

# 模型导弹的自然频率计算\*

夏明曜

(中国科学院电子学研究所,北京)

**提要** 本文以磁场积分方程出发,用矩量法计算了一个三维模型导弹的自然频率,并讨论了自然频率在复平面上的位置随导弹几何参数变化的移动情况。

**关键词** 磁场积分方程;矩量法;自然频率;Muller迭代法

## 1. 引言

对于分析和讨论理想导体脉冲散射的后期响应,奇点展开法(SEM)十分有效。奇点展开法的关键是自然频率的计算。给定一个物体,如何确定它的自然频率,并进一步讨论它的散射特性,在理论上具有重要意义。到目前为止,只有一个球<sup>[1]</sup>和一个无限长的圆柱体<sup>[2]</sup>等几种简单物体的自然频率才被讨论清楚,对于几何形状不太规则的物体,只能用数值方法来确定。Tesch<sup>[3]</sup>首先用奇点展开法分析了单根线散射体的散射,计算出了它的自然频率和自然模。Crow<sup>[4]</sup>用奇点展开法对位于理想导电平面之上的一个垂直交叉线结构进行了分析。Marin<sup>[5]</sup>在考虑轴对称模时,详细分析了一个旋转椭球体的奇点位置随椭球参数变化的移动情况,当椭球从细长的“线”变成一个完全对称的球时,奇点刚好从Tesch位置移到Stratton位置。

奇点展开法的最大用途之一被认为在于目标识别方面。因为自然频率和自然模反映了一个物体所固有的整体特性,如果能够从响应信号中提取这些信息,无疑有助于对这个目标的识别。Eftimiu<sup>[6]</sup>首先从一个介质球的自然频率反演了它的折射率。

## 2. 几何模型和公式推导

实际的导弹外形较复杂,图1是将要讨论的一个简化模型,其头部是半个椭球,身部为一段圆柱,整个表面都看成是理想导体。

在柱坐标系中,弹头和弹身分别表示为

弹头:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= b \cos \theta, \\ z &= h + a \sin \theta, \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

弹身:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= b, \quad 0 < z \leq h \\ z &= 0, \quad 0 \leq \rho \leq b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1990年4月9日,1990年9月30日修改定稿。

\* 国家自然科学基金资助项目。

当入射场  $H^i$  照射于导弹表面, 在复频域中, 表面感应电流  $I(r, s)$  的磁场积分方程为<sup>[1]</sup>

$$\frac{1}{2} I(r, s) = \hat{n} \times H^i + \hat{n} \times \int_{\Gamma} I(r', s) \times \nabla' G(r, r', s) d\Gamma' \quad (3)$$

$$G(r, r', s) = e^{-\gamma R} / (4\pi R), \quad R = |r - r'|, \quad \gamma = s/c$$

$\hat{n}$  为导弹表面外法向单位矢量。

将导弹表面分成  $N$  个环带, 令  $H^i = 0$ ,

$$I(r, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^{(n)}(t, s) e^{in\phi} \quad (4)$$

这里  $t$  表示:

$$t = \begin{cases} \rho, & r \in \Gamma_I \\ z, & r \in \Gamma_{II} \\ \theta, & r \in \Gamma_{III} \end{cases}$$

则在第  $k$  个带上有

$$\frac{1}{2} I^{(n)}(t, s) - \hat{n} \times \sum_{i=1}^N \int_{\Delta\Gamma_i} [I^{(n)}(t', s) \times R(t, t', \theta)] \Phi(R, s) e^{-in\theta} d\Gamma' = 0 \quad (5)$$

式中,  $\Phi(R, s) = (\gamma + 1/R) e^{-\gamma R} / (4\pi R^2)$

$$R = [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta + (z - z')^2]^{1/2}$$

$$R = r - r', \quad r \in \Delta\Gamma_k, \quad r' \in \Delta\Gamma_i$$

令

$$I^{(n)}(t, s) = \sum_{j=1}^2 I_{ij}^{(n)}(t, s) \hat{l}_{kj}$$

$$\hat{n} \times [I^{(n)}(t', s) \times R(t, t', \theta)] = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 d_{ij}(t, t', \theta) I_{ij}^{(n)}(t', s) \hat{l}_{kj} \quad (6)$$

$\hat{l}_{kj}$  表示第  $k$  个环带的两个切向单位矢量,  $d_{ij}(t, t', \theta)$  的具体表达式见附录。

如果选用矩形函数作基函数, 采用点匹配, 则 (5) 式的矩量法 (MOM) 形式为

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \delta_{ki} \delta_{ij} - \phi_{klij}^{(n)} \right] I_{ij}^{(n)} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2 \quad (7)$$

