中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 1045～1053
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的整体维数

王艳华

上海财经大学应用数学系, 上海 200433
E-mail: yhw@mail.shufe.edu.cn

收稿日期: 2007-08-01; 接受日期: 2009-01-08
国家自然科学基金 (批准号: 10726039) 和上海财经大学 "211 工程" 二期重点学科建设资助项目

摘要 本文证明了 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的整体维数等于它的平凡模 k 的投射维数.

关键词 Hopf 代数 Yetter-Drinfel'd 模 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数 投射维数 整体维数

MSC(2000) 主题分类 **16W30, 16E10**

1 引言

Yetter-Drinfel'd 模是由 Yetter 在文献 [1] 中引入的, 命名为 "crossed bimodules", 后来被称为 Yetter-Drinfel'd 模. 设 H 是 Hopf 代数, V 是域 k 上的线性空间, 如果 V 是 H 上的左 H-模, 左 H-余模, 并且左 H-模和左 H-余模之间满足一定的相容关系, 则称 V 是 H 上的左-左 Yetter-Drinfel'd 模. H 上的左-左 Yetter-Drinfel'd 模范畴记为 ${}_H^H\mathcal{YD}$. 类似地, 可以得到左-右 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}_H\mathcal{YD}^H$, 右-右 Yetter-Drinfel'd 模范畴 $\mathcal{YD}_H^H$, 右-左 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}^H\mathcal{YD}_H$.

设 H 是 Hopf 代数, 换句话说 H 上的 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数是指在 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的 Hopf 代数. 显然, Yetter-Drinfel'd Hopf 代数是 Hopf 代数的自然推广. 实际上, 我们见过许多 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的例子, 例如李立彬和章璞教授在文献 [2] 中引入的 twisted Hopf algebra 就是 ${}_{kZ}^{kZ}\mathcal{YD}$ 中的 Hopf 代数; 文献 [3, p. 206, 10.5.11] 中的 (G,χ)-Hopf 代数也是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数. Radford[4] 证明了 pointed Hopf 代数可以分解成两个因子的张量, 其中一因子就是另一个因子上的 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数. Radford 的这一理论对 Yetter-Drinfeld Hopf 代数的发展起到了重要的促进作用. 在 Radford 的分解之后, Hopf 代数的研究取得了重要的进展. 例如 Doi 在文献 [5] 中研究了 Yetter-Drinfel'd 范畴中的 Hopf 模. Schauenburg 证明了 Yetter-Drinfel'd 模范畴等价于 Drinfel'd double 上的左模范畴, 也等价于 Hopf 双模范畴 (参见文献 [6]). Sommerhäuser 对素阶群上的 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数做了一些研究 (参见文献 [7]).

Lorenz-Lorenz[8] 证明了 Hopf 代数的整体维数等于其上平凡模 k 的投射维数. 鉴于 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数是一类比 Hopf 代数更广义的代数, 自然考虑到: Yetter-Drinfeld

引用格式: 王艳华. Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的整体维数. 中国科学 A, 2009, 39(8): 1045–1053
Wang Y H. On global dimension of Yetter-Drinfel'd Hopf algebras. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0057-z

Hopf 代数的整体维数是否等于其上平凡模 k 的投射维数? 本文回答了上述问题. 具体地说, 在本文的第二节, 我们给出了验证一个映射是 Yetter-Drinfeld Hopf 代数的对极的条件，既只要在这个代数的生成子上验证即可. 在第三节中, 如果 H 是一个 Hopf 代数, A 是 H 上的 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, M 是 H 上的 Yetter-Drinfel'd 模, 我们给出了 $M\otimes A$ 上的 A-Hopf 模结构, 我们这里得到的 Hopf 模结构比 Doi 在文献 [5] 中给出的更自然, 因为我们这里给的结构用到了辫子作用. 在最后一部分中, 我们给出了 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的投射维数和整体维数的定义, 从而证明了 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的整体维数等于它的平凡模 k 的投射维数.

本文中, 我们总假设 k 是域, 所有的代数、余代数和张量积都是 k 上的. 本文中出现的其它符号参见文献 [7, 9].

2 预备知识

首先我们回顾与 YetterDrinfel'd Hopf 代数相关的几个定义. 设 $(A,\ m,\ u)$ 是代数, 其乘法记为 $m:\ A\otimes A\longrightarrow A: a\otimes b\longmapsto ab$. 设 V 是 k-向量空间, 如果存在 k-线性映射 $A\otimes V\longrightarrow V$ 满足

$$(ab)\rightarrow v=a\rightarrow(b\rightarrow v),\quad 1\rightarrow v=v,$$

则称 V 是一个左 A-模. 我们用 “$\rightarrow$” 表示左模作用, 左 A-模范畴记为 ${}_A\mathcal{M}$.

