第38卷 第3期 山 东 大 学 学 报（工 学 版） 2008年6月
Vol.38 No.3 JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY (ENGINEERING SCIENCE) Jun. 2008

文章编号:1672-3961(2008)03-0118-05

# 伪逆算子的性质及其在框架理论中的应用

陈涛[1]，陶常利[2]
（1. 泰山学院数学与系统科学系，山东 泰安 271021；
2. 山东科技大学信息学院，山东 青岛 266510）

**摘要:**给出了伪逆算子的运算性质及满射有界算子的伪逆算子的一种表示.然后把伪逆算子应用在框架理论中，同时给出了预框架算子的伪逆算子的矩阵表示.最后把伪逆算子应用在(非框架的)序列中.

**关键词:**框架;预框架算子;框架算子;伪逆算子
**中图分类号:**O177.1 **文献标志码:**A

# The properties of pseudo-inverse operators and their applications in the frame theory

CHEN Tao[1], TAO Chang-li[2]
(1. The department of Mathematic and System science, Taishan University, Taian 271021, China;
2. College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

**Abstract**: The operational properties of the pseudo-inverse operators were studied and one kind of the expression of pseudo-inverse operators was obtained. The operator was subjectively bounded in Hilbert space, and then the results were applied to the frame theory. The matrix expression of the pseudo-inverse operator concerning the pre-frame operator was provided, and finally the theory of pseudo-inverse operators to some non-frame sequences was developed.

**Key words**: frame; pre-frame operator; frame operator; pseudo-inverse operator

## 0 引言

广义逆矩阵是逆矩阵的推广，当矩阵不可逆时，可用广义逆矩阵解决一些问题. Moore-Penrose 广义逆矩阵的唯一性决定了可用它求方程的某种最优解或最优近似解，在一定程度上起到了逆矩阵的作用.同样，在无限维情形也有类似于 Moore-Penrose 广义逆矩阵的一类对象，这正是线性算子的伪逆算子.该概念是 Fredholm 在 1902 年提出来的，他给出了积分算子的广义逆，并称之为“伪逆”.伪逆算子在一定程度上起到了逆算子的作用，即使算子不可逆，它也存在唯一的伪逆算子.有些不能利用逆算子做的事情可用伪逆算子代替.

上世纪 80 年代以来，随着算子理论在小波与框架上的成功运用，一般框架理论得到了迅猛发展.算子成为研究框架理论的重要工具，虽然框架算子是可逆的，但预框架算子等算子不一定可逆，这就决定了伪逆算子在研究小波与框架理论中将扮演很重要的角色.

Ole Christensen 在文献【1】中给出了 Hilbert 空间中有界线性算子的伪逆算子的一些性质，本文将进一步研究伪逆算子的性质，并把它应用在框架理论中.

**收稿日期:**2006-12-05
**作者简介:**陈涛(1971-)，男，山东东平人，讲师，硕士，研究方向为算子理论和小波分析.
E-mail: tsxychentao@163.com

## 1 预备知识

本文中的 $H,K$ 均表示可分的 Hilbert 空间,所有的算子都是线性的,并用 $R_T$ 表示算子 $T$ 的值域,$N_T$ 表示算子 $T$ 的核.可以证明,当算子 $T$ 具有闭值域时,限制在核的正交补 $N_T^{\perp}$ 上的算子

$$\tilde{T}:=T_{|N_T^{\perp}}:N_T^{\perp}\to R_T$$

是双射,并且逆算子有界.由此将 $T$ 的伪逆 $T^+$ 定义为 $(\tilde{T})^{-1}$ 在 $H$ 上的延拓,且有 $N_{T^+}=R_T^{\perp}$.具体见下面的定义.

**定义 1.1** 设 $T$ 是从 $K$ 到 $H$ 的具有闭值域的有界线性算子,$T$ 的伪逆 $T^+$ 是 $H$ 到 $K$ 的满足下列条件的线性算子:

(1) $N_{T^+}=R_T^{\perp}$

(2) $\overline{R_{T^+}}=N_T^{\perp}$

(3) $TT^+f=f,\forall f\in R_T$.

可以证明伪逆算子是惟一的.由(3)知 $TT^+$ 是空间 $R_T$ 上的单位算子,由此看出伪逆算子是逆算子的推广.

下面的结论体现出伪逆算子在解方程中的重要作用.

**定理 1.2** 设 $f\in R_T$,则 $T^+f$ 是方程 $Tx=f$ 的唯一的最小范数解.

**定义 1.3**[2] $H$ 中的可数集 $\{f_i\}_{i\in I}$ 称为框架,如果存在常数 $A,B>0$,使得

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2,\forall f\in H$$

成立,其中正常数 $A,B$ 称为框架界.如果上式仅仅要求右边不等式成立,则称 $\{f_i\}_{i\in I}$ 为 $H$ 的 Bessel 列,$B$ 称为 Bessel 列的界.

