2005,**25A**(3):323－330

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

中立型随机泛函微分方程的稳定性*

沈轶　张玉民　廖晓昕

(华中科技大学控制科学与工程系　武汉 430074)

摘要:该文研究了一般中立型随机微分方程解的渐近性质,利用 Lyapunov 函数和上鞅收敛定理,得到了该方程解的一些渐近稳定性、多项式渐近稳定性及指数稳定性等渐近性质,其结果涵盖并推广了已有文献的结论。

关键词:Lyapunov 函数;上鞅收敛定理;Itô 公式;渐近稳定性。

MR(2000)主题分类:34F05　**中图分类号**:TP13　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)03-323-08

1　引言

关于随机微分方程的研究已经有 50 余年的历史了,其间有许多结果出现[1-10]。进入 20 世纪 80 年代,由于化学工程的需要以及航空理论的发展,文献[11－12]引入了一类中立型随机泛函微分方程,但与确定性微分方程的研究相比,成果很少。进入 1995 年以后,毛学荣、廖晓昕等利用 Lyapunov 泛函和 Razumikhin 技巧展开了对中立型随机泛函微分方程指数稳定性的研究,得出了一些有意义的结果[7,13-15]。

本文将在以前研究结果基础上,利用与文献[7,13－15]不同的技巧(Lyapunov 函数和上鞅收敛定理[16]),研究了一般中立型随机泛函微分方程的渐近稳定性(包括多项式渐近稳定性及指数稳定性)问题,得到了判定方程渐近稳定的相应判据。与文献[7,13－15]相比,本文不仅讨论了指数稳定性,同时也讨论了渐近稳定性与多项式渐近稳定性,其结果涵盖并推广了文献[17]结果。

本文采用以下记号:记$(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$为一个带有自然流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$的完备概率空间,$\boldsymbol{w}(t)=(w_1(t),w_2(t),\cdots,w_m(t))^T$ 是定义于该空间上的 m-维标准布朗运动。$|\cdot|$为定义于 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Euclidean 范数。设 $\tau>0$,$\boldsymbol{\varphi}:[-\tau,0]\rightarrow\boldsymbol{R}^n$ 为连续函数,具有上确界范数 $\|\boldsymbol{\varphi}\|=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$, $C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 记为 $\boldsymbol{\varphi}$ 函数族。$L^1(\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+):=\{\eta:\boldsymbol{R}_+\rightarrow\boldsymbol{R}_+\mid\int_0^\infty\eta(t)\mathrm{d}t<\infty\}$ 表示正的可积函数族。$C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$表示 F_0 可测的有界的 $C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$-值随机变量 ξ 族且有 $\xi=\{\xi(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$。设 $\boldsymbol{A}$ 是向量或矩阵,$\boldsymbol{A}^T$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置。若 $\boldsymbol{A}$ 是一矩阵,$\|\boldsymbol{A}\|$ 表示其范数,$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$。

考虑如下中立型随机泛函微分方程

收稿日期:2003-12-26

E-mail:yishen64@163.com

* 基金项目:国家自然科学基金(60074008,60474011)与湖北省自然科学基金(2004ABA055)资助

$$\mathrm{d}(x(t)-G(x_t)) = f(t,x_t)\mathrm{d}t + g(t,x_t)\mathrm{d}w(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

初始条件为 $x_0=\xi$。这里 $G: C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}^n$, $f: \boldsymbol{R}_+\times C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}^n$, $g: \boldsymbol{R}_+\times C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 都是连续泛函，$x_t=\{x(t+\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$ 是 $C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$-值随机过程，且满足 $\xi=\{\xi(\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}\in C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$。若 f,g 和 G 满足下列基本假设

(H_1) f 和 g 满足局部 Lipschitz 条件及线性增长条件，即对 $t\geqslant 0$, $l=1,2,\cdots$，存在 $c_l>0$ 满足

$$|f(t,\boldsymbol{\varphi})-f(t,\boldsymbol{\phi})|\vee|g(t,\boldsymbol{\varphi})-g(t,\boldsymbol{\phi})|\leqslant c_l(\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\phi}\|),$$

