求解多层规划问题的新方法研究

徐 斌[1], 李 南[1], 白 芳[2]

(1.南京航空航天大学 经济与管理学院; 2.南京航空航天大学 民航学院, 江苏 南京 210016)

摘 要: 在考虑普通多层规划模型求解困难及多层规划与多目标规划异同点的基础上, 将求解多目标规划的方法引入到解决多层规划问题当中, 为了真实反映系统的递阶层次结构关系, 根据各层之间及同层次之间各目标函数的相对重要性, 对各层及同层各目标函数赋予相应的权重, 最后提出了解决多层规划问题的两种新方法——理想点和线性加权和法, 并通过算例证明其简单性及有效性。

关键词: 规划方法; 多层规划; 多目标规则; 规划模型求解; 理想点法; 线性加权和法

中图分类号: F224.13 文献标识码: A 文章编号: 1001- 7348(2007) 12- 0132- 04

0 前 言

具有层次递阶特性的系统存在于人类社会生活的各个方面, 分析和描述具有这种特性的系统具有重要的意义。随着人类社会的不断发展, 人们研究实际问题的规模越来越大、层次结构日趋复杂, 而决策者需要根据自己的实际情况和所处的环境做出最佳的决策。因此, 用科学的方法指导各层决策者的决策行为就变得尤为重要, 而多层规划理论与方法就成为了当前管理及决策理论中的一个重要研究领域。

多层次规划和多目标规划是对多个目标进行优化的问题, 但是多层规划具有递阶层次结构, 各层决策具有先后顺序, 各层目标之间具有主次关系; 多目标规划不具有层次结构关系, 各个目标决策同时进行, 各目标重要性不尽相同。因此, 在考虑普通多层规划模型求解困难及多层规划与多目标规划异同点的基础上, 将求解多目标规划的方法引入到解决多层规划问题当中, 提出了解决多层规划问题的两种新方法——理想点法和线性加权和法,

[6] Richter,K.and Sombrutzki,M.Remanufacturing Planning for the Reverse Wagner/Whitin model [J] . European Journal of Production Research.2000, 121(2):304- 315.

[7] Richter,K,and Weber,J,The reverse Wagner/Whitin model with Variable Manufacturing and Remanufacturing Cost [J] . International Journal of Production Economics,20001, 71 (1- 3):447- 456.

[8] Beltra J.L. and Krass,D.Dynamic lot Sizing Wity Returning Items and Disposals[J] . IIE Transactions,2002, 34:437- 448.

(责任编辑: 赵贤瑶)

Research on Lot- size Decision- making of Returned Product in Different Remanufacturing Strategy

Abstract:Reverse logistic is a special part of the enterprise value- chain activities.This paper analyses the remanufacturing strategy of returned products and sets up a mathematics model.To the randomicity and complexity of the remanufacturing process,the paper establishes simulation models for the two kinds of different remanufacturing strategis with EXTEND Simulation software package,and makes decisions on remanufacturing lot- size with the evolutionary optimizer block of EXTEND.

Key Words:reverse logistic;remanufacturing ;lot- size decision- making;EXTEND;simulation

收稿日期: 2006- 09- 05

基金项目: 国家自然科学基金项目(60572170)

作者简介: 徐斌(1979-) , 男, 蒙古族, 内蒙古阿拉善左旗人, 南京航空航天大学博士生, 研究方向为系统工程; 李南, 女, 南京航空航天大学经济与管理学院教授, 博士生导师, 研究方向为工业工程、技术经济及管理、研发与创新管理。

并通过算例证明其解决多层规划问题的简单性及有效性。

1　多层规划(multi-level programming, 记作MLP)概述

在多层决策问题中, 以双层决策问题最为常见, 任何多层次策系统都是一系列双层决策系统的复合[1]。1973年, Bracken 和 McGill[2]提出了双层规划的数学模型, 1977年 Candler 和 Norton 在科技报告[3]中, 正式提出了双层规划和多层规划这个名词。双层规划是双层决策系统优化的数学模型, 它是一种具有二层递阶结构的系统优化问题, 上层决策者和下层决策者都有各自的目标函数和约束条件, 上层先给定一个决策变量, 下层子系统以这个决策变量为参量, 根据自己的目标函数和约束条件, 在可能的范围内求得整体上的最优解。