当 $\{f_i\}_{i\in I}$ 为 Bessel 列时,可以证明从 $l^2$ 到 $H$ 的算子

$$T:\{c_i\}\to\sum_{i\in I}c_if_i$$

是有界的,并称为 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的预框架算子,将 $T$ 与其伴随算子 $T^*$ 合成得到框架算子

$$S:H\to H,Sf=TT^*f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle f_i.$$

可以证明框架算子 $S$ 是可逆的正算子.

## 2 伪逆算子的一些性质

伪逆算子也具有与逆算子类似的一些性质,但有时还附加另外的条件.Ole Christensen 得到下述结果.

**定理 2.1** 设 $V$ 是 $H$ 到 $K$ 的有界算子,$U$ 是 $K$ 到 $H$ 的有界算子,并且它们的值域 $R_U$ 和 $R_V$ 是闭的,则

$$(UV)^+=V^+U^+$$

成立当且仅当下列条件满足:

(1) $R_{UV}$ 是闭的;

(2) $R_{U^*}$ 在 $VV^*$ 下不变;

(3) $R_U\cap R_{V^*}$ 在 $UU^*$ 下不变.

定理 2.1 中的条件较多,当用 $U^*$ 代替 $V$ 时几乎是无条件的.

**定理 2.2** 设 $U$ 是 $K$ 到 $H$ 的具有闭值域的有界算子,则

$$(U^*U)^+=U^+U^{*+}.$$

**证明** 因 $U$ 是闭值域的,据文献【3】中的定理 4.14 知 $U^*$ 也是闭值域的.

因为 $R_U^{\perp}=N_{U^*}$,所以

$$R_{U^*U}=U^*UH=U^*(UH+(UH)^{\perp})=U^*H,$$

从而 $U^* U$ 也是闭值域的.另外,

$$U^* UR_{U^*} = U^* UU^* H \subseteq U^* H = R_{U^*},$$

即 $R_{U^*}$ 在 $U^* U$ 下不变.而

$$R_U \cap N_{U^*} = R_U \cap R_U^{\perp} = \{0\}, UU^*(R_U \cap N_{U^*}) = UU^*(\{0\}) = \{0\}$$

说明 $R_U \cap N_{U^*}$ 在 $UU^*$ 下不变.由定理 1.2 知结论成立.

由上述定理立即得到.

当有界线性算子 $T$ 是满射时,伪逆算子可通过 $T$ 及其伴随算子具体表示出来.

**定理 2.3** 若 $T: K \to H$ 是满射的有界算子,则 $T^+ = T^*(TT^*)^{-1}$.

**证明** 首先 $TT^*$ 是 $H$ 上的双射.事实上,由于 $T$ 是满射,因此,$N_{T^*} = R_T^{\perp} = \{0\}$,故 $T^*$ 是单射;若 $TT^* x = 0$,则$\langle T^* x, T^* x\rangle = \langle TT^* x, x\rangle = 0$,由此知 $T^* x = 0$,从而 $x = 0$,所以 $TT^*$ 是单射.由于 $T$ 的值域是闭的,因此 $T^*$ 也是闭值域,于是,

$$TT^* H = TR_{T^* H} = T(R_{T^*} \oplus N_T) = T(R_{T^*} \oplus R_{T^*}^{\perp}) = TK = H,$$

故 $TT^*$ 是 $H$ 上的满射.

其次验证 $T^*(TT^*)^{-1}$是 $T$ 的伪逆.若 $T^*(TT^*)^{-1} x = 0$,则有$(TT^*)(TT^*)^{-1} x = 0$,即 $x = 0$,所以 $T^*(TT^*)^{-1}$是单射,因此,

$$N_{T^*(TT^*)^{-1}} = \{0\} = R_T^{\perp},$$

$$\overline{R_{T^*(TT^*)^{-1}}} = \overline{R_{T^*}} = N_T^{\perp},$$

而$(TT^*)(TT^*)^{-1} = I$(这里 $I$ 是单位算子),由定义知结论正确.

注意:结论 $T^+ = (T^* T)^{-1} T^*$ 不一定成立,因为 $T^* T$ 不一定是单射.

## 3　伪逆算子在框架理论中的应用

下面给出框架算子的逆算子与预框架算子的伪逆算子间的关系,同时也用伪逆算子表达了框架系数.

**定理 3.1** 设$\{f_i\}_{i\in I}$为 $H$ 的框架,$T$ 为对应的预框架算子,$T^+$ 是算子 $T$ 的伪逆算子,则

(1) $T^+ f = \{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}, \forall f \in H$,

(2) 假设 $I = N$,则 $S^{-1} f_i = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda_{i,k}} e_k, \forall i \in I$,其中$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是 $H$ 的标准正交基,$T^+$ 在基$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$下的矩阵为 $\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$.