其中 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi}\in C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 满足 $\|\boldsymbol{\varphi}\|\vee\|\boldsymbol{\phi}\|\leqslant l$, $t\geqslant 0$，并且还存在常数 $c>0$ 使得对任意 $(t,\boldsymbol{\varphi})\in\boldsymbol{R}_+\times C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 有下式成立

$$|f(t,\boldsymbol{\varphi})|\vee|g(t,\boldsymbol{\varphi})|\leqslant c(1+\|\boldsymbol{\varphi}\|)。$$

(H_2) 存在 $k\in(0,1)$，使 $\forall\,\boldsymbol{\varphi}\in C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 有

$$|G(\boldsymbol{\varphi})|\leqslant k|\boldsymbol{\varphi}(-\tau)|。$$

由文献[18]知，满足假设(H_1)−(H_2)的方程(1)在 $t\geqslant -\tau$ 上存在全局唯一连续解 $x(t,\xi)$，且对任意 $p>0$，在 $t\geqslant 0$ 时满足 $E[\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s,\xi)|^p]<\infty$。

令 $C^{1,2}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}_+)$ 表示对 t 一次连续可微对 x 二次连续可微的非负函数 $V(t,x)$ 的全体，对任意 $V(t,x)\in C^{1,2}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}_+)$，定义

$$V_t(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t},$$

$$V_x(t,x)=\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1},\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(t,x)=\left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}。$$

进一步定义微分算子 $LV(t,\boldsymbol{\varphi}): \boldsymbol{R}_+\times C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$ 如下

$$\begin{aligned}LV(t,\boldsymbol{\varphi}) =& V_t(t,\boldsymbol{\varphi}(0)-G(\boldsymbol{\varphi}))+V_x(t,\boldsymbol{\varphi}(0)-G(\boldsymbol{\varphi}))f(t,\boldsymbol{\varphi})\\&+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^T(t,\boldsymbol{\varphi})V_{xx}(t,\boldsymbol{\varphi}(0)-G(\boldsymbol{\varphi}))g(t,\boldsymbol{\varphi})]。\end{aligned}$$

为证明本文的结论，须应用下列关键引理。

引理 1[16]（上鞅收敛定理） 设 $t\geqslant 0$ 时，$A(t)$, $U(t)$ 是连续的适应的增随机过程且几乎必然有 $A(0)=U(0)=0$, $M(t)$ 是一实值连续局部鞅且几乎必然有 $M(0)=0$, $\zeta\in F_0$ 为一非负随机变量，定义

$$X(t)=\zeta+A(t)-U(t)+M(t),\quad t\geqslant 0,$$

若 $X(t)$ 非负，则

$$\{\lim_{t\to\infty}A(t)<\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty}X(t)<\infty\}\cap\{\lim_{t\to\infty}U(t)<\infty\},\mathrm{a.s.},$$

其中 $B\subset D$ 表示 $P(B\cap D^c)=0$。特别的，若有 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)<\infty$, a.s.，则

$$\lim_{t\to\infty}X(t)<\infty,\mathrm{a.s.},\quad \lim_{t\to\infty}U(t)<\infty,\mathrm{a.s.}。$$

引理 2 设条件(H_1)−(H_2)满足，若存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}_+)$, $\eta\in L^1(\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+)$, $\omega\in C(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}_+)$，使得任意 $(t,\boldsymbol{\varphi})\in\boldsymbol{R}_+\times C([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 有

$$LV(t,\boldsymbol{\varphi})\leqslant\eta(t)-\omega(t,\boldsymbol{\varphi}(0)-G(\boldsymbol{\varphi})), \tag{2}$$

则对 $\forall\,\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$ 方程(1)的解 $x(t;\xi)$（简记为 $x(t)$）满足

(i) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}EV(t,x(t)-G(x_t))<\infty$, (3)

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x(t)-G(x_t))<\infty$ a. s. , (4)

(iii) $\int_0^\infty \omega(t,x(t)-G(x_t))\mathrm{d}t<\infty$ a. s. . (5)