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\phi_{klij}^{(n)} = \int_0^{2\pi} \Phi(R_{kli}, s) d_{klij}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \cdot \rho_l \Delta \quad (8)$$

$$R_{kli} = [\rho_k^2 + \rho_l^2 - 2\rho_k \rho_l \cos\theta + (z_k - z_l)^2]^{1/2}$$

$$d_{klij}(\theta) = d_{ij}(t_k, t_l, \theta)$$

$$I_{ij}^{(n)} = I_{ij}^{(n)}(t_i, s)$$

$$\Delta = (b + h + E) / N$$

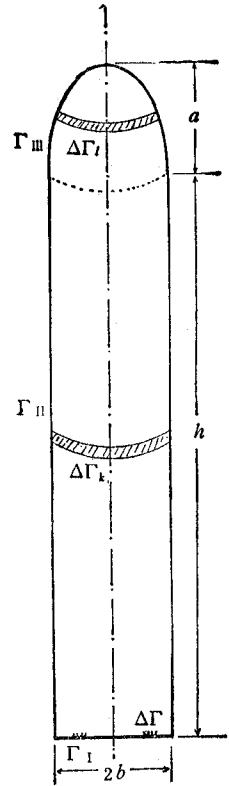


图 1 几何模型

$$\begin{aligned}
 E &= -a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 v} \, dv \\
 &= \frac{a\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right], \\
 e &= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$\rho_k, \nu_k$  分别表示第  $k$  个环带的半径和中点位置,  $\rho_l, \nu_l$  意义类同。

### 3. 数值计算

自然频率是这样一系列离散值  $S_a^{(n)}$ , 它使得齐次方程 (7) 式有非零解; 因此  $s_a^{(n)}$  满足:

$$\text{Det} \left| \overline{z_N^{(n)}(s_a^{(n)})} \right| = 0; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \alpha = 1, 2, \dots \tag{10}$$

$n$  为电流模式,  $n = 0$  表示中心轴对称模;  $\alpha$  为自然频率的序号;  $\overline{z_N^{(n)}(s_a^{(n)})}$  是一个  $2N \times 2N$  阶矩阵, 第  $p$  行  $q$  列的元素为

$$z_{pq} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \delta_{ij} - \phi_{kl}^{(n)} \tag{11}$$

式中  $p = 2(k-1) + j; \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2; \quad q = 2(l-1) + i; \quad l = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2$

这里采用 Muller 三点迭代法来求解 (10) 式。为了加快迭代速度, 可以将初值取在

预先估计的位置附近。令  $x = s(h+a)/(\pi c)$ , 则模最小的一个极点  $s_1^{(0)}$  大约在  $x_1^{(0)}$  的虚部为 1, 实部是一个负的小数的地方。求出第一个极点  $x_1^{(0)}$  之后, 将其实部加一个小的负增量, 虚部增加 0.9 个单位, 作为第二个极点的迭代初值, 求出  $x_2^{(0)}$ 。如此类推求出第一层全部极点。第二层可类似进行。

环带数  $N$  是这样选择的: 当求  $s_a^{(n)}$  时, 取  $N = 12 \times \text{Int}(|x_a^{(n)}| + 0.5)$ , 如果  $s = j\omega, \quad h + a = \lambda/2$ , 则  $N = 12$ 。

这里具体选取几组参数, 就中心轴对称模式进行了数值计算, 结果示于图 2。从图中可以看出, 当纵模比  $Q = (h+a)/(2b)$  降低时, 第一层自然频率趋于朝左下方移动, 而第二层向右下方移动。在实际应用中, 第一层和第二层自然频率最为重要。如果是分析

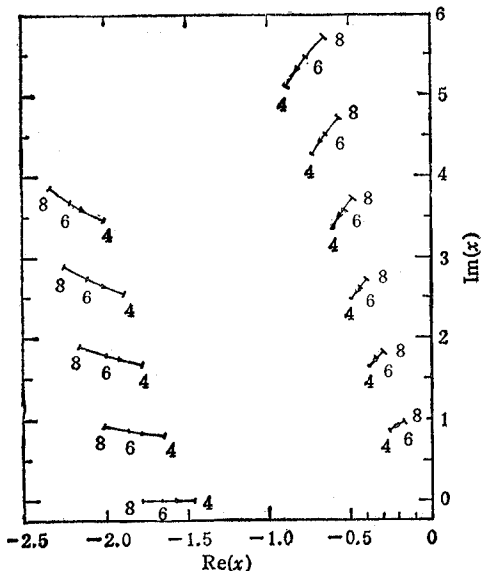


图 2 自然频率随  $Q$  变化的移动

物体的散射, 取这两层自然频率的前若干个即可; 如果要估计物体的外尺寸, 则可以把这两层自然频率的位置分布同已知物体的自然频率分布情况进行对比, 得到物体的纵横比, 而最大尺寸可以由第一层的第一个自然频率来估计, 对于纵横比较大的物体, 这个频率对应的波长大约为其最大尺寸的两倍, 即  $x_1^{(0)} \approx j, \quad h + a \approx \pi c/\omega = \lambda/2$ 。

