中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 1029～1038
www.scichina.com math.scichina.com

Dirac-Witten 算子特征值的下界估计

陈永发

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190
E-mail: yfchen@amss.ac.cn

收稿日期: 2008-12-08; 接受日期: 2009-04-13

摘要 在在某些条件下, 我们获得了 Lorentzian 流形中紧致 spin 类空超曲面 (无边或带边) 的 Dirac-Witten 算子特征值的一个优化下界估计. 该估计依赖于超曲面的数量曲率、平均曲率以及旋量诱导的能量动量张量. 在极限情形下, 我们发现类空超曲面或者是极大的且具有正数量曲率的 Einstein 流形, 或者是具有非零常平均曲率的 Ricci 平坦流形.

关键词 Dirac-Witten 算子 特征值 平均曲率 数量曲率

MSC(2000) 主题分类 **53C27, 53C40, 53C80, 83C60**

1 引言

过去 30 多年, 经典的 Dirac 算子得到了深入的研究. 由 Atiyah-Singer 指标定理, Dirac 算子的谱包含了流形几何和拓扑的微妙信息. 这也是数学家对 Dirac 算子进行系统研究的动机之一.

另一方面, Witten 给出的正质量定理旋量的证明是使用了超曲面 Dirac 型算子 Dirac-Witten 算子的一个 Weitzenböck 型公式 [1,2]. 边界上的积分项在无穷远处的极限给出了质量. 鉴于 Dirac-Witten 算子的重要性, 在主能量条件下, Hijazi 和 Zhang[3] 第一次给出了 Dirac-Witten 算子特征值的一个优化下界. 该估计依赖于外围 Lorentzian 空间的能量动量张量和特征旋量诱导的能量动量张量. 极限情形也讨论了一下. 在文献 [4] 中, Zhang 在修正能量条件下证明了正质量定理. 因此, 在修正能量条件下或其他合适的条件下考虑 Dirac-Witten 算子特征值的下界估计是很自然的事情.

在文献 [5] 中, Baum 证明了任意类空超曲面上的旋量丛可以赋予正定的 Hermitian 度量. 由此度量, 通过旋量 Gauss 公式和合适的修正联络, 度量的共形变换等技巧, 我们给出了 Dirac-Witten 算子特征值的一个优化下界. 该估计依赖于超曲面的平均曲率、数量曲率以及旋量诱导的能量动量张量. 在某种局部边界条件下, 对于紧致带边类空超曲面来讲, 前面的结论依然成立. 在最后一节, 作为我们定理的一个应用, 我们研究了 de Sitter 时空的类空 spin 超曲面的情形.

引用格式: 陈永发. Dirac-Witten 算子特征值的下界估计. 中国科学 A, 2009, 39(8): 1029–1038
Chen Y F. Lower bounds for eigenvalues of the Dirac-Witten operator. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0180-x

2 主要结果

设 $(N,\widetilde{g})$ 为 $n+1$ 维 Lorentzian 流形, 满足下面 Einstein 场方程:

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}-\frac{1}{2}\widetilde{R}\widetilde{g}=T,$$

其中 $\widetilde{\mathrm{Ric}}$, $\widetilde{R}$ 分别为 $\widetilde{g}$ 的 Ricci 曲率和数量曲率T为能量动量张量. $(M,g)\hookrightarrow(N,\widetilde{g})$ 为诱导的类空 spin 超曲面. 若选取一正交标架 $\{e_\alpha\}$, e_0 为类时向量. 则 T_{00} 即为局部质量密度, T_{0i} 为局部动量密度.

定义 1 我们称类空 spin 超曲面 $(M,g)\hookrightarrow(N,\widetilde{g})$ 满足 modified 能量条件, 若在 M 上有 $T_{00}\geqslant|\nabla H|-\frac{H^2}{2n}$.

注意到 weak 能量条件说的是 $T_{00}\geqslant 0$. 但是 modified 能量条件允许 T_{00} 在 M 的某个紧致集上为负. 当涉及到引力时, 这是很有意思的问题.

根据文献 [5], 在 M 上旋量丛 $\mathbf{S}$ 存在与联络 $\widetilde{\nabla}$ 相容的 Hermitian 内积 $(\cdot,\cdot)$. 对于 N 上的余向量 $\widetilde{X}$, 超曲面旋量 ϕ 和 ψ, 我们有

$$(\widetilde{X}\cdot\phi,\psi)=(\phi,\widetilde{X}\cdot\psi),$$

其中 "·" 记为 Clifford 乘积. 注意到此内积不是正定的. 进一步, M 上的旋量丛 $\mathbf{S}$ 存在一正定 Hermitian 内积, 定义如下

$$\langle\cdot,\cdot\rangle=(e^0\cdot,\cdot).$$

很明显, $\langle e^0\cdot\phi,\psi\rangle=\langle\phi,e^0\cdot\psi\rangle$ 以及对于 M 上的任意余向量 X, $\langle X\cdot\phi,\psi\rangle=-\langle\phi,X\cdot\psi\rangle$.