证 对 $\forall\,\xi\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$，由 Itô 公式，并应用条件(ii)，有

$$
\begin{aligned}
V(t,x(t)-G(x_t)) &= V(0,\xi(0)-G(\xi))+\int_0^t LV(s,x_s)\mathrm{d}s \\
&\quad +\int_0^t V_x(s,x(s)-G(x_s))g(s,x_s)\mathrm{d}w(s) \\
&= V(0,\xi(0)-G(\xi))+\int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s \\
&\quad -\int_0^t [\eta(s)-LV(s,x_s)]\mathrm{d}s \\
&\quad +\int_0^t V_x(s,x(s)-G(x_s))g(s,x_s)\mathrm{d}w(s),
\end{aligned} \tag{6}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
V(t,x(t)-G(x_t)) &\leqslant V(0,\xi(0)-G(\xi))+\int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s \\
&\quad -\int_0^t \omega(s,x(s)-G(x_s))\mathrm{d}s \\
&\quad +\int_0^t V_x(s,x(s)-G(x_s))g(s,x_s)\mathrm{d}w(s).
\end{aligned} \tag{7}
$$

将引理 1 应用于(6)式并利用条件(ii)，易推出(4)式成立，将(7)式两边取期望，易推出(3)式成立。再将引理 1 应用于(7)式，易推出(5)式成立。 ▍

2 渐近稳定性定理

引理 3 设(H_2)满足，$\rho:[-\tau,\infty)\to(0,\infty)$连续，$x(t)$为方程(1)的解。若有

$$\sigma_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\rho(t)}{\rho(t-\tau)}<\frac{1}{k}, \tag{8}$$

$$\sigma_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)\,|\,x(t)-G(x_t)\,|]<\infty, \tag{9}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)\,|\,x(t)\,|]\leqslant\frac{\sigma_2}{1-k\sigma_1}. \tag{10}$$

证 对 $\forall\,\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{k}-\sigma_1\right)$，由假设(8)和(9)，存在 $T\geqslant\tau$，且当 $t\geqslant T$ 时，有

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t-\tau)}\leqslant\sigma_1+\varepsilon, \tag{11}$$

$$\rho(t)\,|\,x(t)-G(x_t)\,|\leqslant\sigma_2+\varepsilon, \tag{12}$$

由条件(H_2)及(11)与(12)式知，当 $t\geqslant T$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\rho(t)\,|\,x(t)\,| &\leqslant \rho(t)\,|\,x(t)-G(x_t)\,|+\rho(t)\,|\,G(x_t)\,| \\
&\leqslant \sigma_2+\varepsilon+k(\sigma_1+\varepsilon)\rho(t-\tau)\,|\,x(t-\tau)\,|,
\end{aligned} \tag{13}
$$

对 $\forall\,\overline{T}\geqslant T$

$$\begin{aligned}\sup_{T\leqslant t\leqslant \bar{T}}[\rho(t)\mid x(t)\mid] &\leqslant \sigma_2+\varepsilon+k(\sigma_1+\varepsilon)\sup_{T\leqslant t\leqslant \bar{T}}[\rho(t-\tau)\mid x(t-\tau)\mid] \\ &\leqslant \sigma_2+\varepsilon+k(\sigma_1+\varepsilon)\sup_{T-\tau\leqslant t\leqslant T}[\rho(t)\mid x(t)\mid] \\ &\quad +k(\sigma_1+\varepsilon)\sup_{T\leqslant t\leqslant \bar{T}}[\rho(t)\mid x(t)\mid],\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{T\leqslant t\leqslant \bar{T}}[\rho(t)\mid x(t)\mid]\leqslant \frac{\sigma_2+\varepsilon+k(\sigma_1+\varepsilon)\sup\limits_{T-\tau\leqslant t\leqslant T}[\rho(t)\mid x(t)\mid]}{1-k(\sigma_1+\varepsilon)}, \tag{14}$$

(14)式两边令 $\bar{T}\to\infty$,则有

$$\sup_{T\leqslant t<\infty}[\rho(t)\mid x(t)\mid]<\infty,$$

因此有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)\mid x(t)\mid]<\infty,$$

利用上式,从(13)式可推定

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)\mid x(t)\mid]\leqslant \sigma_2+\varepsilon+k(\sigma_1+\varepsilon)\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)\mid x(t)\mid],$$

上式中令 $\varepsilon\to 0$,即可得出结论式(10)。 ▌

下面记

$$K=\{\mu\in C(\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+)\mid \mu(0)=0,\mu\ \text{单调增}\},$$

$$K_\infty=\{\mu\in K\mid \lim_{r\to\infty}\mu(r)=\infty\},$$

$$H_\infty=\{h\in C(\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+)\mid \lim_{r\to\infty}h(r)=\infty\}。$$