**证明** (1) 记 $P$ 是 $H$ 到 $V$ 上的正交投影(其中 $V$ 是 $H$ 的闭子空间),$f \in H$,考虑方程 $T\{c_i\} = Pf$,即 $\sum_{i\in I} c_i f_i = Pf$,则由定理 1.2,上式有最小范数解$\{c_i\} = T^+ Pf$,由定义知,$T^+$ 在 $N_{T^+}$ 上为 0,而 $N_{T^+} = R_T^{\perp} = V^{\perp}$,从而有

$$\{c_i\} = T^+ Pf + T^+(I - P)f = T^+ f,$$

因为 $Pf \in V$,所以应用框架分解式有

$$Pf = \sum_{i\in I} \langle Pf, S^{-1} f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I} \langle f, S^{-1} f_i\rangle f_i.$$

再利用框架系数的范数最小性有

$$T^+ f = \{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

进一步有

$$\{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in N} = \Lambda\{\langle f, e_k\rangle\}_{i\in N} = \{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{i,k}\langle f, e_i\rangle\}_{i\in N}.$$

因此,对给定的 $i \in N$,级数$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{i,k} c_k$ 对所有$\{c_k\} \in l^2(N)$收敛,即$\forall i$,

$$\{\lambda_{i,k}\}_{k\in N} \in l^2(N),$$

从而级数$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda_{i,k}} e_k$ 对所有 $i$ 都收敛.于是有

$$\langle f, S^{-1} f_i\rangle = \langle f, \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda_{i,k}} e_k\rangle.$$

对所有 $f\in H$ 都成立.结论得证.

由于 $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ 是 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的对偶框架,因此有

**推论 3.2** $\|T^+\|^2\leqslant\dfrac{1}{A}$.

**证明** 由定理2.1(1)得到

$$T^+f=\{\langle f,S^{-1}f_i\rangle\}_{i\in I},\ \forall f\in H.$$

于是

$$\|T^+f\|^2=\sum_{i\in}|\langle f,S^{-1}f_i\rangle|^2\leqslant\frac{1}{A}\|f\|^2,\ \forall f\in H.$$

结论得证.

下面的定理利用预框架算子的伪逆算子来分解其它算子.

**定理 3.3** 设 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 $H$ 的框架,$T$ 是对应的预框架算子,$R$ 是 $V\to R_T$ 的有界线性算子(其中 $V$ 是 $H$ 的闭子空间),则 $Rf=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Rf,S^{-1}f_i\rangle f_i$,当记 $\Pi$ 是第 $(i,j)$ 位置的元素为 $\pi_{i,j}=\langle Rf_j,S^{-1}f_i\rangle$ 的无限矩阵时,则有 $R=T\Pi T^+$.

**证明** 取 $f\in V$,由于

$$\langle Rf,S^{-1}f_i\rangle=\langle f,R^*S^{-1}f_i\rangle=\langle\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,S^{-1}f_j\rangle f_j,R^*S^{-1}f_i\rangle=$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,S^{-1}f_j\rangle\langle f_j,R^*S^{-1}f_i\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,S^{-1}f_j\rangle\langle Rf_j,S^{-1}f_i\rangle,$$

所以,

$$\{\langle Rf,S^{-1}f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}=\Pi\{\langle f,S^{-1}f_j\rangle\},$$

即 $T^+Rf=\Pi T^+f,\ \forall f\in V$,

于是 $T^+R=\Pi\mathrm{T}^+$,从而 $R=T\Pi T^+$.

结论得证.

由此可以估计出 $\Pi$ 的界.

**定理 3.4** $\{f_i\}_{i\in I}$,$T$,$R$ 同定理3.3,

则

$$R\sqrt{\frac{A}{B}}\|R\|\leqslant\|\Pi\|\leqslant\sqrt{\frac{B}{A}}\|R\|,$$

其中 $A,B$ 是框架界.

**证明** 首先

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{i,j}c_j\Big|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\langle Rf_j,S^{-1}f_i\rangle c_j\Big|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\langle R\sum_{j=1}^{\infty}c_jf_j,S^{-1}f_i\rangle\Big|^2\leqslant\frac{1}{A}\|R\sum_{j=1}^{\infty}c_jf_j\|^2\leqslant$$
$$\frac{1}{A}\|R\|^2\|\sum_{j=1}^{\infty}c_jf_j\|^2\leqslant\frac{B}{A}\|R\|^2\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2,$$

此即 $\Pi(c_j)\in l^2(I)$,同时 $\|\Pi\|\leqslant\sqrt{\dfrac{B}{A}}\|R\|$,

对不等式的另一半由定理3.2知,

$\|R\|\leqslant\|T\|\ \|\Pi\|\ \|T^+\|$,所以

$$\|\Pi\|\geqslant\frac{\|R\|}{\|T\|\ \|T^+\|}\geqslant\sqrt{\frac{A}{B}}\|R\|.$$

结论得证.

