高速 GMAW 驼峰焊道形成过程的数值分析 *

陈 姬 武传松

(山东大学材料连接技术研究所, 济南 250061)

摘要 基于高速气体金属电弧焊 (GMAW) 驼峰焊道形成过程的实验观测结果,充分考虑熔池中后向液体流的动量和热焓,在 熔池表面变形方程中加入后向液体流的动能项,并将熔滴热焓分布在整个熔池表面层,建立了高速 GMAW 驼峰焊道形成过程的 数值分析模型.模拟了一定焊接条件下的驼峰焊道形成过程及其三维形状与尺寸,与实测结果进行了对比,证明本文模型能够较好 地模拟高速 GMAW 过程,可定量分析驼峰焊道形成过程.

关键词 焊接, 高速 GMAW, 驼峰焊道, 数值分析

中图法分类号 TG444 文献标识码

文章编号

0412 - 1961(2009)09 - 1070 - 07

NUMERICAL SIMULATION OF FORMING PROCESS OF HUMPING BEAD IN HIGH SPEED GMAW

CHEN Ji, WU Chuansong

Institute for Materials Joining, Shandong University, Jinan 250061

Correspondent: WU Chuansong, professor, Tel: (0531)88392711, E-mail: wucs@sdu.edu.cn

Α

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.50675119) and Specialized Research

Fund for the Doctoral Program of High Eduction (No.20050422027)

Manuscript received 2008-12-08, in revised form 2009-04-17

ABSTRACT High speed GMAW (gas metal arc welding) is an effective way to improve the welding productivity, however, its application is usually limited by the occurrence of several weld bead defects, such as humping bead. Based on the experimental results, a mathematical model is developed to analyze the forming mechanism of humping bead for high speed GMAW through considering both the momentum and heat content of the backward flowing molten jet in weld pools. One term related to the momentum of backward jet is added to the equation of weld pool surface deformation, and the heat content of overheated droplets is distributed within the layer covering the whole pool. The humping bead forming process and its dimension and 3D geometry are numerically simulated, and compared with the experimental measurement under some welding conditions. It is found that the model can describe and characterize the humping formation in high speed GMAW quantitatively.

 $\mathbf{KEY} \ \mathbf{WORDS} \ \ \mathrm{welding, \ high-speed \ GMAW, \ humping \ weld \ bead, \ numerical \ simulation}$

现代制造业对焊接生产率提出了越来越高的要求,大 幅度提高焊接速度是提高焊接生产率的有效方法之一. 高 速 GMAW(gas metal arc welding)因其成本低、易推 广、适应性强等优点,有广阔应用前景^[1].但是实验表明, 当焊接速度提高到某一值时,会出现咬边和驼峰焊道等焊 缝成形缺陷^[2,3],不能实现稳定的高速焊接,这也是高速 焊接面临的共性问题.针对高速焊接时驼峰焊道的形成原

* 国家自然科学基金项目 50675119 和高等学校博士学科点专项科研基金项目 20050422027 资助 收到初稿日期:2008-12-08,收到修改稿日期:2009-04-17 作者简介: 陈 姬,男,1982 年生,博士生 因,国内外展开了广泛的研究^[2-6],但到目前为止,还没 有令人满意的数理模型来描述和预测这类问题.Bradstreet^[2]和 Gratzke等^[3]把熔池简化为仅由表面张力维 持的一段圆形液柱,在外力干扰时液柱失稳、颈缩、断裂 而形成驼峰.这只是在过分简化前提下所做的静态分析, 没有考虑在电弧力和熔滴冲击力作用下三维熔池中流体 流动的重要影响,无法给出驼峰焊道三维形状的数值.文 献 [4—7]分别通过实验观测了高速电弧焊时的驼峰形成 过程,发现熔池中出现的液态薄层以及高速流向熔池尾部 的金属流(后向液体流)是形成驼峰焊道的主要原因,并用 上坡焊和下坡焊实验验证了这一结论.但这些研究结果只 是根据实验结果所做的定性解释,缺乏系统的理论描述、 数值分析和定量判断.本文根据高速 GMAW 驼峰焊道形 成过程的实验观测结果,充分考虑熔池中的后向液体流的 动量和热焓,建立高速 GMAW 驼峰焊道形成过程的数值 分析模型,为实现制造业焊接生产加工的低成本和高速度 提供理论依据.

