m-1}=1$.

本文继续研究问题 1，得到以下结果

定理 1 设 f 为非常数整函数，a 为非零有穷复数，n 和 m 都是正整数，并且满足 $n<m$．如果 f，$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}CM$ 共享值 a，并且存在有穷复数 c 和非负整数 j，使得 $\delta(c,f^{(j)})>0$，则 f 必具下列形式之一

（i）$f\equiv f^{(n)}$；

（ii）$f(z)\equiv c_0e^{bz}+a-\dfrac{a}{\lambda}$，其中 c_0，b,和 λ 均为非零常数，并且满足 $b^n=b^m=\lambda\neq 1$；n 和 m 为互素的正整数；

（iii）$f(z)\equiv\sum\limits_{j=1}^{\tau}c_je^{b_jz}+a-\dfrac{a}{\lambda}$，其中 $\tau\leqslant\min\{n,m-n\}$ 为正整数；c_j，b_j 和 λ 均为非零常数，并且满足 $b_j^n=b_j^m=\lambda\neq 1$（$j=1,\cdots,\tau$）；正整数 n 和 m 不互素.

注 1 不难看出，如果正整数 n 和 m 不互素，则必有 $\min\{n,m-n\}\geqslant 2$.

由定理 1，立即可得以下推论

推论 1 设 f 为非常数整函数，a 为非零有穷复数，n 和 m 都是正整数，并且满足 $n<m$．如果 f，$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}CM$ 共享值 a，并且存在有穷复数 c 和非负整数 j，使得 $\delta(c,f^{(j)})>0$，则

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\tau}c_je^{b_jz}+a-\frac{a}{\lambda},$$

其中 $\tau\leqslant\min\{n,m-n\}$，$c_j$，$b_j(j=1,\cdots,\tau)$和 λ 均为非零常数，并且分别满足$|\lambda|=1$ 以及 $b_j^n=b_j^m=\lambda(j=1,\cdots,\tau)$.

定理 2 设 f 为非常数整函数，其级为有穷，a 为非零有穷复数，n 和 m 都是正整数，并且满足 $n<m$．如果 f，$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}CM$ 共享值 a，则定理 1 的结论成立.

2 几个引理

为了完成定理 1 和定理 2 的证明，我们需要下列 Borel 关于整函数组的一个引理.

引理 1[3, p82] 设 $n(\geqslant 2)$为正整数，$a_j(z)$，$g_j(z)$（$j=1,\cdots,n$)为两组整函数，且满足

（i）$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$；

（ii）每个 $a_j(z)$（$j=1,\cdots,n$)的级均小于函数 $e^{g_h(z)-g_k(z)}$（$1\leqslant h<k\leqslant n$)的级，则 $a_j(z)\equiv 0$（$j=1,\cdots,n$).

引理 2[9, 定理2] 设 f 为非常数整函数，其级为有穷，a 为非零有穷复数，k 为正整数．如果 f 和 $f^{(k)}CM$ 共享值 a，则对某一非零常数 c，有

$$\frac{f^{(k)}-a}{f-a}\equiv c.$$

3 定理 2 的证明

由引理 2 知，存在两个非零常数 λ 和 μ 满足

$$\frac{f^{(n)}-a}{f-a}=\lambda, \tag{3.1}$$

$$\frac{f^{(m)}-a}{f-a}=\mu. \tag{3.2}$$

由(3.1)式可得

$$f(z)=\sum_{j=1}^{n}A_j\mathrm{e}^{b_jz}+a-\frac{a}{\lambda}, \tag{3.3}$$

其中 A_j 和 b_j 都是常数，并且满足 $b_j^n=\lambda(j=1,\cdots,n)$.

类似地，由(3.2)式可得

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}+a-\frac{a}{\mu}, \tag{3.4}$$

其中 B_k 和 c_k 都是常数，并且满足 $c_k^m=\mu$ $(k=1,\cdots,m)$.

以下区分两种情形来讨论.