框架条件比较强,例如要求所有相关的算子有界;框架分解中的级数无条件收敛等.伪逆算子的引入克服了这些缺点.注意到伪逆对任何稠定的算子有定义,所以利用伪逆算子可以对框架进行无界分解.

对于集合 $\{f_i\}_{i\in I}\subseteq H$,我们定义算子(可能无界) $T:D(T)\subseteq l^2(I)\to H$ 为

$$T\{c_i\}:=\sum_{i\in I}c_if_i,$$

$$D(T)=\{\{c_i\}\in l^2(I)\mid \sum_{i\in I}c_if_i<\infty\}.$$

因有限序列的全体在 $l^2(I)$中稠密，并且它们包含在 $D(T)$中．因此 $T$ 是稠定的．

下面利用伪逆算子给出一种无界分解．

**定理 3.5**　设集合$\{f_i\}_{i\in I}$定义的算子 $T$ 是从 $l^2(I)$到 $H$ 上的满射的闭算子，则

(1) 存在 $H$ 中的 Bessel 列$\{g_i\}_{i\in I}$，有下面的分解：

$$f=\sum_{i\in I}\langle f,g_i\rangle f_i,\ \forall f\in H.$$

(2) $\dfrac{1}{\|T^+\|^2}\|f\|^2\leqslant\sum_{i\in}|\langle f,f_i\rangle|^2,\ \forall f\in H.$

**证明**　对于$\forall f\in H$，有

$$f=TT^+f=\sum_{i\in I}(T^+f)_if_i,$$

和

$$\|T^+f\|^2=\sum_{i\in I}|(T^+f)_i|^2\leqslant\|T^+\|^2\|f\|^2.$$

注意到，$f\mapsto(T^+f)_i(\forall i\in I)$是 $H$ 上的连续线性泛函．由 Riesz 表示引理只存在唯一的 $g_i\in H$，使得

$$(T^+f)_i=\langle f,g_i\rangle,\ \forall f\in H,i\in I.$$

而且

$$\sum_{i\in I}|\langle f,g_i\rangle|^2=\sum_{i\in I}|(T^+f)_i|^2\leqslant\|T^+\|^2\|f\|^2,\ \forall f\in H,$$

即$\{g_i\}_{i\in I}$是$H$ 中的 Bessel 列．

另外，由$\forall f\in H$，有

$$\|f\|^4=|\langle f,f\rangle|^2=\left|\sum_{i\in I}(T^+f_i)\langle f_i,f\rangle\right|^2\leqslant\sum_{i\in I}|(T^+f)_i|^2\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leqslant\|T^+\|^2\|f\|^2\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2.$$

由此知(2)成立．

证明了当$\{f_i\}_{i\in I}$是 $H$ 的框架时，其框架系数$\{\langle f,S^{-1}f_i\rangle\}$具有某种最小性．即：若 $f=\sum_{i\in I}c_if_i$(此时当然也有 $f=\sum_{i\in I}\langle f,S^{-1}f_i\rangle f_i$)，则

$$\sum_{i\in I}|c_i|^2=\sum_{i\in I}|\langle f,S^{-1}f_i\rangle|^2+\sum_{i\in I}|\langle f,S^{-1}f_i\rangle-c_i|^2.$$

定理 3.6 正是这一结果的推广．

**定理 3.6**　$T$ 同定理 3.5，$\forall f\in H$，

若 $f=\sum_{i\in I}c_if_i$，则有

$$\sum_{i\in I}|c_i|^2=\sum_{i\in I}|\langle f,g_i\rangle|^2+\sum_{i\in I}|\langle f,g_i\rangle-c_i|^2$$

**证明**　由于 $f=\sum_{i\in I}c_if_i$，利用定理 3.5 得

$$\sum_{i\in I}[c_i-\langle f,g_i\rangle]f_i=0,$$

此即 $\{c_i-\langle f,g_i\rangle\}\in N_T=R_{T^+}{}^{\perp}$．

由伪逆定义知

$$\{\langle f,g_i\rangle\}=T^+f\in R_{T^+},$$

因此

$$\|\{c_i-\langle f,g_i\rangle\}\|^2+\|\langle f,g_i\rangle\|^2=\|\{c_i\}\|^2.$$

结论得证．

**参考文献：**

[1] CHRISTENSEN O. Frames and pseudo-inverse[J]. Math Anal Appl, 1995, 191:401-414.
[2] CHRISTENSEN O. An introduction to frames and riesz bases[M]. Boston: Brikhauser, 2002.
[3] RUDIN W. Functional analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1973.

（编辑：孙广增）