定理 1 在引理 2 的条件下,对 $\forall\,\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$,方程(1)的解 $x(t;\xi)$ 具有如下渐近性质

(a) 若存在 $h\in H_\infty,\mu\in K$ 使 $\forall\,(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$ 有

$$h(t)\mu(\mid x\mid)\leqslant V(t,x), \tag{15}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}x(t;\xi)=0,\ \text{a. s.}, \tag{16}$$

即方程(1)渐近稳定。

(b) 若存在常数 $p>0,\gamma\in R$,使 $\forall\,(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$,有

$$(1+t)^\gamma\mid x\mid^p\leqslant V(t,x), \tag{17}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log\mid x(t;\xi)\mid}{\log t}\leqslant -\frac{\gamma}{p},\ \text{a. s.}。 \tag{18}$$

即方程(1)多项式稳定。

(c) 若存在常数 $p>0,\infty<\gamma<\dfrac{p}{\tau}\log\dfrac{1}{k}$,使 $\forall(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$,有

$$e^{\gamma t}\mid x\mid^p\leqslant V(t,x), \tag{19}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[t^{-1}\log\mid x(t;\xi)\mid]\leqslant -\frac{\gamma}{p},\ \text{a. s.}, \tag{20}$$

即方程(1)指数稳定。

证 简记 $x(t,\xi)$ 为 $x(t)$。

(a) 由引理 2 中结论(ii)及条件(15),有

$$\lim_{t\to\infty}\mu(|x(t)-G(x_t)|)=0, \text{a. s.},$$

而 $\mu\in K$,因此

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-G(x_t)|=0, \text{a. s.},$$

应用引理 3,此时 $\rho=1$,因而 $\sigma_1=1$ 且 $\sigma_2=0$,故(16)式成立。

(b) 由引理 2 中结论(ii)及条件(17),有

$$\zeta_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}[(1+t)^{\gamma/p}|x(t)-G(x_t)|]<\infty, \text{a. s.},$$

此时 $\sigma_2=\zeta_1$,$\rho(t)=(1+t)^{\gamma/p}$。应用引理 3

$$\sigma_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{(1+t)^{\gamma/p}}{(1+t-\tau)^{\gamma/p}}=1<\frac{1}{k},$$

所以

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[(1+t)^{\gamma/p}|x(t)|]\leqslant\frac{\zeta_1}{1-k}, \text{a. s.},$$

从而结论式(18)成立。

(c) 由引理 2 及条件(19),有

$$\zeta_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}[e^{\frac{\gamma}{p}t}|x(t)-G(x_t)|]<\infty, \text{a. s.},$$

此时 $\sigma_2=\zeta_2$,$\rho(t)=\exp\left(\frac{\gamma}{p}t\right)$。应用引理 3

$$\sigma_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\exp\left(\frac{\gamma}{p}t\right)}{\exp\left(\frac{\gamma}{p}(t-\tau)\right)}=\exp\left(\frac{\gamma}{p}\tau\right)<\frac{1}{k},$$

所以

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{p}t\right)|x(t)|\right]\leqslant\frac{\zeta_2}{1-k\sigma_1}<\infty, \text{a. s.},$$

从而结论式(20)成立。 ▌

定理 2 设引理 2 条件满足,若存在 $\mu_1\in K$,$\mu_2\in K_\infty$,$\mu_3\in K$,使 $\forall(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$,有

$$\mu_1(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant\mu_2(|x|), \tag{21}$$

$$\mu_3(|x|)\leqslant\omega(t,x), \tag{22}$$

则对 $\forall\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$,方程(1)的解 $x(t;\xi)$满足

$$\lim_{t\to\infty}x(t;\xi)=0, \text{a. s.}. \tag{23}$$

证 简记 $x(t;\xi)$为 $x(t)$。由(21),(22)式知

$$\mu_3[\mu_2^{-1}(V(t,x))]\leqslant\mu_3(|x|)\leqslant\omega(t,x),$$

据引理 2 结论(iii)与上式,有

$$\int_0^\infty\mu_3[\mu_2^{-1}(V(t,x(t)-G(x_t)))]\mathrm{d}t<\infty, \text{a. s.}, \tag{24}$$