情形 1　$n=1$. 由(3.3)和(3.4)式

$$A_1\mathrm{e}^{b_1z}-\sum_{k=1}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}\equiv a(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}). \tag{3.5}$$

因为 $c_k\neq c_p(1\leqslant k<p\leqslant m)$，$b_1\neq 0$ 以及 $c_k\neq 0$ $(k=1,\cdots,m)$，由(3.5)式及引理 1 可以推出：存在 c_{k_1} 使得 $c_{k_1}=b\backslash-1$,其中 $k_1\in\{1,\cdots,m\}$. 如若不然，我们将由(3.5)式和引理 1 推出 $A_1=0$，由此及(3.3)式表明：f 是常数，这不可能. 不失一般性，我们假设 $c_{k_1}=c_1(=b_1)$. 于是，(3.5)式成为

$$(A_1-B_1)\mathrm{e}^{b_1z}-\sum_{k=2}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}\equiv a(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}).$$

由上式及引理 1 可得 $\lambda=\mu$，再结合(3.3)和(3.4)式，我们有

$$f(z)=A_1\mathrm{e}^{b_1z}+a-\frac{a}{\lambda},$$

其中 $b_1^m=b_1=\lambda$. 由此可得定理 1 的情形(i)或(ii).

情形 2　$n\geqslant 2$. 由(3.3)和(3.4)式得

$$\sum_{j=1}^{n}A_j\mathrm{e}^{b_jz}-\sum_{k=1}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}\equiv a(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}). \tag{3.6}$$

因为 $b_j\neq b_l(1\leqslant j<l\leqslant n)$，$c_k\neq c_p(1\leqslant k<p\leqslant m)$，$b_j\neq 0$ $(j=1,\cdots,n)$ 以及 $c_k\neq 0$ $(k=1,\cdots,m)$，由(3.6)式及引理 1 可以推出，存在 b_{j_1} 和 c_{k_1} 使得 $b_{j_1}=c_{k_1}$，其中 $j_1\in\{1,\cdots,n\}$，$k_1\in\{1,\cdots,m\}$. 否则，我们可由(3.6)式和引理 1 推出 $A_j=0$ $(j=1,\cdots,n)$，由此及(3.3)式表明：f 是常数，此谓不可能. 不失一般性，我们假设 $b_{j_1}=b_1$，$c_{k_1}=c_1$. 因此，(3.6)式可以被改写成

$$(A_1-B_1)\mathrm{e}^{b_1z}+\sum_{j=2}^{n}A_j\mathrm{e}^{b_j}-\sum_{k=2}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}\equiv a(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}).$$

对(3.6)式反复应用引理 1，可以推出存在 $b_{j_q}\in\{b_1,\cdots,b_n\}$ 和 $c_{k_q}\in\{c_1,\cdots,c_m\}$ 使得 $b_{j_q}=c_{k_q}(q=1,\cdots,\tau_1(\leqslant n))$. 不失一般性，我们假设 $b_{j_q}=b_q,c_{k_q}=c_q(q=1,\cdots,\tau_1)$. 由此及(3.6)式可得

$$\sum_{j=1}^{\tau_1}(A_j-B_j)\mathrm{e}^{b_jz}+\sum_{j=\tau_1+1}^{n}A_j\mathrm{e}^{b_jz}-\sum_{k=\tau_1+1}^{m}B_k\mathrm{e}^{c_kz}\equiv a(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}), \tag{3.7}$$

这里，如果 $\tau_1<n$，则对每一个 $j\in\{\tau_1+1,\cdots,n\}$，均有 $b_j\neq c_k(k=1,\cdots,m)$.

对(3.7)式再次应用引理 1，并注意到事实 $b_j\neq c_k(j=\tau_1+1,\cdots,n,k=1,\cdots,m)$，可

以推出：对 $s=\tau_1+1,\cdots,n$；$k=\tau_1+1,\cdots,m$ 以及 $j=1,\cdots,\tau_1$ 有

$$a\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)=A_s=B_k=A_j-B_j=0, \tag{3.8}$$

由(3.8)，(3.3)和(3.4)式可得 $\lambda=\mu$ 以及

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\tau_1}A_j e^{b_j z}+a-\frac{a}{\lambda}, \tag{3.9}$$

其中 $b_j^n=b_j^m=\lambda$ $(j=1,\cdots,\tau_1)$，由此可得 $b_j^{m-n}=1$ $(j=1,\cdots,\tau_1)$以及$|\lambda|=1$. 此外，由(3.1)，(3.2)式以及 $\lambda=\mu$ 这一事实可得 $f^{(n)}\equiv f^{(m)}$. 通过积分,我们有

$$f^{(m-n)}(z)\equiv f(z)+P_{n-1}(z), \tag{3.10}$$

其中 $P_{n-1}(z)$是一个关于 z 的多项式,其次数至多为 $n-1$.

