2005,**25A**(5):604－611

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

正态线性模型中随机回归系数和参数的 Minimax 估计*

[1] 徐礼文　[2] 喻胜华

([1] 北京工业大学应用数理学院　北京 100022；[2] 中南大学数学科学与计算技术学院　长沙 410083)

摘要:该文在一般正态随机效应线性模型中研究了随机回归系数和参数的估计问题. 在二次损失下,得到了线性可估函数在一切估计类中的唯一 Minimax 估计.

关键词:Minimax 估计;二次损失;随机效应;正态线性模型。

MR(2000)主题分类:62J05　　**中图分类号**:O212.4　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)05-604-08

1　引言

为方便起见,先给出以下记号. 对于任一矩阵 A,$\mu(A)$、$tr(A)$和 $r(A)$分别表示矩阵 A 的列子空间、迹和秩;A^- 和 A^+ 分别表示 A 的任一 g-逆和 Moore-Penrose 广义逆;$A\geqslant 0$($A>0$)表示 A 是一个对称非负定(正定) 阵.

考虑一般随机效应线性模型

$$\begin{cases} Y = X\beta+\varepsilon, \\ \begin{pmatrix}\beta\\ \varepsilon\end{pmatrix}\sim N_{p+n}\left(\begin{pmatrix}A\alpha\\ 0\end{pmatrix},\sigma^2\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 Y 是随机观测向量,X 是已知的 $n\times p$ 矩阵, β 和 ε 分别是 p 维和 n 维不可观测的随机向量,$V=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\geqslant 0$ 和 A 是已知矩阵,$\alpha\in R^k$ 和 $\sigma^2>0$ 是未知参数.

设随机向量 $Y\sim\{P_{(\alpha,\sigma^2)},(\alpha,\sigma^2)\in\Theta\}$,$g((\alpha,\sigma^2))$是待估计向量. 在二次损失函数$[\delta-g((\alpha,\sigma^2))]'[\delta-g((\alpha,\sigma^2))]$下, 称估计 $\delta_1(Y)$优于 $\delta_2(Y)$,如果

$$E[\delta_2(Y)-g((\alpha,\sigma^2))]'[\delta_2(Y)-g((\alpha,\sigma^2))] - E[\delta_1(Y)-g((\alpha,\sigma^2))]'[\delta_1(Y)-g((\alpha,\sigma^2))]\geqslant 0,$$

对一切$(\alpha,\sigma^2)\in\Theta$ 成立,且存在$(\alpha_0,\sigma_0^2)\in\Theta$ 使得上式严格不等号成立. 称估计 $\delta(Y)$为 $g((\alpha,\sigma^2))$在估计类 $\mathscr{L}$ 中的可容许估计,如果 $\delta(Y)\in\mathscr{L}$ 且在 $\mathscr{L}$ 中不存在任何其它的估计优于 $\delta(Y)$.

设 $S\alpha+Q\beta$ 是线性可估函数,这里 S 和 Q 分别是 $l\times k$ 和 $l\times p$ 的矩阵. 当 S 和 Q 都是行向量时,Rao C R[1], Harville D[2] 和 Pfeffermann D[3] 研究了 $S\alpha+Q\beta$ 的最优线性无偏估

收稿日期:2003-10-28

E-mail:xuliwen@emails.bjut.edu.cn

* 基金项目:国家自然科学基金(10101006)和中南大学博士后经费资助

计;董莉明、吴启光[4]和吴启光[5]在二次损失下研究了 $S\alpha+Q\beta$ 的估计的可容许性. 对于模型(1.1),我们感兴趣的是研究 $S\alpha+Q\beta$ 的一个线性估计在一切估计类中的 Minimax 性.