设 $(C,\ \triangle,\ \epsilon)$ 是余代数, 其余乘法为 $\triangle: C\longrightarrow C\otimes C: c\longmapsto\sum c_1\otimes c_2$. 设 V 是 k-向量空间, 如果存在 k-线性映射 $\rho:\ V\longrightarrow C\otimes V: v\longrightarrow\sum v^{-1}\otimes v^0$ 满足

$$\sum v^{-2}\otimes v^{-1}\otimes v^0=\sum v^{-1}\otimes(v^0)^{-1}\otimes(v^0)^0,\quad \sum\epsilon(v^{-1})v^0=v,$$

则称 V 是一个右 C-余模, 右 C-余模范畴记为 ${}^C\mathcal{M}$.

有了模和余模的定义, 下面我们回顾一下 Yetter-Drinfel'd 模的定义. 设 $(H,m,u,\triangle,\epsilon,S)$ 是 Hopf 代数, S 是其对极, V 是 k-向量空间, 如果 V 既是左 H-模又是左 H-余模, 并且 V 的左 H-模和左 H-余模结构满足如下的相容关系:

$$\sum(h\rightarrow v)^{-1}\otimes(h\rightarrow v)^0=\sum h_1v^{-1}Sh_3\otimes h_2\rightarrow v^0,\tag{1}$$

则称 V 是 Hopf 代数 H 上的 Yetter-Drinfel'd 模. Hopf 代数 H 上的左 Yetter-Drinfel'd 模范畴记为 ${}_H^H\mathcal{YD}$.

如果 V 和 W 都是 Yetter-Drinfel'd 模, 定义

$$h\rightarrow(v\otimes w)=\sum h_1\rightarrow v\otimes h_2\rightarrow w,\tag{2}$$

$$\rho(v\otimes w)=\sum v^{-1}w^{-1}\otimes v^0w^0,\tag{3}$$

容易验证 $V\otimes W$ 也是 Yetter-Drinfel'd 模. 另外, 如果定义域 k 的模结构为 $h\rightarrow k=\epsilon(h)k$, 余模结构为 $\rho(k)=1\otimes k$, 那么 k 就是一个 Yetter-Drinfel'd 模. 由此 Yetter-Drinfel'd 模可以构成一个 monomidal 范畴, 这个范畴是一个预辫子 (pre-braiding) 范畴, 其中它的预辫子 (pre-braiding) 为

$$\tau_{V,W}:\ V\otimes W\longrightarrow W\otimes V,\quad v\otimes w\longmapsto\sum(v^{-1}\rightarrow w)\otimes v^0.$$

如果 Hopf 代数 H 的对极 S 是一个双射, 记 $\bar{S}$ 为 S 的逆映射, 那么 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 就是一个辫子范

畴, 其上的辫子仍记为 $\tau_{V,W}$, 则 $\tau_{V,W}$ 的逆为:

$$\tau_{V,\ W}^{-1}: W \otimes V \longrightarrow V \otimes W, \quad w \otimes v \longmapsto \sum v^0 \otimes \bar{S}(v^{-1}) \rightharpoonup w.$$

设 H 是 Hopf 代数, 如果 A 既是 k-代数, 又是 k-余代数, 并且下面的条件 (a1)–(a6) 都成立, 我们称 A 是 H 上的 Yetter-Drinfeld Hopf 代数 (或 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的 Hopf 代数),

(a1) A 是左 H-模代数, 即:

$$h \rightharpoonup (ab) = \sum (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup b), \quad h \rightharpoonup 1_A = \epsilon(h)1_A. \tag{4}$$

(a2) A 是左 H-余模代数, 即:

$$\rho(ab) = \sum (ab)^{-1} \otimes (ab)^0 = \sum a^{-1}b^{-1} \otimes a^0 b^0, \tag{5}$$
$$\rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A.$$

(a3) A 是左 H-模余代数, 即:

$$\triangle(h \rightharpoonup a) = \sum (h_1 \rightharpoonup a_1) \otimes (h_2 \rightharpoonup a_2), \quad \epsilon(h \rightharpoonup a) = \epsilon_H(h)\epsilon_A(a). \tag{6}$$