1 模型的建立

三维坐标系固定在工件上不动, x 为焊接方向, z 为 工件厚度方向. 工件尺寸为 150 mm×50 mm×6 mm, 起弧点坐标 (单位 mm) 为 (50, 0, 0). 将直角坐标系 (Oxyz)转化为贴体坐标系 ($Oxyz^*$), 其中, z^* 为 z 在贴 体坐标中的归一化值,

$$z^* = \frac{z - \varphi(x, y)}{H - \varphi(x, y)} \tag{1}$$

式中, H 为工件的厚度, $\varphi(x, y)$ 为熔池表面的形状函数. 显然, 在熔池的上表面 $z = \varphi$ 处, $z^*=0$; 而在熔池的下表 面 z = H 处, $z^*=1$. 通过该变换, 将直角坐标系下不规则 的物理空间转变为非正交贴体坐标系下规则的计算空间, 使坐标轴与计算区域的边界相一致. 贴体坐标系下, 工件 上的热传导方程为

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z^*}{\partial z^2} \right) \frac{\partial T}{\partial z^*} \right] = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} +$$

$$\frac{k \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + k \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + k[(\frac{\partial x}{\partial x})^2 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2]\frac{\partial x^2}{\partial z^{*2}} + 2k(\frac{\partial^2 T}{\partial z^* \partial x}\frac{\partial z^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^* \partial y}\frac{\partial z^*}{\partial y}) + S_{\rm v}$$
(2)

式中, ρ 为工件密度, c_p 为比定压热容,T为温度,t为时间,k为导热系数, S_v 为熔滴热焓分布函数,起弧时刻t=0.

控制式(2)的边界条件为

工件上表面:

$$k\frac{\partial T}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial z} = q_{\rm a} - q_{\rm c} - q_{\rm e} - q_{\rm r} \tag{3}$$

工件下表面:

$$k\frac{\partial T}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial z} = -q_{\rm c} - q_{\rm e} - q_{\rm r} \tag{4}$$

式中, q_a 为电弧热流密度 (本文采用双椭圆分布模型), q_c , q_e 和 q_r 分别为对流、蒸发和辐射热损失,式 (3) 和 (4) 中各项的具体描述见文献 [8].

通过求解上述热传导方程及其边界条件,得到各个时刻的温度分布,从而获得不同时刻的熔池区域. 然后, 求解熔池表面变形方程,确定焊缝余高及焊道形状. 但 是,为了反映高速焊接的过程特点,有两个重要问题需要 加以特别处理,即式 (1)中的熔池表面形状函数 $\varphi(x, y)$ 和式 (2)中的过热熔滴的热焓在熔池中的分布函数 $S_v(x, y, z^*)$.

1.1 高速焊的熔池表面变形方程

一般情况下, GMAW 熔池的表面形状函数 $\varphi(x, y)$ 由电弧压力、熔滴冲击力、液态金属重力和表面张力的动 态平衡来确定 ^[9,10]. 在高速 GMAW 条件下, 熔池中存 在动量较大的后向液体流, 液体金属在熔池尾部堆积, 而 熔池前部液体层很薄; 后向液体流对熔池施加额外的作用 力, 其方向指向熔池尾部. 因此, 在熔池的表面变形方程 中, 必须考虑后向液体流对熔池施加的这一作用力.

沿熔池的长度 (即 *x* 方向),将熔池分割成微元薄片, 其沿 -*x* 方向的流速平均值为 *U*,则熔池后向液体流的动 能变化量为

$$\Delta E_3 = \iint_{\Omega_1} \frac{1}{2} \rho_{\rm l} (H_{\rm p} - \varphi) U^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{5}$$

式中, ρ_1 为液体金属的密度, H_p 是熔深, Ω_1 为熔池上表 面所占区域 (即上表面液相线围成区域). 将式 (5) 应用于 整体熔池的能量守恒条件 (即电弧力和熔滴冲击力所做的 功,等于熔池表面能、动能和熔池势能的变化量), 根据能 量最小化原理, 采用 Euler–Lagrange 判据 ^[11], 经一系列 推导, 可得出高速焊接的熔池表面变形方程

$$p_{a} + p_{d} + \frac{1}{2}\rho_{l}U^{2} - \rho_{l}g\varphi - \lambda$$
$$= -\gamma \frac{(1+\varphi_{x}^{2})\varphi_{yy} - 2\varphi_{x}\varphi_{y}\varphi_{xy} + (1+\varphi_{y}^{2})\varphi_{xx}}{(1+\varphi_{x}^{2}+\varphi_{x}^{2})^{3/2}} \quad (6)$$