易知,$S\alpha+Q\beta$ 是线性可估的,当且仅当 $\mu(S'+A'Q')\subset\mu(A'X')$. 众所周知,Minimax 估计与损失函数和所考虑的估计类有关. 设 $S\alpha+Q\beta$ 为线性可估函数,关于 Minimax 估计虽然有了很多结果,但还不够充分. 若回归系数非随机,这相当于 $V_{11}=0,A=I_p$ 的情形,对于较简单的线性模型 $Y\sim N(\alpha,\sigma^2 I_n)$ 和损失函数 $\|\delta-\alpha\|^2/\sigma^2$,对 α 的 Minimax 估计已有不少研究(见 Efron B, Morris C[6] 和 Khusheed A[7]). 但这些都只考虑 α 本身的估计问题,没有考虑一般的可估函数. 当 $V_{22}>0$ 时,无需正态假设,徐兴忠[8]在二次损失函数 $L(\delta,S\alpha)=\|\delta-S\alpha\|^2/(\sigma^2+\alpha'X'V_{22}^{-1}X\alpha)$ 下得到了可估函数 $S\alpha$ 在齐次线性估计类中的唯一线性 Minimax 估计;在正态假设下,文献[9]利用可容许理论,证明了可估函数 $S\alpha$ 的唯一线性 Minimax 估计在一切估计类中也是 $S\alpha$ 的唯一 Minimax 估计. 本文针对一般的随机效应线性模型(1.1)及线性可估函数 $S\alpha+Q\beta$,选取二次损失函数

$$L(\delta,S\alpha+Q\beta)=\frac{(\delta-S\alpha-Q\beta)'(\delta-S\alpha-Q\beta)}{\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-1}XA\alpha}, \tag{1.2}$$

这里 $\Lambda=XV_{11}X'+V_{21}X'+XV_{12}+V_{22}>0$ 是已知矩阵,研究了 $S\alpha+Q\beta$ 的一个线性估计在一切估计类中的 Minimax 性,得到了 $S\alpha+Q\beta$ 的唯一 Minimax 估计.

2 主要结果

除特别说明外,本节所说的 Minimax 估计均指在一切估计类中的 Minimax 估计. 对于模型(1.1),有

$$\mathrm{Var}(Y)=\sigma^2(X\quad I)V\begin{pmatrix}X'\\ I\end{pmatrix}=\sigma^2(XV_{11}X'+V_{21}X'+XV_{12}+V_{22})=\sigma^2\Lambda,$$

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix}\beta\\ Y\end{pmatrix}=\mathrm{Var}\left(\begin{pmatrix}I & 0\\ X & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \varepsilon\end{pmatrix}\right)=\sigma^2\begin{pmatrix}V_{11} & V_{11}X'+V_{12}\\ XV_{11}+V_{21} & \Lambda\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

且 β 可以表示为

$$\beta=A\alpha+e,e\sim N(0,\sigma^2V_{11}).$$

令

$$R(\delta,S\alpha+Q\beta)=EL(\delta,S\alpha+Q\beta),$$
$$c^2=\mathrm{tr}[QV_{11}Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(XV_{11}+V_{21})Q'].$$

对矩阵 $(S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA)(A'X'\Lambda^{-1}XA)^+A'X'\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ 作奇异值分解

$$(S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA)(A'X'\Lambda^{-1}XA)^+A'X'\Lambda^{-\frac{1}{2}}=GFT'. \tag{2.2}$$

这里 $t=r((S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA)(A'X'\Lambda^{-1}XA)^+A'X'\Lambda^{-\frac{1}{2}})$,$G'G=T'T=I_t$ 且 $F=\mathrm{diag}(f_1,f_2,\cdots,f_t)$,$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_t>0$.

记 $$C_i=\Big[c^2+\sum_{j=1}^{i}(f_j-f_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}},i=1,2,\cdots,t;m=\max\{i:C_i\leqslant f_i\}.$$

这样定义的 m 存在,当且仅当 $C_1\leqslant f_1$. 事实上,如果 $C_1\leqslant f_1$,显然 $m=\max\{i:C_i\leqslant f_i\}$ 存在;如果 $C_1>f_1$,由 $C_t\geqslant C_{t-1}\geqslant\cdots\geqslant C_1=|c|$ 和 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_t>0$,易见 $m=\max\{i:C_i\leqslant f_i\}$ 不存在. 另记

$$J_f=\frac{c^2+\sum_{i=1}^m f_i^2}{\sum_{i=1}^m f_i+[(\sum_{i=1}^m f_i)^2-(m-1)(\sum_{i=1}^m f_i^2+c^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

显然有 J_f 满足 $c^2+\sum_{i=1}^m(J_f-f_i)^2=J_f^2$.

