

# 一维 Renyi 熵阈值法中参数的自适应选取\*

雷博, 范九伦

(西安邮电学院 信息与控制系, 西安 710061)

**摘要:**提出了一种自适应选取一维 Renyi 熵阈值分割法中参数  $\alpha$  的方法. 该方法以一种图像分割质量评价指标-均匀性测度为适应度函数, 利用粒子群算法在参数空间进行优化搜索, 从而可以根据具体的图像获得合适的参数, 得到最佳的图像分割阈值. 结果表明: 一般情况下, 可以在  $(0, 1)$  范围内搜索最优的  $\alpha$  值; 当需要更好的分割效果时, 可在  $(0, 10)$  范围内搜索最优的  $\alpha$  值.

**关键词:** 图像分割; 阈值选取; Renyi 熵

**中图分类号:** TN911.73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2009)09-2439-5

## 0 引言

阈值化技术是图像分割中一种简单、有效、便于理解的方法<sup>[1-2]</sup>. 其中, 最大类间方差法<sup>[3]</sup> (也叫作 Otsu 法)、最大熵法<sup>[4]</sup>、最小误差阈值法<sup>[5]</sup> 是三个最常用的分割方法.

Pun 首先将信息熵应用于图像分割<sup>[6]</sup>. Kapur 等人在指出 Pun 工作的问题的基础上, 提出了一维最大 Shannon 熵阈值法<sup>[4]</sup>. 最大熵阈值法以其表述简单、性能稳定、具有信息论背景而成为一类典型的阈值选取方法, 在实际中得到了广泛的应用. 在信息论中, 已经给出了很多的广义信息熵表达式. 广义信息熵含有参数, 参数的特殊取值可以得到经典的 Shannon 熵. 既然最大熵阈值法是一个基本的阈值法, 因此研究人员开始考虑使用广义信息熵进行阈值选取. Renyi 熵是一种广义信息熵, Sahoo 等人<sup>[7]</sup> 研究了基于一维 Renyi 熵的图像分割方法, 能够获得比最大 Shannon 熵阈值法更好的分割效果. 同时, Sahoo 等人通过大量实验指出参数  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) 取为 0.7 是一个比较合适的值. Albuquerque 等人<sup>[8]</sup> 提出了基于一维 Tsallis 熵的图像分割方法, 在其实验中指出对有些图像参数取为 4 时会得到较好的分割效果. 对于图像分割问题, Wang 等人<sup>[9]</sup> 指出 Renyi 熵和 Tsallis 是两个等价的阈值选取方法, 文<sup>[8]</sup> 的实验结果表明, 好的  $\alpha$  值并非完全在  $(0, 1)$  内, 因此研究参数  $\alpha$  的合理取值不仅有助于基于 Renyi 熵的图像分割方法的应用, 而且对研究其它的基于广义信息熵的图像阈值方法也有借鉴价值. 本文的目的是探讨参数  $\alpha$  的自适应选取问题, 利用图像分割评价准

则, 通过优化的方法来获得合适的参数取值. 大量的实验结果表明, 本文方法可以根据不同的图像自适应的选取参数  $\alpha$  来获得较好的分割结果.

## 1 一维 Renyi 熵阈值法

用  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_{M \times N}\}$  表示一幅大小为  $M \times N$  的数字图像, 其中  $f_i$  表示图像中第  $i$  点的灰度值,  $f_i \in G = \{0, 1, \dots, L-1\}$ . 图像中灰度为  $g$  的像素点总数记为  $f(g)$ , 则图像中每一灰度值  $g$  出现的概率  $h(g)$  可表示为

$$h(g) = \frac{f(g)}{M \times N}, g = 0, 1, \dots, L-1 \quad (1)$$

设阈值  $t$  将图像分为目标和背景两类, 分别记为  $C_0$  和  $C_1$ , 则这两类的先验概率分别为

$$P_0(t) = \sum_{g=0}^t h(g) \quad (2)$$

$$P_1(t) = \sum_{g=t+1}^{L-1} h(g) \quad (3)$$

图像  $F$  的  $\alpha$  阶 Renyi 熵定义为

$$H_\alpha^0(t) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{g=0}^t \left[ \frac{h(g)}{P_0(t)} \right]^\alpha \quad (4)$$

$$H_\alpha^1(t) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{g=t+1}^{L-1} \left[ \frac{h(g)}{P_1(t)} \right]^\alpha \quad (5)$$

