基于分形分布的投资组合选择理论研究

周洪涛　　费　奇

(华中科技大学系统工程研究所,湖北　武汉　430074)

摘　要　首先介绍了 Markowitz 的均值 - 方差模型,并分析了该模型的不足之处。在此基础上讨论了基于分形分布的投资组合选择问题。最后指出了求解分形投资组合选择问题的难点,并提出了今后研究的方向。

关键词　Markowitz 模型　分形(稳定)分布　投资组合选择

中图分类号　F830.59　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1001 - 7348(2003)03 - 114 - 02

0　引言

Markowitz 的投资组合选择方法涉及到的基本假设是投资者从本质上来说都是回避风险的。这一根本的假定意味着投资者若接受高风险的话,则必定要有高回报率来补偿。在回避风险的假设下,Markowitz 建立了投资组合选择的模型。该研究成果引发了大量的对现代证券组合的分析工作,开创了现代金融数学的先河,在理论界被称为 20 世纪发生在华尔街的第 1 次金融革命。经过众多学者的大量研究,发现该模型仍然有不足之处。首先,它假设 ri(第 i 种有价证券的持有期的收益率)服从正态分布,并不考虑偏分布问题,而多数统计数据表明 ri 并不一定服从正态分布。因此,当两项投资的平均收益与方差都相等时,Markowitz 风险测度就难以区分投资的优劣了。其次,模型计算困难。用 r_i 的方差作为第 i 种证券的风险测度,就不得不计算 $N(N+1)/2$ 个 σ_{ij},并在计算出 $\Omega=(\sigma_{ij})_{N\times N}$ 后,要解决由其组成的协方差阵为目标函数的二次规划问题。

1　资本市场收益率的非正态性研究

在 EMH(有效市场假说)成立的前提下,资本市场的精确度量成为可能,各种理论模型应运而生。从 Markowitz 的现代资产组合理论,到 Sharpe、Lintner 和 Mossin 等人的资产均衡定价理论(CAMP)以及后来的 Black-Scholes 的期权定价模型和 Ross 的套利定价理论等,均是在 EMH 基础上发展起来或与之密切相关。

在有效市场假说完全形成以前,人们就已经发现不符合正态性假设的例子。当 Osborne 在 1964 年标绘股票市场收益率的密度函数,并把这些收益率标为“近似正态”时,就明显出现了一个异常情况:在分布的尾部有过多的观测值,这是一个被统计学家称为“峰态”的情况。Osborne 注意到了密度函数形态尾部比本来应有的形状要肥胖,但没有看到其重要性;Cootner 在 1964 年主编的经典文集《股票市场价格的随机性》发表后,一般人都接受了价格变化的分布形状具有肥胖的尾部这一事实,但对正态性形状的偏离含义却没有给出定论;Mandelbrot 在 1964 年提出了收益率可能属于“稳定帕累托”分布一族,这种分布具有无定义的或无限的方差,它严重动摇了股票市场收益率或价格变化的近似正态分布假说;Fama 在 1965 年完整研究了股票日收益率,发现收益率是负斜的,其左边的尾部比右边的尾部有更多的观测值。此外,其尾部比正态分布预言的更胖,围绕均值的峰部比正态分布预言的更高,这种情况被称为“尖峰态”。Sharpe 在教科书《资产组合理论和资本市场》中也注意到这一点;Turner 和 Weigel 在 1990 年对 1928 ~ 1990 年的 S&P 指数的收益率进行了研究,他们发现与正态分布相比较,S&P 的日收益率分布是负斜的,在均值附近有更大的收益率频数。以上研究都表明了资本市场的收益率存在正态分布假说和 EMH 的失灵。

2　分形(稳定帕累托)分布

Levy 分布是稳定分布。Levy 假设如果对所有的 b_1,$b_2>0$,存在 $b>0$,且 $F(x/b_1)F(x/b_2)=F(x/b)$ 成立,则分布函数 $F(x)$ 是稳定的。

对于所有的分布函数来说,相关性是存在的。$F(x)$ 是稳定分布族的一般性质,而不是任何一个分布的特性。

$F(x)$ 的特征函数能用一个相似方式来表述:$f(b_1\times t)f(b_2\times t)=f(b\times t)$。因此,尽管 $f(b_1\times t)$,$f(b_2\times t)$ 和 $f(b\times t)$ 是互相的产物,但它们都具有相同的有形分布,这就是稳定性。

Levy 推广了概率分布的特征函数,形成了以下对数形式:

$$\log(f(t)) = i\delta t - \gamma|t|^{\alpha}[1 + i\beta(t/|t|)\tan(\alpha\pi/2)] \quad (1)$$

这个稳定分布有 4 个参数:α、β、δ 和

作者简介:周洪涛(1969 ~),华中科技大学,博士研究生,主要研究方向为资本市场非线性复杂性与智能优化、智能决策技术;费奇(1939 ~),博导,华中科技大学系统工程研究所所长,主要研究方向为智能决策支持系统、系统分析与综合集成。

收稿日期:2002 - 07 - 30

γ。δ 是均值的位置参数，γ 是可能调整的标度参数，β 是偏斜度的度量，其取值范围为从 -1 到 +1。当 $\beta=0$ 时，分布是对称的。当 $\beta=+1$ 时，分布是右胖尾的，或向右倾斜的，右倾斜的程度随 β 趋向 +1 而增加；当 $\beta<0$ 时，出现的情况相反。α 既度量分布的尖峰程度，又度量分布的胖尾程度。α 的取值范围从 0 到 2，包括 0 和 2。只有当 $\alpha=2$ 时，分布才等价于正态分布。分形市场假说认为，可以在 1 和 2 之间取值。可以说，正态分布是分形分布族的一个特例。当 α 不等于 2 时，分形的特性就会发生变化。