式中, p_a 为电弧压力, p_d 为熔滴冲击力, g 为重力加速度, γ 为表面张力, λ 是 Lagrange 因子, φ 的下角标表示其对 各个坐标的偏导数. 与一般的熔池表面变形方程相比, 式 (6) 多了后向液体流的动能项 $\frac{1}{2}\rho_1 U^2$ (其物理意义是: 高速 运动的后向液体流对熔池施加作用力, 从而对熔池表面变 形的贡献是 $\frac{1}{2}\rho_1 U^2$). 求解式 (6), 需要首先知道熔池后向 液体流的速度分布 U.

1.2 熔池后向液体流速度的分布函数

高温熔池中存在强烈的流体流动.高速焊时,在熔池 前部,受电弧力、电磁力、表面张力、熔滴冲击力等的作 用,熔池表面产生很大的下凹变形,液体层较薄.与正常 焊接速度的情况相比,一方面,高速焊时,过渡的熔滴撞击 倾斜的熔池前壁,此处液体层较薄,耗散掉的熔滴冲击动 能较少,而很大一部分熔滴冲击动能转化为朝向熔池尾部 的作用力,加快了熔池中液体金属的向后流动;另一方面, 高速焊时,电弧后拖较严重,电弧拖拽力也会加速熔池中 液态金属的后向流动.熔滴撞击熔池前壁,然后和部分母 材金属混合之后加速流向熔池尾部.而在熔池尾部,存在 液态金属积聚,来自熔池前部的液态金属受熔池后壁的阻 力、重力、表面张力等的作用,流体流速逐渐降低,直至为 0.熔池中间部位液体薄层温度降低快,率先凝固,又由于 此时熔池尾部存在较大的表面张力,限制了熔池尾部液态 金属的自由流动,二者共同阻碍熔池尾部液态金属向熔池 前部的回填,因而在熔池尾部出现驼峰.

从理论角度考虑,可以将熔池液态金属的连续性方程、动量方程和热能方程联立求解,获得熔池中的流速分布.由于高速焊接时熔池形状特殊(熔池前部液体层极薄, 尾部液体堆积,熔池表面形状起伏剧烈),这样的联立求 解实际上极其困难.作为系列研究的第一步,首先根据文 献资料和实验观测结果,预先假定熔池后向液体流的速度 分布 U,着重考察其对驼峰焊道的影响规律,无疑具有可 行性.

高速焊实验观测结果表明, 熔池中的后向液体流是液态金属高速流向熔池尾部的主要驱动因素, 因此本文主要考虑流体沿 x 方向的速度 U. 假设固/液界面处流体速度为 0, 在任意熔池横断面上, 微元体流向熔池尾部的速度在熔池中心最大, 沿熔池宽度方向 (y 方向) 呈线性衰减变 化, 如图 1 所示.

高速 GMAW 时, 焊丝中心线较靠近熔池前端 A 点 (如图 2 所示), 为简化计算, 忽略熔池前壁 A-OO' 区域 内的微元速度. 将熔池主体 OO'-B(总长度为 L) 均分为 前后两部分: Γ_1 区和 Γ_2 区. 假设熔池前部 Γ_1 区的液态 金属平均加速度为 a_1 , 熔池尾部 Γ_2 区内液态金属平均加 速度为 a_2 , 则有

$$a_2 = -\frac{(k_{\rm v}V_0)^2 + a_1L}{L} \tag{7}$$

式中, V₀ 为熔滴到达熔池前的速度(本文中设为送丝速度), k_v 是一比例系数(其值与焊接电流、焊接速度、焊丝



图 1 熔池任意横断面的速度分布示意图

Fig.1 Schematic of liquid velocity distribution on any cross section of weld pool



图 2 熔池纵截面示意图 (y=0)

Fig.2 Schematic representation for the longitudinal section of weld pool

端部到工件表面的距离、熔滴过渡方式等有关). k_vV₀ 表 示熔滴冲击弧坑区后剩余的速度. a₁ 的选值与焊接电流有 关,焊接电流越大,电弧力越大, a₁ 值也越大. 焊接电流越 大,电弧下方的液态金属层越薄,液态金属对熔滴速度的 吸收作用越弱,熔滴剩余动能越大. 焊接速度越高,焊丝中 心距 A 点的距离越小,熔滴越集中作用在倾斜且液体层较 薄的熔池前壁^[5],其撞击熔池前壁后剩余的速度也越大.