引理 2.1 $f_m\geqslant J_f$，且当 $m<t$ 时，$f_{m+1}<J_f$.

引理的证明可参见文[9]的引理 2.2. 且由文[10]中定理 4.11 可得下面的引理

引理 2.2 考虑模型 $Y\sim N(X\alpha,\sigma^2V)$，这里 $V>0$ 为已知矩阵，$\sigma^2>0$ 是未知参数. 若可估函数 $DX\alpha$ 的估计 LY 满足条件

(1) $LX(X'V^{-1}X)^-X'V^{-1}=L$;

(2) $LVL'\leqslant LVD'$;

(3) $r((L-D)VL')\geqslant r(L)-2$,

则在损失函数 $(\delta-DX\alpha)'(\delta-DX\alpha)$ 下，LY 是 $DX\alpha$ 在一切估计类中的可容许估计.

对矩阵 G 和 T 进行分块：$G=(G_1\cdots G_2)$，$T=(T_1\cdots T_2)$，这里 G_1 和 T_1 分别是 G 和 T 的前 m 列.

定理 对于模型(1.1)和损失函数(1.2)，设 $S\alpha+Q\beta$ 是线性可估函数.

(1) 当 $C_1\leqslant f_1$ 时，L_1Y 是 $S\alpha+Q\beta$ 的唯一 Minimax 估计，且 $\sup\limits_{\alpha\in R^k,\sigma^2>0}(L_1Y,S\alpha+Q\beta)=J_f^2$，这里 $L_1=Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}+G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}}$，$F_0=\mathrm{diag}(f_1-J_f,f_2-J_f,\cdots,f_m-J_f)$;

(2) 当 $C_1>f_1$ 时，L_2Y 是 $S\alpha+Q\beta$ 的唯一 Minimax 估计，且 $\sup\limits_{\alpha\in R^k,\sigma^2>0}(L_2Y,S\alpha+Q\beta)=c^2$，这里 $L_2=Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}$.

证 先证结论(1). 由 $S\alpha+Q\beta$ 是线性可估函数，有

$$\begin{aligned}&S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA\\&=(S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA)(A'X'\Lambda^{-1}XA)^+A'X'\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\\&=GFT'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA.\end{aligned}\tag{2.3}$$

因此

$$t\geqslant r(T'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA)\geqslant r(S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA)\geqslant r(GFT')=t,$$

从而

$$t=r(T'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA)\leqslant r(XA),$$

故矩阵 $T'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA$ 行满秩. 令 $r(XA)=r$，易证：存在 $q\times(r-t)$ 和 $q\times(q-r)$ 的矩阵 T_3 和 T_4 使得

$$(T_1\cdots T_2\cdots T_3\cdots T_4)'(T_1\cdots T_2\cdots T_3\cdots T_4)=I_q,$$

$$r=r(T_1\cdots T_2\cdots T_3)=r((T_1\cdots T_2\cdots T_3)'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA),\quad T_4'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA=0.$$

记：$\widetilde{Y}=(Y_1'\cdots Y_2'\cdots Y_3'\cdots Y_4')'$，$Y_i=T_i'\Lambda^{-\frac{1}{2}}Y$，$i=1,2,3,4$ 且 $\alpha_i=T_i'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\alpha$，$i=1,2,3$. 易知，$\widetilde{Y}\sim N((\alpha_1'\cdots\alpha_2'\cdots\alpha_3'\cdots 0')',\sigma^2I_q)$.