另一方面,据引理 2 结论(ii)

$$\lim_{t\to\infty}V(t,x(t)-G(x_t))<\infty, \text{a. s.}, \tag{25}$$

因 $\mu_3(\mu_2^{-1})$连续,故可从(24),(25)式推出

$$\lim_{t\to\infty}\mu_3[\mu_2^{-1}(V(t,x(t)-G(x_t)))]=0, \text{a. s.},$$

且 $\mu_3(\mu_2^{-1})\in K$,故

$$\lim_{t\to\infty}V(t,x(t)-G(x_t))=0, \text{a. s.}, \tag{26}$$

结合(21),(26)式及 $\mu_1\in K$ 知

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-G(x_t)|=0,\ \text{a. s.} \tag{27}$$

将(27)式应用于引理 3,易推出本定理成立。 ▌

3 均值渐近性质

引理 4 若 $p\geqslant 1,\vartheta>0$,则对 $\forall\, x,y\in\boldsymbol{R}^n$,有

$$|x+y|^p\leqslant(1+\vartheta)^{p-1}[|x|^p+\vartheta^{-(p-1)}|y|^p]。$$

证 据 Hölder 不等式可证,略。 ▌

引理 5 设(H_2)满足,$p\geqslant 1$,$\rho:[-\tau,\infty)\to(0,\infty)$连续,$x(t)$是方程(1)的解,若

$$\bar{\sigma}_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\rho(t)}{\rho(t-\tau)}<\frac{1}{k^p}, \tag{28}$$

$$\bar{\sigma}_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)-G(x_t)|^p]<\infty, \tag{29}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p]\leqslant\bar{\sigma}_2(1-k\bar{\sigma}_1^{1/p})^{-p}. \tag{30}$$

证 由条件(28),选择 $\vartheta>0$ 使

$$\bar{\sigma}_1k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}<1, \tag{31}$$

取充分小的 $\varepsilon>0$ 使

$$(\bar{\sigma}_1+\varepsilon)k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}<1, \tag{32}$$

由(28),(29)式知存在常数 $T=T(\varepsilon)>\tau$,使得当 $t\geqslant T$ 时

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t-\tau)}\leqslant\bar{\sigma}_1+\varepsilon, \tag{33}$$

$$\rho(t)E|x(t)-G(x_t)|^p\leqslant\bar{\sigma}_2+\varepsilon, \tag{34}$$

应用引理 4 及条件(H_2)与(33)式,(34)式,有

$$\begin{aligned}&\rho(t)E|x(t)|^p\\ \leqslant&(1+\vartheta)^{p-1}[\rho(t)E|x(t)-G(x_t)|^p+\vartheta^{-(p-1)}\rho(t)E|G(x_t)|^p]\\ \leqslant&(1+\vartheta)^{p-1}(\bar{\sigma}_2+\varepsilon)+(\bar{\sigma}_1+\varepsilon)k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}\rho(t-\tau)E|x(t-\tau)|^p.\end{aligned} \tag{35}$$

类似于引理 3,易证明$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p]<\infty$。在(35)式两边取上极限,有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p]\leqslant&(1+\vartheta)^{p-1}(\bar{\sigma}_2+\varepsilon)\\ &+(\bar{\sigma}_1+\varepsilon)k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p],\end{aligned} \tag{36}$$

由(32),(36)式,有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p]\leqslant\frac{(\bar{\sigma}_2+\varepsilon)(1+\vartheta)^{p-1}}{1-(\bar{\sigma}_1+\varepsilon)k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}}, \tag{37}$$

令 $\varepsilon\to 0$,由(31),(37)式得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[\rho(t)E|x(t)|^p]\leqslant\frac{\bar{\sigma}_2(1+\vartheta)^{p-1}}{1-\bar{\sigma}_1k^p(1+\vartheta^{-1})^{p-1}}, \tag{38}$$

若 $\bar{\sigma}_1>0$,则在(38)式中取 $\vartheta=\dfrac{k\bar{\sigma}_1^{1/p}}{1-k\bar{\sigma}_1^{1/p}}$,则结论式(30)成立。

若 $\bar{\sigma}_1=0$,则在(38)式中令 $\vartheta\to 0$,亦有结论式(30)成立。 ▌

定理 3 在引理 2 的条件下,设 $p\geqslant 1$,对 $\forall\,\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];\boldsymbol{R}^n)$,方程(1)的解 $x(t;\xi)$具