(a4) A 是左 H-余模余代数, 即:

$$\sum a^{-1} \otimes (a^0)_1 \otimes (a^0)_2 = \sum {a_1}^{-1}{a_2}^{-1} \otimes {a_1}^0 \otimes {a_2}^0, \tag{7}$$
$$\sum a^{-1}\epsilon_A(a^0) = \epsilon_A(a)1_H.$$

(a5) $\triangle$, ϵ 都是 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的代数映射, 即:

$$\triangle(ab) = \sum a_1({a_2}^{-1} \rightharpoonup b_1) \otimes {a_2}^0 b_2, \tag{8}$$
$$\triangle(1) = 1 \otimes 1, \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b), \quad \epsilon(1_A) = 1_k.$$

(a6) 存在 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的 k-线性映射 $S: A \longrightarrow A$ 满足 $S * \mathrm{id} = u\epsilon = \mathrm{id} * S$.

如果上面的 (a1)–(a5) 成立, 我们称 A 是一个 Yetter-Drinfel'd 双代数 (或 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的双代数).

注意到当辫子是平凡的换位作用 (即 $\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$) 时, Yetter-Drinfel'd Hopf 代数 (双代数) 就是平凡的 Hopf 代数 (双代数), 具体细节参见文献 [7, p. 8]. 由于 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数要满足上面定义的条件 (a5), 所以通常情况下 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数不是 Hopf 代数.

如果 A, B 是 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的双代数 (Hopf 代数), 我们可以给出它们的张量积代数和张量积余代数:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = \sum a(b^{-1} \rightharpoonup c) \otimes b^0 d, \tag{9}$$
$$\triangle(a \otimes b) = \sum a_1 \otimes {a_2}^{-1} \rightharpoonup b_1 \otimes {a_2}^0 \otimes b_2. \tag{10}$$

由文献 [7, p. 11] 或文献 [10, 第 4 节] 知, $A \otimes B$ 不再是 Yetter-Drinfeld 范畴中的双代数 (Hopf 代数). Doi 证明了 $A \otimes B$ 是 Yetter-Drinfeld 范畴中的双代数 (Hopf 代数) 当且仅当 $\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$.

众所周知, Hopf 代数的对极是一个反代数和反余代数映射, 这一性质对于 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数仍然成立. 下面的引理就说明了这点.

引理 2.1 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, $S: A \longrightarrow A$ 是其对极, 则 S 是反代数和反余代数映射, 即 S 满足

$$S(ab) = \sum (a^{-1} \rightharpoonup S(b))S(a^0), \quad S(1) = 1 \tag{11}$$

$$\triangle S(a)=\sum a_1^{-1}\rightarrow S(a_2)\otimes S({a_1}^0),\quad (\epsilon S)(a)=\epsilon(a), \tag{12}$$

其中 $\forall a,\ b\in A$.

证明 若 S 是反代数自同构, 则应有 $Sm=m(s\otimes s)\tau$ 与 $s(1)=1$ 成立. 我们参考 Sweedler 在文献 [11, p. 74] 中的证明方法.

首先考虑映射 $Sm:\ A\otimes A\longrightarrow A, a\otimes b\longmapsto S(ab)$ 和 $m(s\otimes s)\tau:\ A\otimes A\longrightarrow A, a\otimes b\longmapsto (a^{-1}\rightarrow S(b))S(a^0)$. 我们仅需要证明 $Sm(a\otimes b)=m(s\otimes s)\tau(a\otimes b)$ 成立即可.

一方面, 由于

$$\begin{aligned}(Sm*m)(a\otimes b)&=m(Sm\otimes m)\triangle(a\otimes b)\\&=m(Sm\otimes m)\Big(\sum a_1\otimes {a_2}^{-1}\rightarrow b_1\otimes {a_2}^0\otimes b_2\Big)\quad \text{由 (8)}\\&=S\Big(\sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow b_1)\Big){a_2}^0b_2\\&=\sum S((ab)_1)(ab)_2\quad \text{由 (6)}\\&=u\epsilon(a\otimes b),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}[m*(m(S\otimes S)\tau)](a\otimes b)&=m[m\otimes(m(S\otimes S)\tau)]\triangle(a\otimes b)\\&=m[m\otimes(m(S\otimes S)\tau)]\Big(\sum a_1\otimes {a_2}^{-1}\rightarrow b_1\otimes {a_2}^0\otimes b_2\Big)\quad \text{由 (8)}\\&=m\sum[a_1({a_2}^{-1}\rightarrow b_1)\otimes m(S\otimes S)\tau({a_2}^0\otimes b_2)]\\&=m\sum[a_1({a_2}^{-2}\rightarrow b_1)\otimes m(S\otimes S)({a_2}^{-1}\rightarrow b_2\otimes {a_2}^0)]\\&=m\sum[a_1({a_2}^{-2}\rightarrow b_1)\otimes({a_2}^{-1}\rightarrow S(b_2))S({a_2}^0)]\\&=\sum a_1({a_2}^{-2}\rightarrow b_1)({a_2}^{-1}\rightarrow S(b_2))S({a_2}^0)\\&=\sum a_1[{a_2}^{-1}\rightarrow(b_1S(b_2))]S({a_2}^0)\quad \text{由 (2)}\\&=\sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow\epsilon(b))S({a_2}^0)\\&=\sum a_1\epsilon({a_2}^{-1})u\epsilon(b)S({a_2}^0)=\sum u\epsilon(b)a_1S(a_2)\\&=u\epsilon(b)u\epsilon(a)=u\epsilon(a\otimes b),\end{aligned}$$