由(3.9)，(3.10)式及事实 $b_j^{m-n}=1$ $(j=1\cdots,\tau_1)$可得

$$\sum_{j=1}^{\tau_1}A_j e^{b_j z}\equiv\sum_{j=1}^{\tau_1}A_j e^{b_j z}+a-\frac{a}{\lambda}+P_{n-1}(z), \tag{3.11}$$

上式表明 $P_{n-1}(z)\equiv\frac{a}{\lambda}-a$，由此及(3.10)式将导致

$$f^{(m-n)}(z)\equiv f(z)-a+\frac{a}{\lambda}. \tag{3.12}$$

由(3.12)式可得

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m-n}t_k e^{s_k z}+a-\frac{a}{\lambda}, \tag{3.13}$$

其中 t_k 和 $s_k(k=1,\cdots,m-n)$均为常数.

由(3.9)，(3.13)式和引理 1，可以推出：存在 $b_{j_q}\in\{b_1,\cdots,b_{\tau_1}\}$和 $s_{k_q}\in\{s_1,\cdots,s_{m-n}\}$使得 $b_{j_q}=s_{k_q}(q=1,\cdots,\tau(\leqslant\min\{\tau_1,m-n\}))$以及对任何 $j\neq j_q$，$k\neq k_q(q=1,\cdots,\tau)$，有 $A_j=t_k=0$. 不失一般性，我们假设 $b_{j_q}=b_q$，$s_{k_q}=s_q(q=1,\cdots,\tau)$. 因此，由(3.9)和(3.13)式可以推出

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\tau}c_j e^{b_j z}+a-\frac{a}{\lambda}, \tag{3.14}$$

其中 c_j 和 b_j 都是非零常数，并且满足

$$b_j^n=b_j^m=\lambda,\ b_j^{m-n}=1\ (j=1,\cdots,\tau). \tag{3.15}$$

如果 $\lambda=1$，则可由(3.14)式得 $f\equiv f^{(n)}$,从而得到定理 1 的情形(i). 在以下的行文中，假设 $\lambda\neq1$. 我们考虑下列两种子情形.

子情形 2.1　m 和 n 是互素的正整数.

在这种子情形下，我们断言：只存在一个 $b_j(j\in\{1,\cdots,\tau\})$满足(3.15)式. 如若不然，即至少存在两个 $b_j(j\in\{1,\cdots,\tau\})$，例如 b_1 和 b_2，两者都满足(3.15)式. 于是，我们有

$$b_1^n=b_1^m=\lambda \tag{3.16}$$

以及

$$b_2^n=b_2^m=\lambda. \tag{3.17}$$

因为$|\lambda|=1$，$\lambda\neq1$，故我们可以假设 $\lambda=e^{i\theta_0}$，其中 θ_0 是实数，并且满足 $\theta_0\neq2l\pi$(l 是整数). 由此及(3.16)式可得

$$b_1=e^{i\frac{\theta_0+2k_1\pi}{n}}, \tag{3.18}$$

其中 $k_1\in\{0,\cdots,n-1\}$. 由(3.18)并注意到 $\lambda=b_1^m$，可得 $e^{i\theta_0}=e^{i\frac{m\theta_0+2k_1m\pi}{n}}$，这表明存在一个整数 p，使得 $\theta_0+2p\pi=\frac{m\theta_0+2k_1m\pi}{n}$，即

$$\theta_0 = \frac{pn - k_1 m}{m - n} 2\pi. \tag{3.19}$$

类似地，我们可由(3.17)式推出：存在两个整数 q 和 $k_2 \in \{0, \cdots, n-1\}$ 满足 $k_1 \neq k_2$，使得

$$\theta_0 = \frac{qn - k_2 m}{m - n} 2\pi. \tag{3.20}$$

有(3.19)和(3.20)式，得

$$(p - q)n = (k_1 - k_2)m. \tag{3.21}$$

因为 m 和 n 是互素的正整数，由(3.21)式可以推出

$$p - q \equiv O(\mathrm{mod}\ m). \tag{3.22}$$

因为 $k_1 \neq k_2$，因此，由(3.21)式可得 $p \neq q$. 由此并考虑到 $|k_1 - k_2| \leqslant n-1$，立即可由(3.21)和(3.22)式推出矛盾. 于是，我们的断言成立，并且可以得到定理 1 的情形(ii).