## 附 录

$d_{ij}(t, t', \theta)$  的表达式

记  $d_{ij}(t, t', \theta) \triangleq D_{KLi}(\theta)$

其中

$$K \text{ (或 } L) = \begin{cases} 1, & t \text{ (或 } t') \in \Gamma_1 \\ 2, & t \text{ (或 } t') \in \Gamma_{II} \\ 3, & t \text{ (或 } t') \in \Gamma_{III} \end{cases}$$

则  $D_{KLi}(\theta)$  的具体形式如表 1.

表 1

$\left. \begin{aligned} D_{11ij} &= 0, \quad i, j = 1, 2 \\ D_{1211} &= z' \cos \theta, \quad D_{1221} = -b \sin \theta, \quad D_{1212} = -z' \sin \theta, \quad D_{1222} = \rho - b \cos \theta \\ D_{1311} &= (h + a \sin v') \sin \theta, \quad D_{1312} = -(h + a \sin v') \sin \theta \\ D_{1321} &= -\frac{b(a + h \sin v') \sin \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}}, \quad D_{1322} = \frac{a\rho \cos v' - b(a + h \sin v') \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}} \end{aligned} \right\} \quad (A1)$
$\left. \begin{aligned} D_{2111} &= b \cos \theta - \rho', \quad D_{2112} = z \sin \theta, \quad D_{2121} = b \sin \theta, \quad D_{2122} = -z \cos \theta \\ D_{2211} &= -b(1 - \cos \theta), \quad D_{2221} = 0, \quad D_{2212} = (z - z') \sin \theta, \quad D_{2222} = b(1 - \cos \theta) \\ D_{2311} &= b(\cos \theta - \cos v'), \quad D_{2312} = (z - h - a \sin v') \sin \theta \\ D_{2321} &= -\frac{b^2 \sin \theta \sin v'}{\sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}}, \quad D_{2322} = \frac{abc \cos v' + b[(z - h) \sin v' - a] \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}} \end{aligned} \right\} \quad (A2)$
$\left. \begin{aligned} D_{3111} &= \frac{-a\rho' \cos v + b(a + h \sin v) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}, \quad D_{3121} = \frac{b(a + h \sin v) \sin \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}} \\ D_{3112} &= (h + a \sin v) \sin \theta, \quad D_{3122} = -(h + a \sin v) \cos \theta \\ D_{3211} &= \frac{-ab \cos v + b[a + (h - z') \sin v] \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}, \quad D_{3221} = \frac{b^2 \sin v \sin \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}} \\ D_{3212} &= (h + a \sin v - z') \sin \theta, \quad D_{3222} = b(\cos v - \cos \theta) \\ D_{3311} &= \frac{ab(1 - \sin v \sin v') \cos \theta + abc \cos v \cos v'}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}} \\ D_{3321} &= \frac{ab^2(\sin v - \sin v') \sin \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v} \cdot \sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}} \\ D_{3312} &= a(\sin v - \sin v') \sin \theta \\ D_{3322} &= \frac{abc \cos v \cos v' - ab(1 - \sin v \sin v') \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 v' + b^2 \sin^2 v'}} \end{aligned} \right\} \quad (A3)$

## 参 考 文 献

- [ 1 ] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Chap. IX, McGraw-Hill, New York and London, (1941).
- [ 2 ] C. I. Chuang, D. P. Nyquist, K. M. Chen, B. C. Drachman, *Radio Science*, 20(1985)5, 1025—1030.
- [ 3 ] F. M. Tesche, *IEEE Trans. on AP*, AP-21(1973)1, 53—62.
- [ 4 ] T. T. Crow, C. D. Taylor et al., *IEEE Trans. on AP*, AP-27(1979)2, 248—251.
- [ 5 ] L. Marin, *IEEE Trans. on AP*, AP-22(1974)2, 266—274.
- [ 6 ] C. Eftimiu, P. L. Huddleston, *IEEE Trans. on AP*, AP-23(1984)7, 694—698.
- [ 7 ] R. Mittra, *Integral Equation Methods for Transient Scattering*, in *Transient Electromagnetic Fields*, ed. L. B. Felsen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1976).

## NATURAL FREQUENCIES OF A MODEL MISSILE

Xia Mingyao

*(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)*

**Abstract**        The natural frequencies of a model missile have been computed by using the magnetic field integral equation and moment method. The trajectories of them in the complex plane for some parameters are shown.

**Key words**        Magnetic field integral equation; Moment method; Natural frequencies; Muller iterative method