我们得到 $Sm*m=m*(m(s\otimes s)\tau)=u\epsilon$. 因此 $Sm=m(s\otimes s)\tau$. 另外由于 $\epsilon(1)=1$, 而且 $\triangle(1)=1\otimes 1$, 则有 $(S*\mathrm{id})(1)=S(1)1=u\epsilon(1)=1$. 因此 $S(1)=1$.

要证明 S 是反余代数自同构, 仅需证明 $\triangle S=(S\otimes S)\tau\triangle$ 与 $\epsilon S=\epsilon$ 成立即可.

因为

$$\begin{aligned}(\triangle*\triangle S)(a)&=m_{A\otimes A}(\triangle\otimes\triangle S)\triangle(a)\\&=m_{A\otimes A}(\triangle\otimes\triangle S)\Big(\sum a_1\otimes a_2\Big)\\&=m_{A\otimes A}\Big(\sum a_1\otimes a_2\otimes S(a_3)_1\otimes S(a_3)_2\Big)\\&=\sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow S(a_3)_1)\otimes {a_2}^0S(a_3)_2\\&=\triangle\Big(\sum a_1S(a_2)\Big)=\triangle(\epsilon(a))\end{aligned}$$

$$= \epsilon(a)(1 \otimes 1) = u_{A\otimes A}\epsilon(a).$$

和

$$\begin{aligned}((S\otimes S)\tau\triangle * \triangle)(a) &= m_{A\otimes A}((S\otimes S)\tau\triangle \otimes \triangle)\triangle(a)\\ &= m_{A\otimes A}\Big(\sum (S\otimes S)\tau\triangle(a_1)\otimes\triangle(a_2)\Big)\\ &= m_{A\otimes A}\Big(\sum (S\otimes S)({a_1}^{-1}\rightarrow a_2\otimes {a_1}^0)\otimes a_3\otimes a_4\Big)\\ &= m_{A\otimes A}\Big(\sum {a_1}^{-1}\rightarrow S(a_2)\otimes S(a_1)^0\otimes a_3\otimes a_4\Big)\\ &= \sum ({a_1}^{-2}\rightarrow S(a_2))({a_1}^{-1}\rightarrow a_3)\otimes S({a_1}^0)a_4 \quad 由 (7)\\ &= \sum ({a_1}^{-1}\rightarrow (S(a_2)a_3))\otimes S({a_1}^0)a_4\\ &= \sum ({a_1}^{-1}\rightarrow \epsilon(a_2))\otimes S({a_1}^0)a_3\\ &= \sum \epsilon(a_2)\otimes \epsilon({a_1}^{-1})S({a_1}^0)a_3\\ &= \sum \epsilon(a_2)\otimes S(a_1)a_3 = \sum 1\otimes S(a_1)a_2\\ &= \epsilon(a)(1\otimes 1) = u_{A\otimes A}\epsilon(a).\end{aligned}$$

由 $\epsilon(S*\mathrm{id})(a) = \epsilon(u\epsilon(a)) = \epsilon(a)$, 我们得到 $\epsilon S = \epsilon$. 这样我们就证明了 S 是反余代数自同构.

一般来说, 给定一个映射 $S\colon A \longrightarrow A$, 我们很难直接证明它是一个 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的对极. 但是如果我们能验证这个映射在 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的生成子上满足对极的条件 (a6), 那么这个映射就是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的对极. 概括以上结论, 则有如下定理.