子情形 2.2 m 和 n 不互素.

在这种子情形下，函数 f 由(3.14)和(3.15)式给出，这就是定理 1 的情形(iii). 定理 2 证完.

注 2 下面的例子表明：如果 m 和 n 不互素，则在定理 1 的结论(iii)中，所有常数 c_j ($j=1, \cdots, \tau \leqslant \min\{n, m-n\}$) 均不为零的情形确实可能发生.

例 取 $n=3$，$m=12$，$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{3}}$，$b_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$，$b_2 = e^{-i\frac{4\pi}{9}}$，$b_3 = e^{-i\frac{10\pi}{9}}$. 置 $f(z) = e^{b_1 z} + e^{b_2 z} + e^{b_3 z} + a - \dfrac{a}{\lambda}$，其中 $a \neq 0$ 为任意常数. 显然，m 和 n 不互素，f，$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}$ CM 共享值 a，并且 b_j 满足 $b_j^n = b_j^m = \lambda \neq 1$ ($j=1,2,3$). 但是函数 f 既不满足定理 1 的情形(i)，也不满足定理 1 的情形(ii). 例子还表明：即使正整数 m 和 n 的奇偶性不同，问题 1 的答案也是否定的.

4 定理 1 的证明

置

$$\alpha = \frac{f^{(n)} - f^{(m)}}{f - a}, \tag{4.1}$$

因为 f，$f^{(n)}$ 和 $f^{(m)}$ CM 共享值 a，由(4.1)式可知 α 是一个整函数，并且满足

$$T(r, \alpha) = S(r, f). \tag{4.2}$$

如果 α 是常数，则由(4.1)式可知 f 的级为有穷. 从而，由定理 2 可以推出定理 1 的结论成立. 现在我们假设 α 不是常数，由此并注意到 α 是整函数，可得

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(j)} \not\equiv \text{const.}\ (j = 0, 1, \cdots). \tag{4.3}$$

改写(4.1)式成为

$$f = a + \frac{1}{\alpha}[f^{(n)} - f^{(m)}]. \tag{4.4}$$

因为 f 是整函数，由(4.2)和(4.4)式可得

$$\begin{aligned} T(r, f) &= m(r, f) \\ &\leqslant m(r, f^{(n)}) + S(r, f) \\ &\leqslant m(r, f) + S(r, f) \\ &= T(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

上式表明

$$T(r, f) = T(r, f^{(n)}) + S(r, f). \tag{4.5}$$

由(4.5)式，立即可得

$$T(r,f^{(k)})=T(r,f^{(n)})+S(r,f)\quad(k=1,\cdots,n).\tag{4.6}$$

对(4.4)式求导 k 次，有

$$f^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(j)}\left[f^{(n+k-j)}-f^{(m+k-j)}\right],\tag{4.7}$$

由(4.2)，(4.3)和(4.7)式，可得 $m\left(r,\dfrac{f^{(k)}}{f^{(k)}-a}\right)=S(r,f)$ $(k=1,\cdots,n)$. 由此得

$$m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)=S(r,f)\quad(k=1,\cdots,n).\tag{4.8}$$

由(4.8)，(4.5)式及第一基本定理

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}-a}\right)=T(r,f^{(n)})+S(r,f)=T(r,f)+S(r,f).$$

注意到 f 和 $f^{(n)}$ *CM* 共享值 a，由上式及第一基本定理可得

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)&=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+O(1)\\&=N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}-a}\right)-N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)=S(r,f).\end{aligned}\tag{4.9}$$

此外，我们可以假设

$$\frac{f^{(m)}-a}{f-a}=\mathrm{e}^{-\beta},\tag{4.10}$$

其中 β 是整函数. 由(4.9)和(4.10)式可得

$$T(r,\mathrm{e}^{\beta})=S(r,f).\tag{4.11}$$

由(4.10)和(4.11)式得

$$T(r,f^{(m)})=T(r,f)+S(r,f).\tag{4.12}$$

如果 e^{β} 是常数，则由(4.10)式可知 f 的级为有穷. 由定理 2 知定理 1 的结论成立. 现在假设 e^{β} 不是常数. 改写(4.10)式

$$f=a+\mathrm{e}^{\beta}f^{(m)}-a\mathrm{e}^{\beta}.\tag{4.13}$$

对(4.13)式求导 k 次，有

$$f^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\mathrm{e}^{\beta})^{(j)}f^{(m+k-j)}-a(\mathrm{e}^{\beta})^{(k)}\quad(k=1,2,\cdots).\tag{4.14}$$