式中  $\alpha > 0$ , 一维 Renyi 熵阈值法的最优阈值  $t^*$  取为

$$t^* = \arg \max_{0 < t < L-1} [H_\alpha^0(t) + H_\alpha^1(t)] \quad (6)$$

分割后二值图像  $g(x, y)$  取值为

$$g(x, y) = \begin{cases} b_0 & \text{if } f(x, y) \leq t^* \\ b_1 & \text{if } f(x, y) > t^* \end{cases} \quad (7)$$

一般,  $b_0$  取 0,  $b_1$  取 255.

当参数  $\alpha = 1$  时一维 Renyi 熵阈值法就是一维 Shannon 熵阈值法<sup>[4]</sup>. 文献<sup>[7]</sup> 中指出参数  $\alpha$  取经验值 0.7, 这使得  $\alpha$  的确定不能随着图像的不同而改变, 会在一定程度上失去参数熵的优势. 为了解决这个问题, 本文采取基于图像分割评价准则的途径来自适应的获得较好的参数值. 经过实验, 我们选取均

\* 国家自然科学基金(60572133)和陕西省教育厅专项科研计划项目(09JK721)资助

Tel: 029-85383404

Email: leileibo@xupt.edu.cn

收稿日期: 2008-07-11

修回日期: 2008-08-18

均匀性测度作为选取参数的准则函数. 均匀性测度是用来评价分割方法性能的一个指标. 一个区域内的均匀性与区域内的方差成反比, 区域均匀性越好, 其灰度分布越集中. 假设在阈值  $T$  处对图像进行阈值化, 其均匀性测度可用式(8)~(10)来计算<sup>[10]</sup>

$$UM = 1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{C} \quad (8)$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{(x,y) \in R_i} [f(x,y) - \mu_i]^2 \quad (9)$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{(x,y) \in R_i} f(x,y)}{A_i} \quad (10)$$

式中  $R_i$  表示分割后的第  $i$  个区域 ( $i=1, 2$ ),  $A_i$  表示区域  $R_i$  中的像素总个数,  $C$  是归一化参数. 对于参数  $\alpha$ , 最优的  $\alpha^*$  取在

$$\alpha^* = \text{Arg}[\max UM(t(\alpha))], \alpha > 0 \quad (11)$$

理论上讲,  $\alpha$  的取值范围在  $(0, +\infty)$ . 为了获得最优的  $\alpha$  值, 需要对其进行优化搜索, 这里采用粒子群算法 (Particle Swarm Optimization, PSO) 进行优化搜索.

## 2 PSO 优化算法

假设在一个  $D$  维的目标搜索空间中, 有  $N$  个粒子组成一个群落, 其中第  $i$  个粒子表示为一个  $D$  维的向量  $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , 即第  $i$  个粒子在  $D$  维的搜索空间中的位置是  $\mathbf{X}_i$ . 每个粒子的位置就是一个潜在的解. 将  $\mathbf{X}_i$  带入一个目标函数就可以计算出其适应值, 根据适应值的大小衡量  $\mathbf{X}_i$  的优劣. 第  $i$  个粒子的“飞翔”速度记为  $\mathbf{V}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ . 记第  $i$  个粒子迄今为止搜索到的最优位置为  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为  $\mathbf{p}_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gD})$ , 基本 PSO 采用式(12)粒子操作<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} v_{id} &= \omega v_{id} + c_1 \text{rand}() (p_{id} - x_{id}) + c_2 \text{rand}() (p_{gd} - x_{id}) \\ x_{id} &= x_{id} + v_{id} \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $\omega$  是非负数, 称为惯性因子; 学习因子  $c_1$  和  $c_2$  是非负常数;  $\text{rand}()$  是介于  $[0, 1]$  之间的随机数. 迭代中止条件根据具体问题一般选为最大迭代次数或(和)粒子群迄今为止搜索到的最优位置满足预定最小适应阈值.