令 $F_1=\mathrm{diag}(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，$F_2=\mathrm{diag}(f_{m+1},\cdots,f_t)$（当 $m<t$ 时）. 由(2.2)式可得

$$\begin{aligned}&(Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}+G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}})XA\alpha-(S+QA)\alpha\\&=G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\alpha-GFT'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\alpha\end{aligned}$$

$$=G_1F_0\alpha_1-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}&E(LY-S\alpha-Q\beta)'(LY-S\alpha-Q\beta)\\ =&\sigma^2[c^2+\mathrm{tr}((L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1})\Lambda(L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1})')]\\ &+\alpha'(LXA-S-QA)'(LXA-S-QA)\alpha.\end{aligned}$$

由引理 2.1 和上面两式可得

$$\begin{aligned}&E(L_1Y-S\alpha-Q\beta)'(L_1Y-S\alpha-Q\beta)\\ =&\sigma^2[c^2+\mathrm{tr}((G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}})\Lambda(G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}})')]\\ &+[(Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}+G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}})XA\alpha-(S+QA)\alpha]'\\ &\cdot[(Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}+G_1F_0T_1'\Lambda^{-\frac{1}{2}})XA\alpha-(S+QA)\alpha]\\ =&\sigma^2[c^2+\mathrm{tr}(G_1F_0T_1'T_1F_0G_1')]+\left(G_1F_0\alpha_1-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right)'\left(G_1F_0\alpha_1-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right)\\ =&\sigma^2[c^2+\mathrm{tr}(F_0^2)]+\left(\begin{pmatrix}F_0\alpha_1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}F_1\alpha_1\\ F_2\alpha_2\end{pmatrix}\right)'\left(\begin{pmatrix}F_0\alpha_1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}F_1\alpha_1\\ F_2\alpha_2\end{pmatrix}\right)\\ =&\sigma^2J_f^2+J_f^2\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'F_2^2\alpha_2\leqslant J_f^2(\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-1}XA\alpha&=\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(T_1\cdots T_2\cdots T_3\cdots T_4)(T_1\cdots T_2\cdots T_3\cdots T_4)'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\alpha\\ &=\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2+\alpha_3'\alpha_3.\end{aligned}$$

所以

$$R(L_1Y,S\alpha+Q\beta)\leqslant\frac{J_f^2(\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2)}{\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-1}XA\alpha}\leqslant J_f^2,$$

特别地，当 $\alpha_2=0,\alpha_3=0$ 时，上式等号成立. 故

$$\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(L_1Y,S\alpha+Q\beta)=J_f^2. \tag{2.4}$$

取 $h=G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-G_1F_1\alpha_1-Qe$，类似前面的推导，可知

$$\frac{Eh'h}{\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1}\equiv J_f^2. \tag{2.5}$$

下证 L_1Y 是 $S\alpha+Q\beta$ 唯一的 Minimax 估计. 若 L_1Y 不是 $S\alpha+Q\beta$ 唯一的 Minimax 估计，则存在 $S\alpha+Q\beta$ 的估计 δ 使得

$$\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(\delta,S\alpha+Q\beta)\leqslant\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(L_1Y,S\alpha+Q\beta), \tag{2.6}$$

$$P(\delta=L_1Y)<1 \tag{2.7}$$

恒成立. 由此可知，当 $\alpha_2=0,\alpha_3=0$ 时，有

$$R(\delta,S\alpha+Q\beta)\leqslant R(L_1Y,S\alpha+Q\beta)=J_f^2$$

恒成立.

由(2.3)和(2.5)式，上式变为

$$\begin{aligned}&E[\delta-G_1F_1\alpha_1-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha-Qe]'\\ &\cdot[\delta-G_1F_1\alpha_1-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha-Qe]\\ \leqslant&E[G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-G_1F_1\alpha_1-Qe]'\end{aligned}$$

$$\cdot [G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - G_1F_1\alpha_1 - Qe].$$