容易看到，对任意正整数 k，$(\mathrm{e}^{\beta})^{(k)}$ 都不是常数. 因此，由(4.14)式，(4.11)式，(4.12)式以及事实 $a\neq0$，可得

$$T(r,f^{(k)})=T(r,f)+S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots,m),\tag{4.15}$$

$$m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)=S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots,m)\tag{4.16}$$

以及

$$m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)=S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots,m).\tag{4.17}$$

现在，对任何非负整数 k 和 s，我们用 $Q_k^s(\mathrm{e}^{\beta})$ 或 $R_k^s(\mathrm{e}^{\beta})$ 或 $Q(\mathrm{e}^{\beta})$ 表示关于 e^{β} 的多项式，其系数均为函数 e^{β} 的小函数，但每次出现时未必相同. 对 k 应用数学归纳法，我们将证明：对所有 $k\geqslant m$，有

$$\left[1+\mathrm{e}^{\beta}Q_k^0(\mathrm{e}^{\beta})\right]f^{(k)}=\sum_{s=1}^{m}Q_k^s(\mathrm{e}^{\beta})f^{(k+s)}+\mathrm{e}^{\beta}R_k^0(\mathrm{e}^{\beta}),\tag{4.18}$$

其中 $Q_k^s(\mathrm{e}^{\beta})\cdot R_k^0(\mathrm{e}^{\beta})\neq0$ $(k\geqslant m;\ s=1,2,\cdots,m)$.

经简单计算可知，对 $k=1,2,\cdots$，有

$$(\mathrm{e}^{\beta})^{(k)} = P_{k-1}[\beta'] \cdot \mathrm{e}^{\beta}, \tag{4.19}$$

其中 $P_{k-1}[\beta']$是关于β'及其导数的常系数多项式，其次数至多为 $k-1$.

当 $k=m$ 时，我们可由(4.14)式,(4.19)式以及$(\mathrm{e}^{\beta})^{(k)}$不恒为常数的事实，得到等式(4.18). 假设(4.18)式对整数 $k=m+j$ ($j\geqslant 0$ 为某个整数)成立，现在我们将证明(4.18)式对整数 $k=m+j+1$ 仍成立，i. e. 。

$$\{1+\mathrm{e}^{\beta}Q^{0}_{m+j+1}(\mathrm{e}^{\beta})\}f^{(m+j+1)} = \sum_{s=1}^{m} Q^{s}_{m+j+1}(\mathrm{e}^{\beta})f^{(m+j+1+s)} + \mathrm{e}^{\beta}R^{0}_{m+j+1}(\mathrm{e}^{\beta}), \tag{4.20}$$

其中 $Q^{s}_{m+j+1}(\mathrm{e}^{\beta}) \cdot R^{0}_{m+j+1}(\mathrm{e}^{\beta}) \not\equiv 0$ ($s=1,2,\cdots,m$).

为叙述简单起见，当整数 $t<0$ 时，我们记组合数 $C^{t}_{s}=0$，其中 s 是正整数. 在(4.14)式中，取 $k=m,m+1,\cdots,m+j$，可得下列关于 $f^{(m)},f^{(m+1)},\cdots,f^{(m+j)}$ 的线性方程组