基本 PSO 算法需要用户确定的参数少、操作简单, 故使用比较方便. 但是它的缺点是易陷入局部极小点, 搜索精度不高. 研究者们发现惯性因子  $\omega$  对优化性能有很大的影响, 较大的  $\omega$  值有利于跳出局部极小点, 而较小的  $\omega$  值有利于算法收敛<sup>[12]</sup>, 因此提出了自适应调整  $\omega$  的策略, 即随着迭代的进行, 线性地减小  $\omega$  的值. 这种 PSO 算法称为自适应

PSO 算法<sup>[12]</sup>, 本文就采用这种改进的自适应 PSO 算法来进行最优化搜索.

## 3 基于自适应 PSO 的参数选取

根据文献[7]中实验说明,  $\alpha$  在  $(0, 1)$  区间内取值时分割效果较好并建议取  $\alpha = 0.7$ . 文献[8]在实验中发现当  $\alpha = 4$  时, 对有些图像可以获得好的分割效果. 本文经过大量实验统计, 发现当参数  $\alpha$  在  $(0, 10)$  范围内取值时, 可以获得较好的阈值, 当  $\alpha$  的变化空间进一步扩大时, 对分割结果不会有大的影响. 基于此, 本文分别在区间  $(0, 1)$  和  $(0, 10)$  内进行了搜索, 具体的搜索步骤为:

搜索空间的维数  $D=1$ . 粒子的个数根据应用选取  $N=10$  个粒子来进行搜索.

1)  $\alpha$  在区间  $(0, 1)$  内变化

第一步: 初始化粒子群;

①确定粒子的初始位置  $X$  及初始速度  $V$ ; 这里, 由于每一个粒子代表一组参数, 第  $i$  个粒子的初始位置为  $x_i$ , 在  $(0, 1)$  区间随机选取粒子的初始位置, 即  $x_i = \text{rand}(0, 1)$ . 初始速度根据可以从初始位置中得到, 这里选  $v_i = \text{rand}(0, 1)$ . 一般的, 为了避免粒子飞行过快, 飞过全局最优值, 需要设定粒子的最大速度. 粒子速度变化范围为  $(-v_{1\max}, v_{1\max})$ ,  $v_{1\max} = 0.15$ .

②学习因子  $c_1$  和  $c_2$ ; 取  $c_1 = 2.8$ ,  $c_2 = 1.3$ .

③初始惯性因子  $\omega$ .

初始惯性因子选为 1.0, 随着迭代次数的增加, 惯性因子线性的减小, 如式(13)

$$\omega(t+1) = \omega_{\max} - (\omega_{\max} - \omega_{\min}) * t / \text{iter} \quad (13)$$

式中,  $\omega_{\max}$  和  $\omega_{\min}$  分别为权重的最大和最小值. 一般的,  $\omega_{\max} = 0.95$ ,  $\omega_{\min} = 0.4$ ,  $\text{iter}$  为最大迭代次数,  $\text{iter} = 30$ .

第二步: 计算每个粒子的适应度值;

对于第  $i$  个粒子, 首先利用式(6)计算一维 Renyi 熵 ( $\alpha = x_i$ ) 确定图像的最佳阈值  $t$ ; 然后利用式(8)计算对应第  $i$  个粒子的适应度值. 重复上述过程计算所有粒子的适应度值.

第三步: 对于每个粒子, 将其适应值与所经历过的最好位置的适应值进行比较, 如果更好, 则将其作为粒子的个体历史最优值, 用当前位置更新个体历史最好位置.