定理 2.2 设 A 是 Yetter-Drinfel'd 双代数, $S\colon\ A \longrightarrow A$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个反代数自同构. 假设 A 的子集 X 生成 A, 并且 $(S*\mathrm{id})(a) = u\epsilon(a) = (\mathrm{id}*S)(a)$, 其中 $a\in X$, 则 S 就是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数 A 的对极.

证明 对任意的 $a,\ b\in X$, 如果我们能证明 $(\mathrm{id}*S)(a) = u\epsilon(a)$ 和 $(S*\mathrm{id})(b) = u\epsilon(b)$ 成立, 则可以得到 $(\mathrm{id}*S)(ab) = u\epsilon(ab) = (S*\mathrm{id})(ab)$.

因为 $\triangle(ab) = \sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow b_1)\otimes {a_2}^0 b_2$, 这样我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}*S)(ab) &= \sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow b_1)S({a_2}^0 b_2) \quad 由 (6)\\ &= \sum a_1({a_2}^{-2}\rightarrow b_1)({a_2}^{-1}\rightarrow S(b_2))S({a_2}^0) \quad 由 (9)\\ &= \sum a_1({a_2}^{-1}\rightarrow (b_1S(b_2)))S({a_2}^0) \quad 由 (2)\\ &= \sum a_1S(a_2)u\epsilon(b) \quad 由 (2)\\ &= u\epsilon(a)u\epsilon(b) = u\epsilon(ab).\end{aligned}$$

相似地, 我们可以证明 $(S*\mathrm{id})(ab) = u\epsilon(ab)$.

3 Yetter-Drinfeld 模范畴中的 Hopf 模

本节中我们采用以下符号:

右 A-余模映射: $\rho_M: M \longrightarrow M\otimes A: m \longrightarrow \sum m_0\otimes m_1$;

右 A-模映射: $M\otimes A \longrightarrow M: m\otimes a \longmapsto ma$;

左 H-余模映射: $\varrho_M: M \longrightarrow H\otimes M,\ m \longmapsto \sum m^{-1}\otimes m^0$;

左 H-模映射: $H\otimes M\longrightarrow M:\ h\otimes m\longmapsto h\rightarrow m.$

首先, 我们回忆一下 Yetter-Drinfel'd Hopf 模的定义和 Yetter-Drinfel'd Hopf 模基本定理.

定义 3.1[5] 设 A 是 H 上的 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数. 一个右 A-Hopf 模是指 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的对象 M, 使得 M 既是一个右 A-模, 又是一个右 A-余模 $\rho_M: M\longrightarrow M\otimes A: \rho_M(m)=\sum m_0\otimes m_1$, 并且对任意的 $a\in A,\ m\in M,\ h\in H$ 满足:

$$\rho_M(ma)=\sum m_0({m_1}^{-1}\rightarrow a_1)\otimes {m_1}^0a_2; \tag{13}$$

$$\varrho_M(ma)=\sum m^{-1}a^{-1}\otimes m^0a^0; \tag{14}$$

$$\sum m^{-1}\otimes {m^0}_0\otimes {m^0}_1=\sum {m_0}^{-1}m_1^{-1}\otimes {m_0}^0\otimes {m_1}^0; \tag{15}$$

$$\rho_M(h\rightarrow m)=\sum(h_1\rightarrow m_0)\otimes(h_2\rightarrow m_1); \tag{16}$$

$$h\rightarrow(ma)=\sum(h_1\rightarrow m)(h_2\rightarrow a). \tag{17}$$

注意到 A 本身就是一个右 A-Hopf 模. 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, M 是 H 上的 Yetter-Drinfel'd 模, 定义

$$\varrho_M(m\otimes a)=\sum m^{-1}a^{-1}\otimes m^0\otimes a^0, \tag{18}$$

$$h\rightarrow(m\otimes a)=\sum h_1\rightarrow m\otimes h_2\rightarrow a, \tag{19}$$

$$\rho_M(m\otimes a)=\sum m\otimes a_1\otimes a_2, \tag{20}$$

$$(m\otimes a)b=m\otimes ab, \tag{21}$$

其中 $m\in M, a,\ b\in A$, 则 $M\otimes A$ 是 A-Hopf 模, 参见文献 [5, 举例]. 下面我们赋予 $M\otimes A$ 另一个 Hopf 模结构. 我们这里给出的结构用到了辫子, 所以是一个更自然的结构.