多层规划技术用来解决多层次组织中多决策者的离散计划问题, 对同一离散组织中不同单元或部门追求自己利益时尤为有效[4]。解决多层规划的方法有枚举法、变换法、梯度法、分支定界法、模糊数学方法和其它启发式算法、进化算法等。枚举法通过不断调整上层决策者的控制变量, 来求得近似最优解, 因而效率很低; 变换法通过 K-T 条件或惩罚函数把下层规划问题转化为上层规划的约束条件, 这无疑会增大求解的难度和复杂性; 梯度法虽然适用范围较广泛, 但一般只能求得非线性两级规划问题的局部最优解; 分支定界法虽然能求解全局最优解, 但其计算量很大。基于一般求解多层规划问题方法的复杂性和计算量大的特点, 文献[4]提出容忍隶属度函数的概念和采用多目标优化方法, 以及解决多层规划问题的模糊方法。提出模糊多层规划模型的目的就是用一种新的概念和一个有效的方法去解决一般的多层规划问题。以后, 许多学者对模糊双层规划进行了深入研究[5-8]。模糊多层规划方法是一种比较简单而有效的方法, 它的优点是不仅使求解问题更简单, 而且更符合现实问题的实际情况[5]。

多层优化模型对解决层次系统中的决策问题现实而有效, 它几乎可以应用到所有的服务和生产行业、政府和其它盈利或非盈利组织等大型组织中[5], 但由于现实中许多大型系统问题和多层优化模型的复杂性, 一般来说, 求解多层规划问题是非常困难的[9], 而作为多层规划中最简单的双层线性规划, Jeroslow[10]指出其是一个 NP—hard 问题, Ben-Ayed[11]及 Bard[12]对此结论给出了简短的证明; Hansen[13]对双层线性规划是强 NP-hard 问题给出了严格的证明; 后来, Vicente[14]指出, 寻找双层线性规划的局部最优解也是 NP-hard 问题, 不存在多项式求解算法。即使双层规划上、下层中目标函数和约束函数都是线性的, 它也可能是一个非凸问题, 并且是非处处可微的, 双层规划的非凸性是造成双层规划问题求解异常复杂的另一个重要原因[9]。因此, 采用简单、有效的方法来解决多层规划问题是一项很有意义的研究。

2　求解多层规划问题的新方法

本文在考虑一般多层规划模型求解困难及多层规划与多目标规划异同点的基础上, 借鉴多目标规划中的求解方法, 将其引入到解决多层规划问题当中; 为了真实反映系统的递阶层次结构关系, 本文根据各层之间及同层次之间各目标函数的相对重要性, 对各层目标函数赋予相应的权重, 并提出了解决多层规模问题的两种方法——理想点法和线性加权和法。这两种方法在在解决多层规划问题上比传统方法简单、有效。

2.1　多层规划模型

设有一个 m阶层次结构的系统规划问题, 有 n个约束条件, 其层次结构标准形如以下模型所示:

$$\begin{cases} \max\limits_{X_1} F_1(X) \\ \vdots \\ \max\limits_{X_i} F_i(X) \\ \vdots \\ \max\limits_{X_m} F_m(X) \\ \text{s.t.} \\ g_j(X)\leq 0,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

其中: $F_1(X),\cdots,F_m(X)$分别表示各层规划的目标函数, $X_i(i=1,2,\cdots,m)$分别表示各层的决策变量所组成的向量, $X=\{X_i, i=1,2,\cdots,m\}$, $g_j(X)\leq 0, j=1,2,\cdots,n$为第 i 个约束条件。

2.2　求解多层规划问题的新方法

2.2.1　理想点法

(1) 定义。极小化各层目标函数构成的向量$(F_1(X), F_2(X),\cdots,F_m(X))$到一个理想的目标向量$(F_1^*, F_2^*,\cdots,F_m^*)$的广义距离加权平方和函数, 其中 $F_i^*(i=1,2,\cdots,m)$是第 i 个目标在不考虑其它目标时的最优值, 即

$$\begin{cases} \max\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i \| F_i(x)-F_i^* \|^k\right) \\ \text{s.t.} \\ g_j(x)\leq 0,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2}$$

其中, $1\leq k<\infty$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是凸组合系数, 即为各层次目标函数的权重, 反映了系统的递阶层次结构, 考虑到多层决策者之间的主从地位, 一般取 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m$, 取值根据具体情况确定。

针对具体的问题及其约束集, 可以通过检验式(2)目标函数的 Hessan 矩阵是否正定, 来判断模型有唯一的最优解。

求解式(2)得到的结果为所求多层规划问题的最终结果。

上述方法即为求解多层规划问题的理想点法。

(2) 算例分析。本节分别以文献[6]中的一个三层和双

层规划算例为例，来说明理想点法的实际应用。

算例 1:

$\max\limits_{x_1,x_2} F_1(X)=7x_1+3x_2-4x_3+2x_4$

$\max\limits_{x_3} F_2(X)=x_2+3x_3+4x_4$

$\max\limits_{x_4} F_3(X)=2x_1+x_2+x_3+x_4$

s.t. $x_1+x_2+x_3+x_4\leq 5$; $x_1+x_2-x_3-x_4\leq 2$; $x_1+x_2+x_3\geq 1$; $-x_1+x_2+x_3\leq 1$; $x_1-x_2+x_3+2x_4\leq 4$; $x_1+2x_3+3x_4\leq 3$; $x_4\leq 2$; $x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$。

其中: $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$。

取 k=2, 可以证明 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\|F_i(x)-F_i^*\|^2$ 为严格凸函数，且约束条件都为线性，故该规划集为凸规划，所以，此时算例 1 有唯一最优解。

采用上述方法首先求得: 当 $X=(2.25,0,0,0.25)$ 时, $F_1^*=16.25$; $X=(0, 1, 0, 1)$ 时, $F_2^*=5$, $X=(2.33, 0, 0.33, 0)$ 时, $F_3^*=5$。应用上节提出的方法，取 $\lambda_1=0.5$、$\lambda_2=0.3$、$\lambda_3=0.2$, 解得: 当 $X=(1.60, 0.87, 0,0.47)$ 时, $F_1^*=14.73$, $F_2^*=2.74$, $F_3^*=4.53$, $F=F_1^*+F_2^*+F_3^*=22.00$, 此即为所求最终结果，而文献[6]中基于模糊集理论算得的结果为 $F_1^*=12.01$, $F_2^*=3.18$, $F_3^*=4.94$, $F=20.13<22.00$。

算例 2:

$\max\limits_{x_1,x_2} F_1(X)=5x_1+6x_2+4x_3+2x_4$

$\max\limits_{x_3,x_4} F_2(X)=8x_1+9x_2+2x_3+4x_4$

s.t. $3x_1+2x_2+x_3+3x_4\leq 40$; $2x_1+4x_2+x_3+2x_4\leq 35$; $x_1+2x_2+x_3+2x_4\leq 30$; $x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$。

其中: $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$。

取 k=2, 可以证明 $\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\|F_i(x)-F_i^*\|^2$ 为严格凸函数，且约束条件都为线性，故该规划集为凸规划，所以，此时算例 1 有唯一最优解。

采用上述方法首先求得: 当 $X=(5,0,25,0)$ 时, $F_1^*=125$; $X=(11.25, 3.125, 0, 0)$ 时, $F_2^*=118.125$。应用上节提出的方法，取 $\lambda_1=0.6$、$\lambda_2=0.4$, 解得: 当 $X=(6.089, 0.544, 20.645, 0)$ 时, $F_1^*=116.29$, $F_2^*=94.90$, $F=F_1^*+F_2^*=211.19$, 此即为所求最终结果，而文献 [6] 中基于模糊集理论算得的结果为 $F_1^*=90.77$, $F_2^*=98.85$, $F=189.62<211.19$。

通过上述两个算例可以说明，理想点法在求解双层规划问题中，能在满足各层约束条件和各层目标函数要求的条件下，使得总体结果更优，故而证明这种方法有效性；同时，可以看出这种方法求解过程的简单性。

2.2.2 线性加权和法

(1) 定义。首先将各层目标数转化为式(1)所示的标准形，对各层目标函数加权求和，构造评价函数，将多层规划转化为单层规划问题。构造评价函数如下:

$$\max f(x)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i F_i(x)^k \tag{3}$$

其中: $1\leq k<\infty$, $\sum_{i=1}^{m}\omega_i=1$, $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 是凸组合系数，即为各层次目标函数的权重，反映了系统的递阶层次结构，考虑到多层决策者之间的主从地位及各层决策目标的先后顺序，一般取 $\omega_1\geq\omega_2\geq\cdots\geq\omega_m$, 取值根据具体情况而定。

$$\begin{cases}\max f(x)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i F_i(x)^k\\ \text{s.t.}\\ g_j(x)\leq 0,\ j=1, 2, \cdots, n\end{cases} \tag{4}$$

针对具体的问题及其约束集，可以通过检验式(4)目标函数的 Heassan 矩阵是否正定，来判断模型有唯一最优解。

求解式 (4) 得到的结果即为所求多层规划的最终结果。

上述方法即为求解多层规划问题的线性加权和法。

(2) 算例分析。本节仍然以上文中的算例 1 和算例 2 为例，来说明线性加权和法在求解多层规划问题中的实际应用。

算例 1:

取 k=2, 可以证明 $\sum_{i=1}^{3}\omega_i F_i(x)^2$ 为严格凸函数，且约束条件都为线性，故该规划集为凸规划，所以，算例 1 有唯一最优解。