有如下渐近性质

(a) 若存在 $h\in H_\infty$ 与凸函数 $\mu\in K$，使 $\forall(t,x)\in \boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$ 有
$$h(t)\mu(|x|^p)\leqslant V(t,x),$$
则
$$\lim_{t\to\infty}E|x(t;\xi)|^p=0,$$
即方程(1) p-阶均值渐近稳定。

(b) 若存在常数 $\gamma\in R$，使 $\forall(t,x)\in \boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$，有
$$(1+t)^\gamma|x|^p\leqslant V(t,x),$$
则
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log(E|x(t;\xi)|^p)}{\log t}\leqslant-\gamma,$$
即方程(1) p-阶均值多项式稳定。

(c) 若存在常数 $\infty<\gamma<\dfrac{p}{\tau}\log\dfrac{1}{k}$，使 $\forall(t,x)\in \boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$，有
$$e^{\gamma t}|x|^p\leqslant V(t,x),$$
则
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[t^{-1}\log(E|x(t;\xi)|^p)]\leqslant-\gamma,$$
即方程(1) p-阶均值指数稳定。

证 类似于定理 1，此时应用引理 2 中结论(i)与引理 5，略。 ▌

注 文献[17]考虑了如下的中立型随机微分时滞方程
$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(x(t)-G(x(t-\tau)))\\&=f(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t),\quad t\geqslant 0.\end{aligned}\tag{39}$$
显然方程(39)是方程(1)的特例，但是本文在同样的条件下对方程(1)证明了与文献[17]中对方程(39)有同样的结果。因此本文涵盖并推广了文献[17]的结果，拓宽了文献[17]中定理的适用范围。

参 考 文 献

[1] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1972

[2] Friedman A. Stochastic Differential Equations and Their Applications. New York: Academic Press, 1976

[3] Elworthy K D. Stochastic Differential Equations and Manifold. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[4] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京：国防工业出版社，2000

[5] Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks. Neutral, Parallel and Scientific Computations, 1996, **4**: 205－224

[6] Mao X, Selfridge C. Stability and instability of stochastic interval systems. Dynamic Systems and Applications, 1999, **8**: 271－286

[7] Mao X. Alexandra Rodkina and Natalia Koroleva, Razumikhin-type theorems for stochastic functional differential equations。Functional Differential Equations, 1998, **5**(1－2): 195－211

[8] 刘永清，冯昭枢. 大型动力系统理论与应用(卷 4). 广州：华南理工大学出版社，1992

[9] 沈铁，廖晓昕. 非线性随机时滞系统的鲁棒稳定性. 自动化学报，1999，**25**(4)：537－542

[10] 沈铁，张玉民，廖晓昕. 时滞非线性随机大系统的指数稳定性. 控制理论与应用，2002，**19**(4)：571－574

[11] Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations. New York: Academic Press, 1986

[12] Kolmanovskii V B, Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academic

Publishers, 1992

[13] Mao X. Exponential stability of neutral stochastic functional differential equations. Systems and Control Letters, 1995, **26**: 245－251

[14] Mao X. Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations. SIAM J Math Anal, 1997, **28**(2): 389－401

[15] 沈轶，廖晓昕. 随机中立型泛函微分方程指数稳定的 Razumikhin 型定理. 科学通报，1999, **44**(24): 2272－2275

[16] Lipster R Sh, Shiryayev A N. Theory of Martingales. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986

[17] Mao X. Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations. Stochastic and Stochastic Reports, 2000, **68**: 273－295

[18] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester: Horwood, 1997

Stability for Neutral Stochastic Functional Differential Equations

Shen Yi　Zhang Yumin　Liao Xiaoxin

(*Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract: The asymptotic properties of the general type of neutral stochastic functional differential equations are discussed in this paper. By Lyapunov function and supermartingales convergence theorem, some results on its asymptotic properties such as asymptotic stabilities, polynomial stabilities and exponential stabilities are given. All the results imply and generalize those conclusions found in references.

Key words: Lyapunov function; Supermartingales convergence theorem; Itô's formula; Asymptotic stability.

MR(2000) Subject Classification: 34F05