命题 3.2 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, M 是 H 上的 Yetter-Drinfel'd 模. 定义

$$\varrho_M(m\otimes a)=\sum m^{-1}a^{-1}\otimes m^0\otimes a^0, \tag{22}$$

$$h\rightarrow(m\otimes a)=\sum h_1\rightarrow m\otimes h_2\rightarrow a, \tag{23}$$

$$\rho_M(m\otimes a)=\sum m\otimes a_1\otimes a_2, \tag{24}$$

$$(m\otimes a)b=\sum m(a^{-1}\rightarrow b_1)\otimes a^0b_2, \tag{25}$$

其中 $m\in M, a,\ b\in A$, 则 $M\otimes A$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 A-Hopf 模.

证明 显然 $M\otimes A$ 是右 A-模和右 A-余模, 下面我们证明等式 (11)–(15) 成立. 取 $m\otimes a\in M\otimes A,\ b\in A.$

因为有

$$\begin{aligned}\rho_M((m\otimes a)b)&=\rho_M\Big(\sum m(a^{-1}\rightarrow b_1)\otimes a^0b_2\Big)\quad \text{由 (23)}\\&=\sum m(a^{-1}\rightarrow b_1)\otimes(a^0b_2)_1\otimes(a^0b_2)_2\quad \text{由 (22)}\\&=\sum m(a^{-1}\rightarrow b_1)\otimes {a^0}_1({a^0}_2{}^{-1}\rightarrow b_2)\otimes {a^0}_2{}^0b_3\quad \text{由 (6)}\\&=\sum m({a_1}^{-1}{a_2}^{-2}\rightarrow b_1)\otimes {a_1}^0({a_2}^{-1}\rightarrow b_2)\otimes {a_2}^0b_3\quad \text{由 (5)}\\&=\sum(m\otimes a_1)({a_2}^{-1}\rightarrow b_1)\otimes {a_2}^0b_2\quad \text{由 (23)}\\&=\sum(m\otimes a)_0[(m\otimes a)_1{}^{-1}\rightarrow b_1]\otimes(m\otimes a)_1{}^0b_2.\quad \text{由 (22)}\end{aligned}$$

所以 $\rho_M((m\otimes a)b)=\sum(m\otimes a)_0[(m\otimes a)_1{}^{-1}\to b_1]\otimes(m\otimes a)_1{}^0 b_2$ 成立.

由于

$$\begin{aligned}\varrho_M((m\otimes a)b)&=\varrho_M\Big(\sum m(a^{-1}\to b_1)\otimes a^0 b_2\Big)\quad 由\ (23)\\&=\sum[m(a^{-1}\to b_1)]^{-1}(a^0b_2)^{-1}\otimes[m(a^{-1}\to b_1)]^0\otimes(a^0b_2)^0\quad 由\ (20)\\&=\sum m^{-1}(a^{-2}\to b_1)^{-1}a^{-1}b_2{}^{-1}\otimes m^0(a^{-2}\to b_1)^0\otimes a^0b_2{}^0\quad 由\ (12)\\&=\sum m^{-1}a^{-4}b_1{}^{-1}S(a^{-2})a^{-1}b_2{}^{-1}\otimes m^0(a^{-3}\to b_1{}^0)\otimes a^0b_2{}^0\quad 由\ (1)\\&=\sum m^{-1}a^{-2}b_1{}^{-1}b_2{}^{-1}\otimes m^0(a^{-1}\to b_1{}^0)\otimes a^0b_2{}^0\\&=\sum m^{-1}a^{-2}b^{-1}\otimes m^0(a^{-1}\to b^0{}_1)\otimes a^0b^0{}_2\quad 由\ (5)\\&=\sum m^{-1}a^{-1}b^{-1}\otimes(m^0\otimes a^0)b^0\quad 由\ (23)\\&=\sum(m\otimes a)^{-1}b^{-1}\otimes(m\otimes a)^0b^0,\quad 由\ (12)\end{aligned}$$

所以有 $\varrho_M((m\otimes a)b)=\sum(m\otimes a)^{-1}b^{-1}\otimes(m\otimes a)^0b^0$.