取 $\omega_1=0.5$、$\omega_2=0.3$、$\omega_3=0.2$, 应用线性加权和法求得: 当 $X=(2.25,0,0,0.25)$ 时, $F_1^*=16.25$, $F_2^*=1$, $F_3^*=4.75$, $F=F_1^*+F_2^*+F_3^*=22.00$, 此即为所求最终结果，而文献[6]中基于模糊集理论算得的结果为 $F_1^*=12.01$, $F_2^*=3.18$, $F_3^*=4.94$, $F=20.13<22.00$。

算例 2:

取 k=2, 可以证明 $\sum_{i=1}^{3}\omega_i F_i(x)^2$ 为严格凸函数，且约束条件都为线性，故该规划集为凸规划，所以算例 1 有唯一最优解。

取 $\omega_1=0.6$、$\omega_2=0.4$, 应用线性加权和法求得: 当 $X=(5, 0, 25, 0)$ 时, $F_1^*=125$, $F_2^*=90$, $F=F_1^*+F_2^*=215$, 此即为所求最终结果，而文献 [6] 中基于模糊集理论算得的结果为 $F_1^*=90.77$, $F_2^*=98.85$, $F=189.62<215$。

通过上述两个算例可以说明，线性加权和法与某些传统求解双层规划问题的方法相比，能在满足各层约束条件和各层目标函数要求的条件下，使得总体结果更优，故而证明这种方法的有效性；同时，求解过程简单易行。

3 结 论

通过算例分析得到的结果证明,本文提出的求解多层规划问题的理想点法和线性加权和法简单、有效。由于其中的权重真实地反映了系统的递阶层次结构,克服了一般求解多层规划问题的复杂性和困难性, 使得求解过程简单、易行,并且最终得到的结果比以往结果更优,所以,采用本文提出的理想点法和线性加权和法解决具有递阶层次结构的实际规划问题,将更加简单、有效。

参考文献:

[1] F B W,N C M.On two- level optimiaztion [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1982.211- 214.

[2] J B,J M. Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints[J]. Operation Research,1973,21:37- 44.

[3] W C,Norton R. Multilevel Programming[R]. Washington D.C.: World Bank Development Research Center,1997.

[4] Shih H,Lai Y,Lee E S.Fuzzy Approach for Multi- Level Programming Problems[J]. Computers Ops Res,1996,23:73- 91.

[5] Lee E S.Fuzzy Multiple Level Programming[J].Applied Mathematics and Computation,2001,120:79- 90.

[6] Sinha S. Fuzzy Programming Approach to Multi- Level Programming Problems [J]. Fuzzy Sets and Systems,2003,136: 189- 202.

[7] Osman M S,Abo- Sinna M A,Amer A H,et al.A Multi- Level non- Linear Multi- Objective Decision- Making under Fuzziness [J]. Applied Mathematics and Computation,2004,153: 239- 252.

[8] Eman O E. A Fuzzy Approach for bi- Level Integer non- Linear Programming Problem[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,172:62- 71.

[9] 周爱民,谭春桥.双层规划模型及其算法研究综述[J].零陵学院学报,2005,26(2):133- 137.

[10] R J.The Polynomial Hierarchy and a Simple Model for Competitive Analysis [J].Mathematical Programming,1985,32: 146- 164.

[11] O B,C B.Computational Difficulties of bi- Level linear Programming[J].Operations Research,1990,38:556- 560.

[12] J B.Some Properties of the bi- Level Programming Problem [J].Journal of Optimization Theory and Applications, 1991,68:371- 378.

[13] P H,B J,G S.New Branch- and- bound Rules for Linear Bileveal Programming[J].SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,1992,13:1194- 1217.

[14] L V,G S,J J.Descent Approaches for Quadratic Bilevel Programming [J].Journal of Optimization Theory and Applications,1994,81:379- 399.

(责任编辑:胡俊健)

New Methods for Solving the Multi- level Programming Problem

Abstract:Considering the difficulties of dissolving the common multi- level programming (MLP)model and the similarities and differences between MLP and MOP(multi- objective programming), the authors put the further minimum distance method and the linear weighted method of MOP into solving the multi- level programming problem(MLPP).Because of the hiberarchy structure of systems and according to the corresponding importance of objective function among multi- level or one level, the authors also give the corresponding weight of the objective functions and put forward two new methods for soliving MLPP—the further minimum distance method and the linear weighted method.Finally two numerical examples are given to illustrate the simpleness and validity of these two methods.

Key Words:multi- level programming;multi- objective programming;minimum distance method;linear weighted method