令 ξ(x) 为工件上表面处固/液界面的函数 (即沿 x 轴不同位置处, 熔池的宽度), 且固/ 液界面上 U=0, x_w 是焊丝中心在轴上的坐标, 则熔池内任一微元体的速度分 布为

$$U(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(k_{\rm v}V_0)^2 + 2a_1(x-x_{\rm w})} \cdot \frac{[\xi(x)-y]}{\xi(x)} \\ & \Gamma_1 \text{ field} \\ \sqrt{(k_{\rm v}V_0)^2 + a_1L + 2a_2(x-\frac{L}{2}-x_{\rm w})} \cdot \\ & \frac{[\xi(x)-y]}{\xi(x)} & \Gamma_2 \text{ field} \end{cases}$$
(8)

在本文采用的高速焊工艺条件下, $a_1=5.0$ m/s², $k_v=0.5$, 根据计算结果, 熔池中金属流的最高速度为 0.473 m/s, 与文献 [12] 结果 (0.5 m/s) 较吻合. 当焊 接速度由 1.5 m/min 提高到 1.8 m/min 时, k_v 由 0.5 增 加到 0.75.

1.3 熔滴热焓的分布

高速 GMAW 过程中, 熔池中存在后向液体流. 随 着液态金属高速向熔池尾部流动, 将大部分熔滴热焓带入 熔池尾部, 因此, 不能再继续认为熔滴热焓主要作用在电 弧下方, 需要考虑熔滴热焓在整个熔池内的分布. 现假 设过热的熔滴热焓作用在整个熔池中. 由于沿熔池长度方 向, 熔池中的液体层厚度并不一致, 熔池前部液体层很薄, 熔池尾部液体层较厚, 假定熔滴热焓在某点的分布深度与 该处液体层的厚度有关. 如图 3 所示, $h_1(x,y)$ 为熔池内 某点的液体层厚度, 该点微元体内熔滴热焓的作用深度为 $K_1h_1(x,y)(K_1$ 为一比例系数, 在本文中 $K_1=0.25$). 则式 (2) 中熔滴热焓分布函数 $S_v(x,y,z^*)$ 可表达为

$$S_{\rm v}(x,y,z^*) = \frac{Q_{\rm d}}{V} \tag{9}$$

式中, Qd 为熔滴带入熔池的热焓量, 其确定方法参见文献







[8,9,13], $V = \iint_{\Omega_l} K_1 h_l(x, y) dx dy$, 是熔滴热焓作用区域的体积.

2 模拟结果与讨论

针对一组高速 GMAW 工艺条件 (焊接电流 350 A,焊接电压 27 V,焊接速度 1.5 m/min,低碳钢板厚 6 mm,板上堆焊),利用上述高速焊接的数学模型,进行了焊接温度场、熔池形状与尺寸和焊道成形的数值模拟及实验验证.

图 4 是起焊后 1.5—1.8 s 时工件上表面温度场的计 算结果.可以看出, t=1.5 s 时 (图 4a),由于液态金属高 速流向熔池尾部,给熔池尾部带来大量的热,熔池被拉长 (熔池长度为 44.2 mm).而熔池中间部位的一部分液态 薄层距离电弧较远,不能直接得到电弧热的作用,温度开 始下降;与熔池尾部相比,该处形成相对低温区 (1790— 1970 K);而熔池尾部因为液体金属堆积,含有大量熔滴 热焓,仍处于高温区 (2475—2800 K).当t=1.6 s 时 (图 4b),熔池中部的液态薄层温度继续下降,与1.5 s 时相比, y方向的宽度 (1790—1970 K 区域)有了明显的减小,并 开始先于熔池尾部凝固.在t=1.7 s 时 (图 4c),熔池中部 的液态薄层已完全凝固,液态金属被分割成前、后两部分, 同时第1个驼峰也完全形成,熔池前部不断扩大而变化为 新的熔池,其尾部开始出现液态金属新的堆积.随着时间 的延长,在t=1.8 s 时 (图 4d),熔池开始新一轮的长大, 第1个驼峰也开始逐渐凝固,第2个驼峰开始形成.计算 得出的这个过程与实验观测结果 ^[11]吻合.而在t=1.7 s 时,新形成的熔池温度较高 (在 2475—2800 K 之间),其 原因是,新熔池中仍存在高速流向熔池尾部的金属流,将