因为有

$$\begin{aligned}&\sum(m\otimes a)^{-1}\otimes(m\otimes a)^0{}_0\otimes(m\otimes a)^0{}_1\\&\quad=\sum m^{-1}a^{-1}\otimes(m^0\otimes a^0)_0\otimes(m^0\otimes a^0)_1\quad 由\ (20)\\&\quad=\sum m^{-1}a^{-1}\otimes(m^0\otimes a^0{}_1)\otimes a^0{}_2\quad 由\ (22)\\&\quad=\sum m^{-1}a_1{}^{-1}a_2{}^{-1}\otimes(m^0\otimes a_1{}^0)\otimes a_2{}^0\quad 由\ (5)\\&\quad=\sum(m\otimes a_1)^{-1}a_2{}^{-1}\otimes(m\otimes a_1)^0\otimes a_2{}^0\quad 由\ (20)\\&\quad=\sum(m\otimes a)_0{}^{-1}(m\otimes a)_1{}^{-1}\otimes(m\otimes a)_0{}^0\otimes(m\otimes a)_1{}^0,\quad 由\ (22)\end{aligned}$$

所以 $\sum(m\otimes a)^{-1}\otimes(m\otimes a)^0{}_0\otimes(m\otimes a)^0{}_1=\sum(m\otimes a)_0{}^{-1}(m\otimes a)_1{}^{-1}\otimes(m\otimes a)_0{}^0\otimes(m\otimes a)_1{}^0$ 成立.

我们能证明 $\rho_M(h\to(m\otimes a))=\sum(h_1\to(m\otimes a)_0)\otimes(h_2\to(m\otimes a)_1)$ 成立, 因为

$$\begin{aligned}\rho_M(h\to(m\otimes a))&=\rho_M(h_1\to m\otimes h_2\to a)\quad 由\ (21)\\&=\sum(h_1\to m)\otimes(h_2\to a_1)\otimes(h_3\to a_2)\quad 由\ (22)\\&=\sum(h_1\to(m\otimes a_1))\otimes(h_2\to a_2)\quad 由\ (21)\\&=\sum(h_1\to(m\otimes a)_0)\otimes(h_2\to(m\otimes a)_1).\quad 由\ (22)\end{aligned}$$

最后我们得到等式 $h\to((m\otimes a)b)=\sum(h_1\to(m\otimes a))(h_2\to b)$, 因为

$$\begin{aligned}h\to((m\otimes a)b)&=\sum h\to[m(a^{-1}\to b_1)\otimes a^0b_2]\quad 由\ (23)\\&=\sum h_1\to[m(a^{-1}\to b_1)]\otimes h_2\to(a^0b_2)\quad 由\ (21)\\&=\sum(h_1\to m)(h_2a^{-1}\to b_1)\otimes[h_3\to(a^0b_2)]\quad 由\ (21)\\&=\sum(h_1\to m)(h_2a^{-1}\to b_1)\otimes(h_3\to a^0)(h_4\to b_2)\quad 由\ (21)\end{aligned}$$

和

$$\sum(h_1\to(m\otimes a))(h_2\to b)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum[(h_1 \to m) \otimes (h_2 \to a)](h_3 \to b) \quad 由\ (21)\\
&= \sum(h_1 \to m)[(h_2 \to a)^{-1} \to (h_3 \to b)_1] \otimes (h_2 \to a)^0(h_3 \to b)_2 \quad 由\ (23)\\
&= \sum(h_1 \to m)(h_2 a^{-1} S(h_4) h_5 \to b_1) \otimes (h_3 \to a^0)(h_6 \to b_2) \quad 由\ (1)\\
&= \sum(h_1 \to m)(h_2 a^{-1} \to b_1) \otimes (h_3 \to a^0)(h_4 \to b_2).
\end{aligned}
$$

至此我们完成了证明.

若 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, M 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的右 A-Hopf 模, M 的右余不变量 (coinvariants) 是指满足条件 $M^{\mathrm{co}A} := \{m \in M | \rho_M(m) = m \otimes 1\}$ 的集合. Doi 证明了 $M^{\mathrm{co}A}$ 也是 Yetter-Drinfel'd 范畴中的对象. 进而, Doi 证明了关于 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的 Hopf 模基本定理. 定理内容如下:

定理 3.3[5, 定理1] 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, M 是右 A-Hopf 模, 则有 Hopf 模同构 $M^{\mathrm{co}A} \otimes A \longrightarrow M$. 特别地, M 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的自由右 A-模.

4 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数的整体维数

本节我们考虑的对象都是在 Yetter-Drinfel'd 模范畴中. 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, 我们给出 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中投射模的定义.

定义 4.1 设 P 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的右 A-模, 如果对于任意的 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 A-线性映射 $f: P \longrightarrow N$, 任何满同态 $\pi: M \longrightarrow N$, 必有映射 $g: P \longrightarrow M$ 使得下面的交换图成立:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
$$

则称 P 是投射的.

定义 4.2 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的右 A-模 M 的投射分解是指 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个正合列

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

其中每一个 P_i 都是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的投射模, d_i 和 π 是 A-线性、H-线性和 H-余线性的.