3 基于分形分布的投资组合选择模型

在以上的讨论中，我们可以看到分形分布能代替正态分布正确地描述资本市场的收益率，而正态分布只是分形分布的一个特例。但是，如果使用分形分布来替代正态分布，那么会存在两个问题：方差和相关协方差。显而易见的问题是怎样处理方差。在均值 - 方差环境中，方差是对一个股票或一个投资组合的风险的测量，分形分布没有一个优化的方差。对于这个问题，我们可以使用离差来测量风险，而一个更困难的问题是怎样处理相关系数。在稳定分布家族中，还没有一个可比较的概念。因此，在分形分布假设的情况下，有价证券之间的相关性的缺乏使传统的均值 - 方差最优化无法实施。但是，Sharpe 的单因数模型此时却是可以适用的。单因数模型可以用下面的方式来表达：

$$Ri = ai + biI + di \qquad (2)$$

其中 bi 代表股票 i 对指数 I 的敏感性；a_i 代表非指数股票收益；di 代表白噪声。

回归分析关于指数收益的股票收益可以发现这些参数的几何意义。其中，斜率是 b，载距是 a。在分形分布的情况下，指数收益的分布 I 和股票收益 R 可能被假设为带相同特征指数的分形分布。那么，投资组合风险 C_P 就可以表示如下：

$$c_p = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\alpha} c_{d_i} + b_p^{\alpha} c_I \qquad (3)$$

其中：xi 是股票 i 的权重；C_P 是投资组合的离差参数；C_{di} 是 di 的离差参数；CI 是指数 I 的离差参数；$b_p=\sum_{i=1}^{N} x_i \times b_i$ 是投资收益对 I 的敏感性。

对于正态分布，$\alpha=2.0$，且对于已知 $j=p, d_i, I$，则有 $c_j=\sigma^2_j/2$。但是，对于其他的情况，计算却是十分复杂。公式(3)的一个结果是原始市场模型的多样化效果被保留。资产的数目没有直接减少市场风险，但它减少了单个股票的非市场风险 d。如果我们采取所有 $x_i=1/N$ 的简单情形，则公式(3)就变为：

$$c_p^{\alpha} = (1/N)^{\alpha} \times \sum_{i=1}^{N} c_i^{\alpha} \qquad (4)$$

只要 $\alpha>1$，当资产的数目 N 增加时，偏差风险 C_P 就减少。有趣的是，如果 $\alpha=I$，则没有多样化效果被保留；如果 $\alpha<1$，增加投资组合的大小就会增加非市场风险。

Fama 和 Miller 使用了下面的例子：假设对于在投资组合中的所有股票 $C^{\alpha}_i=1$ 和 $x_i=1/N$，即所有股票具有等权重的风险值为 1 的风险，则公式(4)就变为：

$$C^{\alpha}_i = N^{1-\alpha} \qquad (5)$$

对于不同的 α 和 N，使用公式(5)，可以显示多样化效果。对于 $\alpha<1$，多样化减少组合的非市场风险。随着减少 α，多样化率也减少，直到 $\alpha=1$ 时，多样化与一个组合无关。当 $\alpha=1$ 时，中心极限定理不会有应用价值。对于 $\alpha>1$ 时，则相反。

另外，市场暴露风险是与多样化无关的，它是投资组合中的单个证券的 b 的权重平均。因此，就象在传统市场模型中一样，多样化减少非市场风险，而不是市场风险。假设一个足够大的组合，我们可以得到：以上描述的与市场组合相关的多样化效果将是相当稳定的。因此，优化一个与市场指数相关的组合将比一个光滑的均值 - 方差最优化更加稳定。

4 结束语

通过以上的分析，我们可以知道基于分形分布的投资组合选择理论要比标准高斯分布的情况复杂得多，但是我们现在有令人信服的证据证明资本市场并不是服从高斯分布的，而是服从分形分布的。所以，研究基于分形分布的投资组合选择模型是有意义的，但对于该模型的求解却是困难的，其主要困难在于 α 值的确定。可以说从传统 CMT 向基于分形分布的理论变化是合理的，这将是今后投资组合理论研究的热点，值得引起我们的关注。

参考文献

1 Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of INVESTMENTS. Basil Blackwell. 1991

2 小詹姆斯 L. 法雷尔，沃尔特 J. 雷哈特. 投资组合管理理论及应用 [M]. 寅峰等译. 北京：机械工业出版社，2001

3 埃德加·E·彼得斯. 资本市场的混沌与秩序 [M]. 王小东译. 北京：经济科学出版社，1999

4 Edgar Peters. Fractal Market Analysis. John Wiley & Sons, 1994

5 Benoit B. Mandelbrot. Fractals and Scaling in Finance. New York Springer, 1997

(责任编辑 高建平)

Research on Portfolio Selection Model Based on Fractal Distribution

Abstract: The paper introduces the mean – variance model of Markowitz, and analyses its drawbacks. Then, on the basis of this, We discuss portfolio selection problem based on fractal distribution. Finally, we point out some difficulties for solving fractal portfolio problem, and put forward the directions of research on fractal portfolio selection theory in the future.

Key words: Markowitz model, Fractal distribution, Portfolio selection