由此及(2.7)式，可知

$$\begin{aligned}
&E[\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-(Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha + Qe + G_1F_1\alpha_1)]'\\
&\cdot[\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-(Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha + Qe + G_1F_1\alpha_1)]\\
=&\frac{1}{2}E[\delta - G_1F_1\alpha_1 - Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha - Qe]'\\
&\cdot[\delta - G_1F_1\alpha_1 - Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha - Qe]\\
&+\frac{1}{2}E[G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - Qe - G_1F_1\alpha_1]'\\
&\cdot[G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - Qe - G_1F_1\alpha_1]\\
&-\frac{1}{4}E[\delta - G_1F_0Y_1 - Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y]'\\
&\cdot[\delta - G_1F_0Y_1 - Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y]\\
<&E[G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - G_1F_1\alpha_1 - Qe]'\\
&\cdot[G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - G_1F_1\alpha_1 - Qe]. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

记：$Y_r = (Y_1' \vdots Y_2' \vdots Y_3')'$，$T_r = (T_1 \vdots T_2 \vdots T_3)$，$\alpha_r = (\alpha_1' \vdots \alpha_2' \vdots \alpha_3')'$，则当 $\alpha_2 = 0$，$\alpha_3 = 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}(Xe + \varepsilon) - G_1F_1\alpha_1 - Qe\\
=&G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}(T_1 \vdots T_2 \vdots T_3 \vdots T_4)(T_1 \vdots T_2 \vdots T_3 \vdots T_4)'\Lambda^{-\frac{1}{2}}Y\\
&-G_1F_1\alpha_1 - Qe - Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}(T_1 \vdots T_2 \vdots T_3 \vdots T_4)(T_1 \vdots T_2 \vdots T_3 \vdots T_4)'\Lambda^{-\frac{1}{2}}XA\alpha\\
=&(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r) - [(G_1F_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1 + Qe] \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-(Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha + Qe + G_1F_1\alpha_1)\\
=&\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-[(G_1F_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1 + Qe]. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

由(2.8)—(2.10)式，当 $\alpha_2 = 0$，$\alpha_3 = 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&E\{\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-[(G_1F_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1 + Qe]\}'\\
&\cdot\{\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-1}Y)\\
&-[(G_1F_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1 + Qe]\}\\
<&E\{(G_1F_0Y_1 + Q(V_{11}X' + V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r)
\end{aligned}$$

$$-[(G_1F_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1+Qe]\}'$$
$$\cdot\{(G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r)$$
$$-[(G_1F_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_1)\alpha_1+Qe]\}. \tag{2.11}$$

令 $\varepsilon_r=T_r'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(Xe+\varepsilon)$，$Y_r=\alpha_r+\varepsilon_r$，则

$$\begin{pmatrix}e\\ Y_r\end{pmatrix}\sim N\left[\begin{pmatrix}0\\ \alpha_r\end{pmatrix},\sigma^2\begin{bmatrix}V_{11} & (V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\\ T_r'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(XV_{11}+V_{21}) & I_r\end{bmatrix}\right]. \tag{2.12}$$

记 $g_1((\alpha_r,\sigma^2))=Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\alpha_r+G_1F_1\alpha_1+Qe$. 下证：在模型(2.12)和损失函数$[\delta(Y_1)-g_1((\alpha_r,\sigma^2))]'(\delta(Y_1)-g_1((\alpha_r,\sigma^2))]$下，$G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r$ 是$g_1((\alpha_r,\sigma^2))$在一切估计类中的可容许估计. 事实上，由(2.12)式和文[11]中第二章的定理2.1，可得

$$E(e\mid Y_r)=(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r(Y_r-\alpha_r), \tag{2.13}$$

$$\mathrm{Var}(e\mid Y_r)=\sigma^2(V_{11}-(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rT_r'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(XV_{11}+V_{21})). \tag{2.14}$$

故

$$E\{[(G_1F_0Y_1-G_1F_1Y_r)+(G_1F_1\varepsilon_r+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\varepsilon_r)]$$
$$-QE(e\mid Y_r)\}'[Qe-QE(e\mid Y_r)]$$
$$=E(E\{[(G_1F_0Y_1-G_1F_1Y_r)+(G_1F_1\varepsilon_r+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\varepsilon_r)-QE(e\mid Y_r)]'$$
$$\cdot[QE(e\mid Y_r)-QE(e\mid Y_r)]\})=0.$$