定义 4.3 设 M 是范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 A-模, 若 M 有投射分解

$$0 \longrightarrow P_d \longrightarrow P_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

而且不存在项数更少的投射分解, 则称 M 的投射维数是 d, 记为 $\mathrm{p.dim}M = d$. 如果不存在这样的投射分解, 规定 M 的投射维数为 $\mathrm{p.dim}\, M = \infty$.

定义 4.4 设 A 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 Hopf 代数, A 的整体维数 (global dimension) 定义为所有 A-模中最大的投射维数, 记为 $\mathrm{gl.dim}A = \sup\{\mathrm{p.dim}M | 任意\ A\text{-模}\ M\}$.

定理 4.5 设 A 是 Yetter-Drinfel'd Hopf 代数, 则有 $\mathrm{gl.dim}\ A = \mathrm{p.dim}_A\ k$, 其中 k 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的平凡的右 A-模.

证明 考虑 k 在 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的投射分解: $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$.

令 M 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的右 A-模, 则对 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的任意右 A-模 P_i, 定义 $M \otimes P_i$ 的右 A-模为:

$$(m \otimes p)a = \sum m(p^{-1} \to a_1) \otimes p^0 a_2, \quad m \in M, \quad p \in P_i, \quad a \in A.$$

则 $M \otimes P_i$ 也成为 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的右 A-模.

这样, 可以得到范畴 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的右 A-模的正合序列

$$\cdots \longrightarrow M\otimes P_1 \longrightarrow M\otimes P_0 \longrightarrow M\otimes k\cong M \longrightarrow 0.$$

如果证明这就是 M 在范畴 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的投射分解, 则完成证明.

如果 P 是 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的投射右 A-模, 则 P 是自由右 A-模的直和项, 即存在右 A-模 X 和某个集合 I, 使得 $P\oplus X\simeq A^{(I)}$, 因此有

$$(M\otimes P)\oplus(M\otimes X)\simeq(M\otimes A)^{(I)}.$$

所以只要证明 $M\otimes A$ 是投射的, 那么我们就能得到 $M\otimes P$ 是投射的. 事实上, 如果取 $M\otimes A$ 的右 A-模结构和右 A-余模结构如命题 3.2 中所述, 则 $M\otimes A$ 是 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的右 A-Hopf 模, 由定理 3.3 知 $M\otimes A$ 就是投射的. 这样 $M\otimes P$ 是投射的, 所以

$$\cdots \longrightarrow M\otimes P_1 \longrightarrow M\otimes P_0 \longrightarrow M\otimes k\cong M \longrightarrow 0$$

就是 M 在范畴 ${}_H^H\mathcal{YD}$ 中的投射分解, 因此结论得证.

致谢 作者非常感谢审稿者提出的宝贵意见, 这些意见使得本文得到了很大改进. 同时作者也非常感谢黄华林教授、何济位博士以及陈小伍博士对本文一些细节的讨论和建议.

参考文献

1 Yetter D N. Quantum groups and representation of monoidal categories. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, **108**: 261–290 (1990)

2 Li L B, Zhang P. Twisted Hopf algebras, Ringel-Hall algebras and Green's category. *J Algebra*, **231**: 713–743 (2000)

3 Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings. In: CBMS Regional Conf. Series in Math, Vol. 82. Providence, RI: Amer Math Soc, 1993

4 Radford D. The structure of Hopf algebras with a projection. *J Algebra*, **92**: 322–347 (1985)

5 Doi Y. Hopf modules in Yetter-Drinfel'd categories. *Comm Algebra*, **26**(9): 3057–3070 (1998)

6 Schauenburg P. Hopf modules and Yetter-Drinfel'd modules. *J Algebra*, **169**: 874–890 (1994)

7 Sommerhäuser Y. Yetter-Drinfel'd Hopf algebras over groups of prime order. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1789. Berlin: Springer, 2002

8 Lorenz M, Lorenz M. On crossed products of Hopf algebras. *Proc Amer Math Soc*, **123**(1): 33–38 (1995)

9 Wang Y H, Chen X W. Construct non-graded bi-Frobenius algebras via quivers. *Sci China Ser A*, **50**(3): 450–456 (2007)

10 Neuchl M, Schauenburg P. Reconstruction in braided categories and a notion of commutative bialgebras. *J Pure Appl Algebra*, **124**: 241–259 (1998)

11 Sweedler M E. Hopf Algebras. New York: Benjamin, 1969