第四步: 对每个粒子, 比较它的适应度值和群体所经历的最好位置的适应度值, 如果更好, 更新群体最好位置;

第五步: 根据式(12)调整粒子的速度和位置;

第六步: 如果达到结束条件则结束, 否则转第二

步. 搜索完成后,最佳的参数  $\alpha^* = p_g$ ,最佳的分割阈值为该参数对应的一维 Renyi 熵阈值  $t$ .

2)  $\alpha$  在区间(0,10)内变化

算法步骤与(0,1)区间内相同,仅是参数取值不同,具体为  $x_i \in (0, 10)$ ,粒子速度变化范围为  $(-v_{2max}, v_{2max})$ ,  $v_{2max} = 1.5$ . 由于搜索空间变大,最大迭代次数取 50 次,即  $iter = 50$ .

### 4 实验结果与分析

仿真实验是在 Matlab7 环境下,在 Intel Core 2.33GHz CPU 和 2 G 内存微处理器上进行的. 为了验证本文方法的有效性,本文对各种不同类型的图像分别进行了实验. 大量实验表明,本文方法是有效的,可以根据不同的图像寻找合适的参数,从而得到满意的分割阈值. 限于篇幅,文中采用 4 幅图像:实验结果如图 1. 比较了本文优化方法参数在(0,1)区间取值(记为 1d-ORE1 方法)、参数在(0,10)区

间取值(记为 1d-ORE2 方法)、一维 Renyi 熵法(参数  $\alpha = 0.7$ ,记为 1d-RE)的分割结果. 表 1 列出了这三种方法的分割阈值及参数  $\alpha$  的取值.

表 1 三种方法的分割阈值及参数  $\alpha$  取值比较

实验图像	1d-ORE1 ( $t, \alpha$ )	1d-ORE2 ( $t, \alpha$ )	1d-RE ( $t, \alpha$ )
camera man	(123, 0.3153)	(123, 0.2878)	(192, 0.7)
Blood1	(139, 0.1514)	(139, 0.1245)	(171, 0.7)
Saturn	(128, 0.0058)	(91, 1.6968)	(165, 0.7)
Sar	(158, 0.4040)	(69, 5.6377)	(158, 0.7)

由图 1(a)~(j)给出的 2 幅图像可以看出,本文提出的 1d-ORE1 方法和 1d-ORE2 方法的分割效果优于参数固定的 1d-RE 方法. 由表 1 可以看出,1d-ORE1 方法和 1d-ORE2 的参数  $\alpha$  的取值不完全相同,这是由于参数变化空间不同而导致的,但两种方法的分割阈值相同.

对于图 1(k)~(t)这 2 幅图像而言,参数在(0, 10)区间变化得到的分割阈值最合适,即 1d-ORE2 方法的分割结果优于 1d-ORE1 方法和 1d-RE 方法. 这也就验证了文献[8]的实验.