由此及(2.13)和(2.14)式，可得

$$E[(G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r)-g_1(\alpha_r,\sigma^2)]'$$
$$\cdot[(G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r)-g_1(\alpha_r,\sigma^2)]$$
$$=E(G_1F_0Y_1-G_1F_1\alpha_1)'(G_1F_0Y_1-G_1F_1\alpha_1)$$
$$+\sigma^2\mathrm{tr}(QV_{11}Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rT_r'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(XV_{11}+V_{21})Q'). \tag{2.15}$$

注意到一个估计的可容许性与上式最后一个等号右边第二项无关，要证 $G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r$ 是 $g_1((\alpha_r,\sigma^2))$在一切估计类中的可容许估计，我们只须证明：在模型 $Y_1\sim N(\alpha_1,\sigma^2I_m)$和损失函数$(d-G_1F_1\alpha_1)'(d-G_1F_1\alpha_1)$下，$G_1F_0Y_1$ 是 $G_1F_1\alpha_1$ 在一切估计类中的可容许估计. 由引理 2.1 可得 $F_0\geqslant 0$. 又 $J_f>0$，故 $F_0<F_1$. 由此及引理 2.2，易知 $G_1F_0Y_1$ 是 $G_1F_1\alpha_1$ 在一切估计类中的可容许估计，从而 $G_1F_0Y_1+Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_rY_r$ 是$g_1(\alpha_r,\sigma^2)$在一切估计类中的可容许估计. 这与(2.11)式矛盾. 由此及(2.4)式可知结论(1)成立.

现证结论(2). 当 $C_1>f_1$ 时，由 $C_1=|c|$和 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_t>0$ 可得

$$c^2>f_1^2\geqslant f_2^2\geqslant\cdots\geqslant f_t^2. \tag{2.16}$$

类似结论(1)的证明方法可得

$$Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}-(S+QA)\alpha=-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

再由(2.16)式和下面的事实

$$E(LY-S\alpha-Q\beta)'(LY-S\alpha-Q\beta)$$
$$=\sigma^2[c^2+\mathrm{tr}((L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1})\Lambda(L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1})')]$$

$$+\alpha'(LXA-S-QA)'(LXA-S-QA)\alpha.$$

可得

$$\begin{aligned}&E(L_2Y-S\alpha-Q\beta)'(L_2Y-S\alpha-Q\beta)\\&=\sigma^2c^2+[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}-(S+QA)\alpha]'[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}-(S+QA)\alpha]\\&=\sigma^2c^2+\left(-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\right)'\left(-GF\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\right)\\&=\sigma^2c^2+\alpha_1'F_1^2\alpha_1+\alpha_2'F_2^2\alpha_2\leqslant c^2(\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2).\end{aligned}$$

因此，由 $\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-1}XA\alpha=\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2+\alpha_3'\alpha_3$ 可得

$$R(L_2Y,S\alpha+Q\beta)\leqslant\frac{c^2(\sigma^2+\alpha_1'\alpha_1+\alpha_2'\alpha_2)}{\sigma^2+\alpha'A'X'\Lambda^{-1}XA\alpha}\leqslant c^2,$$

且当 $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0$ 时，上式等号成立. 故

$$\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(L_2Y,S\alpha+Q\beta)=c^2 \tag{2.17}$$

且易得

$$\frac{E[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe]'[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe]}{\sigma^2}=c^2 \tag{2.18}$$

恒成立.

下证 L_2Y 是 $S\alpha+Q\beta$ 在一切估计类中的 Minimax 估计. 事实上，若不然，则存在 $S\alpha+Q\beta$ 的估计 δ 使得

$$\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(\delta,S\alpha+Q\beta)\leqslant\sup_{\sigma^2>0,\alpha\in R^k}R(L_2Y,S\alpha+Q\beta), \tag{2.19}$$

$$P(\delta=L_2Y)<1 \tag{2.20}$$

恒成立.