$$A \cdot F = B, \tag{4.21}$$

其中矩阵 A，F 和 B 分别定义如下

$$A = \begin{pmatrix} C^{m}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m)}-1 & C^{m-1}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m-1)} & \cdots & C^{m-j}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m-j)} \\ C^{m+1}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+1)} & C^{m}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m)}-1 & \cdots & C^{m-j+1}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m-j+1)} \\ & \cdots\cdots & & \\ C^{m+j}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+j)} & C^{m+j-1}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+j-1)} & \cdots & C^{m}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m)}-1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f^{(m)} \\ f^{(m+1)} \\ \cdots \\ f^{(m+j)} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{j} C^{m-t}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m-t)}f^{(m+t)} - f^{(m)} \\ \sum_{t=0}^{j} C^{m+1-t}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+1-t)}f^{(m+t)} - f^{(m+1)} \\ \cdots \\ \sum_{t=0}^{j} C^{m+j-t}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+j-t)}f^{(m+t)} - f^{(m+j)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{j} C^{m-t}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m-t)}f^{(m+t)} - \sum_{t=0}^{m} C^{t}_{m}(\mathrm{e}^{\beta})^{(t)}f^{(2m-t)} + a(\mathrm{e}^{\beta})^{(m)} \\ \sum_{t=0}^{j} C^{m+1-t}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+1-t)}f^{(m+t)} - \sum_{t=0}^{m+1} C^{t}_{m+1}(\mathrm{e}^{\beta})^{(t)}f^{(2m+1-t)} + a(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+1)} \\ \cdots\cdots \\ \sum_{t=0}^{j} C^{m+j-t}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+j-t)}f^{(m+t)} - \sum_{t=0}^{m+j} C^{t}_{m+j}(\mathrm{e}^{\beta})^{(t)}f^{(2m+j-t)} + a(\mathrm{e}^{\beta})^{(m+j)} \end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 A 的上述定义和(4.19)式，由关于行列式计算的 Laplace 定理可知，在行列式 $\det A$ 展开式的所有项中，除了$(-1)^{j+1}$以外，必定含有因子 e^{β}. 因此，我们可以记

$$\det A = (-1)^{j+1} + \mathrm{e}^{\beta}Q(\mathrm{e}^{\beta}). \tag{4.22}$$

因为多项式 $Q(\mathrm{e}^{\beta})$(关于 e^{β})的所有系数都是关于 e^{β} 的小函数，故由(4.22)式和引理 1 可知 $\det A\neq 0$. 因此，由著名的克莱姆法则可以推出线性方程组(4.21)有如下一组解

$$f^{(m+k)} = \det A_k/\det A \qquad (k=0,1,\cdots,j), \tag{4.23}$$

其中除了 A_k($k=0,1,\cdots,j$)中的第 $k+1$ 列被 B 代替以外，矩阵 A_k 和矩阵 A 相同.

展开行列式 $\det A_k$ 的第 $k+1$ 列，再注意到(4.19)式以及矩阵 B 的定义，对整数 $k=0$，$1,\cdots,j$，我们可记

$$\begin{aligned} \det A_k &= b_1Q^{1}_{k}(\mathrm{e}^{\beta}) + b_2Q^{2}_{k}(\mathrm{e}^{\beta}) + \cdots + b_{j+1}Q^{j+1}_{k}(\mathrm{e}^{\beta}) \\ &:= \mathrm{e}^{\beta}R^{1}_{k}(\mathrm{e}^{\beta})f^{(m+j+1)} + \mathrm{e}^{\beta}R^{2}_{k}(\mathrm{e}^{\beta})f^{(m+j+2)} + \cdots + \mathrm{e}^{\beta}R^{m}_{k}(\mathrm{e}^{\beta})f^{(2m+j)} + \mathrm{e}^{\beta}R^{0}_{k}(\mathrm{e}^{\beta}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

另一方面，在(4.14)式中取 $k=m+j+1$，然后将(4.23)和(4.24)式代入，可得

$$\begin{aligned}f^{(m+j+1)}&=e^{\beta}f^{(2m+j+1)}+C_{m+j+1}^{1}(e^{\beta})'f^{(2m+j)}+\cdots+C_{m+j+1}^{m}(e^{\beta})^{(m)}f^{(m+j+1)}\\&\quad+C_{m+j+1}^{m+1}(e^{\beta})^{(m+1)}\cdot\frac{e^{\beta}}{\det A}\{R_j^1(e^{\beta})f^{(m+j+1)}+R_j^2(e^{\beta})f^{(m+j+2)}+\cdots\\&\quad+R_j^m(e^{\beta})f^{(2m+j)}+R_j^0(e^{\beta})\}+\cdots\\&\quad+C_{m+j+1}^{m+j}(e^{\beta})^{(m+j)}\cdot\frac{e^{\beta}}{\det A}\{R_1^1(e^{\beta})f^{(m+j+1)}+R_1^2(e^{\beta})f^{(m+j+2)}+\cdots\\&\quad+R_1^m(e^{\beta})f^{(2m+j)}+R_1^0(e^{\beta})\}\\&\quad+(e^{\beta})^{(m+j+1)}\cdot\frac{e^{\beta}}{\det A}\{R_0^1(e^{\beta})f^{(m+j+1)}+R_0^2(e^{\beta})f^{(m+j+2)}+\cdots\\&\quad+R_0^m(e^{\beta})f^{(2m+j)}+R_0^0(e^{\beta})\}-a(e^{\beta})^{(m+j+1)}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

用行列式 $\det A$ 乘以(4.25)式两边，并注意到以下事实：对每一个正整数 k，因为 e^{β} 是超越的，故(4.19)式中的 $P_{k-1}[\beta']\not\equiv 0$，最终可以推出(4.20)式.