- (a) t=1.5 s, tail part (the left) of the pool is at high temperature zone
- (b) $t{=}1.6$ s, middle part of the pool begins to solidify
- (c) $t{=}1.7$ s, middle part solidified and the first humping formed
- (d) t=1.8 s, the first humping solidified and the second humping appeared

大量熔滴热焓带入熔池尾部,同时熔滴热焓分布模型又假 设为分布在上表面附近 (图 3),从而导致在形成新熔池的 初始阶段,上表面熔池温度较高.

图 5 是不同时刻熔池中心纵截面轮廓线. 1.5 s 时 (图 5a),由于流向熔池尾部的高速金属流的作用,使熔池 中部 (*x* 坐标 65—75 mm) 出现液态薄层, 熔池尾部出现 金属堆积, 隆起高度为 5.0 mm. 同时, 这部分液态薄层 由于离电弧中心较远, 接受的热量小于损失的热量, 开始 凝固. 在 1.6 s 时 (图 5b), 一部分液态薄层已经凝固. 到 1.7 s 时 (图 5c), 液态熔池分成明显的 2 部分, 其中在 *x*



图 5 焊缝纵截面熔池动态演变图

Fig.5 Shape evolution of longitudinal section of the pool corresponding to Fig.4 (a) t=1.5 s (b) t=1.6 s (c) t=1.7 s (d) t=1.8 s





Fig.6 3D maps of weld bead at different times (weld speed 1.5 m/min)
(a) t=2.4 s, the second humping is forming and the surface deformed obviously
(b) t=3.2 s, the third humping is forming

坐标 50—65 mm 处的液态金属慢慢凝固,形成驼峰; x 坐标 70—95 mm 处 1 个新的驼峰即将形成. 1.8 s 时 (图 5d),该驼峰明显形成. 图 6 是 2.4 和 3.2 s 时工件上表面 形成的焊道. 从图中可以看出, t=2.4 s 时 (图 6a),第 2 个驼峰正在形成中,熔池表面变形比较严重;到 t=3.2 s 时 (图 6b),第 2 个驼峰也已完全形成,并开始形成第 3 个驼峰,重复了图 4 与图 5 的过程. 但形成的第 2 个驼峰 的高度小于第 1 个驼峰高度,其原因是,起弧阶段,熔池还 未形成前,已有大量填丝金属堆积到工件上,造成第 1 个 驼峰高度偏大.

图 7 是焊缝成形的实验结果. 测量出驼峰焊道上"波 峰"和"波谷"的高度、相邻 2 个驼峰的间距以及焊缝的 熔深、熔宽等数据,并与模型给出的数值分析结果相比较, 如表 1 所示. 可见,采用本文模型得出的计算结果与实验 结果基本吻合,但驼峰高度的数据仍有差异. 造成这一差 异的原因可能是,驼峰焊道模型中没有考虑咬边缺陷,实 际上驼峰与咬边同时出现;由于存在咬边,使熔池尾部堆 积的部分金属进一步向焊缝中心集中,从而造成驼峰和波 谷高度差值较大. 另外,作为系列研究的第一步,本文模 型首先模拟驼峰焊道的产生过程,还不能解释驼峰表面上 出现微小凹坑的原因.

为了进一步验证此模型,计算了另一工艺条件下的 焊道成形情况 (其它焊接参数同前,焊接速度提高到 1.8 m/min),结果如图 8—10 所示.可以看出,在其它 焊接参数不变的情况下,提高焊接速度 (1.8 m/min),引 起线能量降低,从而使焊缝宽度和熔深减小;同时由于焊 接速度的提高, 熔滴过渡时更加集中地滴落在倾斜且液体 层较薄的熔池前壁上, 改变方向后与熔池金属一起流向熔 池尾部. 此时, 熔滴冲击熔池前壁后剩余的速度增加, 提 高了流向熔池尾部的金属流速度, 与之对应的 ¹/₂ρ₁U² 动能 项也相应增大, 从而使熔池受到更大的高速金属流力, 驼 峰更容易形成, 使驼峰间距减小. 表 2 比较了焊接速度分 别为 1.5 和 1.8 m/min 时的计算结果. 由表可知, 各项数 值符合焊接速度提高时驼峰焊道的变化规律.