因此，当 $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0$ 时，有

$$R(\delta,S\alpha+Q\beta)\leqslant R(L_2Y,S\alpha+Q\beta)=c^2 \tag{2.21}$$

恒成立. 由(2.3)和(2.18)式，(2.21)式变为

$$\begin{aligned}&E[\delta-G_1F_1\alpha_1-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha-Qe]'\\&\cdot[\delta-G_1F_1\alpha_1-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}XA\alpha-Qe]\\&=E(\delta-Qe)'(\delta-Qe)\\&\leqslant E[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe]'[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe].\end{aligned}$$

由(2.18)式并且使用结论(1)类似的证明方法可得，当 $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0$ 时，有

$$\begin{aligned}&E[\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}Y-Qe]'[\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}Y-Qe]\\&<E[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe]'[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-1}(Xe+\varepsilon)-Qe]\\&=E[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\varepsilon_r-Qe]'[Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\varepsilon_r-Qe].\end{aligned} \tag{2.22}$$

用结论(1)的证明方法可以证明：在模型

$$\begin{pmatrix}e\\\varepsilon_r\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\sigma^2\begin{pmatrix}V_{11}&(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\\T_r'\Lambda^{-\frac{1}{2}}(XV_{11}+V_{21})&I_r\end{pmatrix}\right)$$

和损失函数 $(d-Qe)'(d-Qe)$ 下，$Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{-\frac{1}{2}}T_r\varepsilon_r$ 是 Qe 在一切估计类中的可容许估计. 这与(2.22)式矛盾，从而结论(2)成立. 证毕. ▌

注： 考虑一般的固定效应线性模型：$Y=X\alpha+\varepsilon$，$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2V)$，这里 X 和 $V>0$ 是已知 $n\times p$ 和 $n\times n$ 矩阵，$\sigma^2>0$ 和 $\alpha\in R^p$ 是未知参数．设 $S\alpha$ 是线性可估函数．则 $G_1F_0T_1'V^{-\frac{1}{2}}Y$ 是 $S\alpha$ 在一切估计类中的唯一 Minimax 估计．这是文[9]的主要定理．

参 考 文 献

[1] Rao C R. The theory of least squares when the parameters are stochastic and its application to the analysis of growth curves. Biometrika, 1965, **52**: 447－458

[2] Harville D. Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. Ann Statist, 1976, **4**: 384－396

[3] Pfeffermann D. On extension of the Gauss-Markov theorem to the case of stochastic regression coefficients. J R Statist Soc, 1984, **46**: 139－148

[4] 董莉明，吴启光．二次损失下随机回归系数和参数的线性估计是可容许的充要条件．数学学报，1988，**2**：145－147

[5] 吴启光．随机回归系数和参数的线性估计的可容许性的几个结果．应用数学学报，1988，**1**：96－106

[6] Efron B, Morris C. Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. Ann Statist, 1976, **4**: 11－21

[7] Khusheed A. A family of admissible minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution. Ann Statist, 1973, (1): 517－525

[8] 徐兴忠．二次损失下回归系数的 Minimax 估计．数学年刊，1993，**14**(5)：621－628

[9] 温忠麟，杨镜华。正态线性模型中可估函数的 Minimax 估计．数学年刊，1999，**20**(6)：685－688

[10] 陈希孺等。线性模型参数的估计理论．北京：科学出版社，1985

[11] 王松桂。线性模型的理论及其应用．合肥：安徽教育出版社，1987

The Minimax Estimator of Stochastic Regression Coefficients and Parameters in Normal Linear Model

Xu Liwen　Yu Shenghua

(*College of Applied Sciences*, *Beijing University of Technology*, *Beijing* 100022;
School of Mathematical Sciences and Computing Technology, *Central South University*, *Changsha* 410083)

Abstract: In this paper the authors investigate estimation problem of stochastic regression coefficients and parameters in the general normal random effects linear model. Under the quadratic loss, the authors obtain the unique minimax estimator of linear estimable functions in the class of all estimators.

Key words: Minimax estimator; Quadratic loss; Random effects; Normal linear model.

MR(2000) Subject Classification: 62J05