至此，由上述归纳讨论可知(4.18)式成立. 因此，考虑到(4.15)和(4.16)式，由(4.18)式可得

$$T(r,f^{(k)})=T(r,f)+S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots),\tag{4.26}$$

$$m(r,\frac{1}{f^{(k)}})=S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots),\tag{4.27}$$

此外，由引理 1 和 $a\neq 0$ 的事实可以看出：对整数 $k\geqslant m$，$e^{\beta}R_k^0(e^{\beta})-a[1+e^{\beta}Q_k^0(e^{\beta})]\not\equiv 0$. 因此，在(4.18)式两边加上项 $-a[1+e^{\beta}Q_k^0(e^{\beta})]$，并注意到(4.17)式，可以得到

$$m(r,\frac{1}{f^{(k)}-a})=S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots).\tag{4.28}$$

由(4.27),(4.26)式和第一基本定理，得

$$N(r,\frac{1}{f^{(k)}})=T(r,f^{(k)})+S(r,f)=T(r,f)+S(r,f)\quad(k=1,2,\cdots).\tag{4.29}$$

由(4.28),(4.29)式及第二基本定理可知，对整数 $k=0,1,2,\cdots$

$$\begin{aligned}T(r,f^{(k)})&<N(r,\frac{1}{f^{(k)}-a})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})-N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})+S(r,f^{(k)})\\&=T(r,f^{(k)})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})-T(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)})\\&=N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})+S(r,f^{(k)})\leqslant T(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)}),\end{aligned}$$

其中 $c\neq a$ 为任意有穷常数. 由上述不等式可得

$$N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})=T(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)})\quad(k=0,1,2,\cdots).\tag{4.30}$$

因为常数 c 是任意的，故由(4.30)和(4.28)式可以推出：对每一个非负整数 k 以及有穷常数 c，均有 $\delta(c,f^{(k)})=0$，这与定理 1 的假设矛盾. 定理 1 证完.

参 考 文 献

[1] Rubel L A, Yang C C. Values Shared by an Entire Function and its Derivatives. Lecture Notes in Mathematics, 599. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 101－103

[2] Jank G, Mues Volkmann E. Meromorphe funktionen, die mit ihrer ersten und zweiten ableitung einen endlichen werte teilen. Complex Variables Theory Appl, 1986, **6**: 51－71

[3] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论. 北京：科学出版社，1995

[4] Frank G, Weissenborn G. Meromorphe funktionen, die mit einer ihrer ableitungen werte teilen. Complex Variables, 1986, **7**: 33—43

[5] Li P, Yang C C. When an entire function and its linear differential polynomial share two values. Illinois J Math, 2000, **44**: 349—362

[6] Li P, Yang C C. Value sharing of an entire function and its devivatives. J Math Soc Japan, 1999, **51**: 781—799

[7] Yang L Z. Further results on entire functions that share one value with their derivatives. J Math Anal Appl, 1997, **212**: 529—536

[8] Wang J P, Yi H X. Entire functions that share one value *CM* with their derivatives. J Math Anal Appl, 2003, **277**: 155—163

[9] Yang L Z. Solution of a differential equation and its applications. Kodai Math J, 1999, **22**: 458—464

Entire Functions That Share a Value *CM* with Their Two Derivatives

[1]Wang Jianping [2]Yi Hongxun

([1]*Department of Mathematics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing* 312000;
[2]*Department of Mathematics, Shandong University, Jinan* 250100)

Abstract: This paper studies the uniqueness problem on entire functions that share a finite, nonzero value with two of their derivatives and gives the definite expressions of the functions which appear to be a proper answer to the question proposed by Yi H X and Yang C C[3,p458].

Key words: Entire function; Shared value; Uniqueness.

MR(2000) Subject Classification: 30D35