图 7 高速焊的驼峰焊道

Fig.7 Humping bead formed on a low carbon steel sample after high speed GMAW (welding current 350 A, weld speed 1.5 m/min)

表1 计算与实验结果的比较

Table 1Comparison of measured and predicted data for the
same weld parameters (weld current 350 A, weld
voltage 27 V, weld speed 1.5 m/min)

					(mm)
Reference	Weld	Weld	Hump	Valley	Spacing
	width	penetration	height	height	of hump
Measured	8.5	4.0	5.0	1.7	33.0
Predicted	9.6	3.8	4.5	0.2	27.1



图 8 工件上表面温度场动态演变过程

Fig.8 Evolution of temperature profiles on top surface (weld speed 1.8 m/min, other conditions to be the same as in Fig.4)

(a) t=1.9 s (b) t=2.0 s (c) t=2.1 s



Fig.9 Shape evolution of longitudinal section of the pool corresponding to Fig.8 (a) t=1.9 s (b) t=2.0 s (c) t=2.1 s



图 10 焊道三维图 Fig.10 3D map of weld bead (weld speed 1.8 m/min, t=2.8 s)

表 2 不同焊接速度时驼峰焊道尺寸计算结果的对比 Table 2 Comparison of predicted humping bead dimensions at different weld speeds

					(mm)
Welding	Weld	Weld	Hump	Valley	Spacing
speed	width	penetration	height	height	of hump
$1.5 \mathrm{~m/min}$	9.6	3.8	4.5	0.2	27.1
$1.8 \mathrm{~m/min}$	9.0	3.0	3.3	-0.4	21.5

3 结论

(1)根据高速 GMAW 过程的特点,综合考虑熔池后向液体流的作用,熔池表面变形方程中增加后向液体流的动能项,并将熔滴热焓分布于整个熔池,建立了符合高速GMAW工艺特点的焊接温度场和熔池数值分析模型.

(2)利用建立的模型,计算了一组焊接工艺条件下 (焊接速度为 1.5 m/min)的驼峰焊道形成过程以及焊道 宽度、熔深、驼峰/波谷高度、驼峰间距等,并与实验值进 行了比较,两者基本吻合,证明所建立的模型较好地反映 了高速 GMAW 过程的特点.

(3)分析了另一组焊接工艺条件下(焊接速度提高到 1.8 m/min)的焊缝成形,将焊道宽度、熔深、驼峰间距等 数据与焊接速度 1.5 m/min 时的情况做了比较,其结果 符合焊接速度提高时驼峰焊道的变化规律,为进一步定量 分析高速 GMAW 驼峰缺陷成形机理奠定了基础.

参考文献

- Ueyama T, Ohnawa T, Yamazaki K, Tanaka M, Ushio M, Nakata K. Trans JWRI, 2005; 34: 11
- [2] Bradstreet B J. Weld J, 1968; 47: 314
- [3] Gratzke U, Kapadia P D, Dowden J, Kroos J, Simon G. J Phys, 1992; 25D: 1640
- [4] Mendez P F, Eager T W. Weld J, 2003; 82: 296
- [5] Nguyen T C, Weckman D C, Johnson D A. Sci Technol Weld Join, 2005; 10: 447
- [6] Hu Z K, Wu C S. Acta Metall Sin, 2008; 44: 119
 (胡志坤, 武传松. 金属学报, 2008; 44: 119)
- [7] Hu Z K, Wu C S. Chin Weld, 2008; 17(2): 15
- [8] Wu C S. Welding Thermal Processes and Weld Pool Behaviors. Beijing: Machinery Press, 2008: 110
 (武传松. 焊接热过程与熔池形态. 北京: 机械工业出版社, 2008: 110)
- [9] Wu C S, Dorn L. Acta Metall Sin, 1997; 33: 774
 (武传松, Dorn L. 金属学报, 1997; 33: 774)
- [10] Wu C S, Chen J, Zhang Y M. Comput Mater Sci, 2007; 39: 635
- [11] Jost J, Li–Jost X. Calculus of Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1998: 20
- [12] Cho M H. PhD Thesis. Ohio State University, Columbus, USA, 2006: 79
- [13] Cao Z N, Dong P. Trans ASME, 1998; 120H: 313