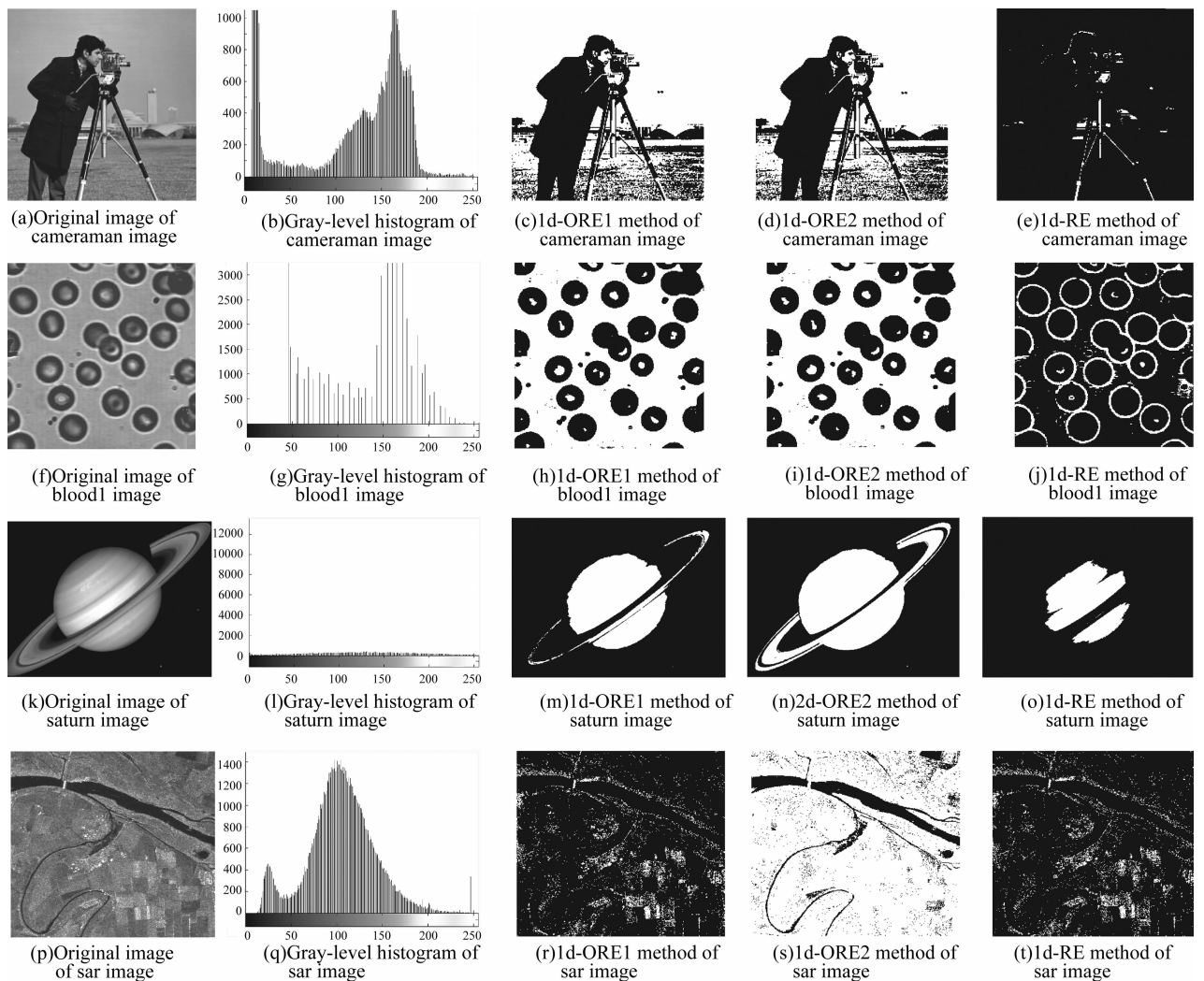


图 1 四幅图像分割结果  
Fig. 1 Segmentation results of four image

由实验可见,参数在(0,10)区间变化确实可以取得最佳的分割阈值.但这样做的缺点是:搜索空间变大,搜索的时间也将加长.总体而言,我们获得的一个普遍的结论是:从节省时间的角度考虑,一般情况下可以使用 1d-ORE1 方法.如果需要,可以使用 1d-ORE2 方法来获得更为准确的阈值.

## 5 结论

一维 Renyi 熵阈值分割法是一种全局的参数型熵阈值图像分割方法,该方法与最大 Shannon 熵阈值法相比有更好的适应性.本文针对一维 Renyi 熵阈值法中参数  $\alpha$  的选取问题,以图像分割效果评价准则为适应性函数,利用 PSO 优化搜索算法,在  $\alpha$  的变化空间内进行优化搜索,根据具体的图像自适应的选取参数  $\alpha$ .由于参数  $\alpha$  的变化空间不同,搜索结果会有一定的差异,因此可以根据实际的需要选择不同的搜索区域来确定参数  $\alpha$ .如果对分割结果要求不高,可采用文献[7]的建议选取  $\alpha=0.7$ ;如果需要比较好的分割结果则可以选用本文提出的方法在(0,1)或(0,10)内自适应的选取参数  $\alpha$ .实验结果表明,本文方法可以有效提高 Renyi 熵阈值分割法的分割性能.

考虑到一维最大熵阈值法对噪声图像的分割效果较差,Abutaleb 提出了二维最大熵阈值法,二维 Renyi 熵也已经提出,同样也面临一个参数的选取问题,本文的研究思路可供借鉴,这里不再进行更细致的讨论.

### 参考文献

- [1] LUO Zhen-xiong, LI Ze-ren, LI Zuo-you, *et al.* An automatic segmenting method for the reconstructed image of high speed particle field[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(3): 503 - 506.  
罗振雄, 李泽仁, 李作友, 等. 高速粒子场的全息再现图像的自动分割方法[J]. 光子学报, 2007, **36**(3): 503-506.
- [2] WANG Bao-ping, FAN Jiu-lun, XIE Wei-xin, *et al.* An image segmentation method based on cost function and fuzzy entropy [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(12): 1502-1505.  
王保平, 范九伦, 谢维信, 等. 一种基于代价函数和模糊熵的图像分割方法[J]. 光子学报, 2003, **32**(12): 1502 -1505.
- [3] OTSU N. A thresholding selection method from gray-level histograms [J]. *IEEE Trans. System Man Cybernetic*. 1979, **9**(1): 62-66.
- [4] KAPUR N, SAHOO P K, WONG A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram [J]. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1985, **29**(3): 273-285.
- [5] KITT ERLER J, ILLINGWORTH J. Minimum error thresholding[J]. *Pattern Recognition*, 1986, **19**(1): 41-47.
- [6] PUN T. Entropic thresholding: A new approach [J]. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1981, **16**(3): 210-239.
- [7] SAHOO P, WILKINS C, YEAGE J. Threshold selection using Renyi's entropy[J]. *Pattern Recognition*, 1997, **30**(1): 71-84.
- [8] PORTE S de ALBUQUERQUE M, ESQUEF I A, GESUALDI MELLO A R. Image thresholding using Tsallis entropy[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2004, **25**(9): 1059-1065.
- [9] WANG S, CHUNG F L. Note on the equivalence relationship between Renyi-entropy based and Tsallis-entropy based image thresholding[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, **26**(14): 2309-2312.
- [10] LEVINE M D, NAZIF A M. Dynamic measurement of computer generated image segmentations[J]. *IEEE Trans PAMI-7*, 1985, **7**(2): 155-164.
- [11] EBERHART R C, KERMEDY J. A new optimizer using particles swarm theory [C]. *Proceedings of Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, Nagoya, Japan, 1995: 39-43.
- [12] EBERHART R C, SHI Y H. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms[C]. *Proceedings of the Congress on evolutionary Computation*, Seoul, Korea, 2001: 94-100.

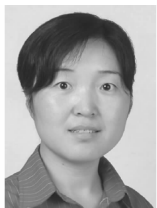
## Self-Adaptation Preferences in One-dimensional Renyi Entropy Thresholding

LEI Bo, FAN Jiu-Lun

(Department of Information and Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** A self-adaptive parameter selection algorithm for  $\alpha$  in one-dimensional Renyi entropy image thresholding method is presented. The method can get the suitable parameter and the optimal threshold value according to the practical images, which selects the uniformity measure, an image segmentation valuation criteria, as fitness function and Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm to search for the optimal parameter in the parameter space. The results show that the optimal value of  $\alpha$  can be found in  $(0, 1)$  in general cases; if more strict segmentation is needed, the optimal value of  $\alpha$  can be found in  $(0, 10)$ .

**Key words:** Image segmentation; Threshold selection; Renyi entropy



**LEI Bo** was born in 1981. Now she is a Ph. D. degree candidate, and her research work focuses on pattern recognition, image processing and fuzzy system.