固定点 $p\in M$ 和一正交标架 $\{e_\alpha\}$, 其中 e_0 为法方向, e_i 切于 M 满足 $(\nabla_i e_j)_p=0$ 和 $(\widetilde{\nabla}_0 e_j)_p=0$. 令 $\{e^\alpha\}$ 为对偶基, 则

$$(\widetilde{\nabla}_i e^j)_p=-h_{ij}e^0,\qquad(\widetilde{\nabla}_i e^0)_p=-h_{ij}e^j,$$

其中 $h_{ij}=\langle\widetilde{\nabla}_i e_0,e_j\rangle,1\leqslant i,j\leqslant n$, 是第二基本形式的分量. 在 $\mathbf{S}$ 上, 两个联络有下面的关系:

$$\widetilde{\nabla}_i=\nabla_i+\frac{1}{2}h_{ij}e^0\cdot e^j.$$

这一事实意味着联络 ∇ 与正定内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容且有 $\nabla_i(e^0\cdot\phi)=e^0\cdot\nabla_i\phi$.

在 M 的正交标架 $\{e^i\}$ 下, M 的基本 Dirac 算子和 Dirac-Witten 算子分别定义如下:

$$D=e^i\cdot\nabla_i,\quad\widetilde{D}=e^i\cdot\widetilde{\nabla}_i.$$

我们有

$$\widetilde{D}=D+\frac{H}{2}e^0$$

和 Weitzenböck 型公式

$$\widetilde{D}^2=\nabla^*\nabla+\frac{1}{4}(R+H^2)-\frac{1}{2}\nabla_i He^0\cdot e^i$$

以及其积分形式

$$\int_M|\nabla\phi|^2+\left\langle\phi,\frac{1}{4}\hat{R}\cdot\phi\right\rangle-|\widetilde{D}\phi|^2=\frac{1}{2}\int_{\partial M}(\langle\phi,[e^i,e^j]\cdot\nabla_j\phi\rangle-H\langle\phi,e^0\cdot e^i\cdot\phi\rangle)*e^i,$$

其中 R 为 M 的数量曲率, H 为平均曲率, $\hat{R}\equiv R+H^2-2\nabla_i He^0\cdot e^i\cdot$, $[e^i,e^j]\cdot=e^i\cdot e^j\cdot-e^j\cdot e^i\cdot$.

由 Gauss 方程, 有

$$T_{00}=\frac{1}{2}\Big(R+H^2-\sum h_{ij}^2\Big).$$

很明显, $\sum h_{ij}^2 \geqslant \frac{H^2}{n}$. 因此 modified 能量条件意味着

$$R + H^2 - 2|\nabla H| \geqslant 0.$$

在此条件下, 由 Weitzenböck 型公式可得紧致类空 spin 超曲面的 Dirac-Witten 算子的任何非零特征值应该满足下面估计

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{4}\inf_M \check{R},$$

其中我们记 $\check{R}$ 为 $R + H^2 - 2|\nabla H|$.

现在我们采用 Friedrich[6] 的技巧在更弱的条件下对特征值进行估计, 所得到的结果推广了 Friedrich 不等式, 并且得到的极限情形有着很好的几何刻画.

定理 1 设 $(N, \widetilde{g})$ 是 $n+1$ 维 Lorentzian 流形. M 为 $(N, \widetilde{g})$ 中的紧致无边的 spin 类空超曲面, 且满足条件 $n\check{R} > -H^2$. 记 λ 为 Dirac-Witten 算子 $\widetilde{D}$ 的非零特征值, 则有下面估计:

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{4(n-1)^2}\inf_M \left(\sqrt{n(n-1)\check{R} + nH^2} - |H|\right)^2.$$

若等式成立, 则 M 必具有常平均曲率和常 Ricci 曲率. 事实上只有下列两种情形出现:

(i) M 是具有正数量曲率的 Einstein 流形;

(ii) M 是具有非零常平均曲率的 Ricci 平坦流形.

证明 定义一个新的联络 $\widehat{\nabla}$,

$$\widehat{\nabla}_i := \nabla_i + \frac{bH}{2} e^0 \cdot e^i + \lambda a e^i,$$

其中 a, b 为待定的实值的光滑函数. 则对于特征旋量 ϕ, 有

$$\begin{aligned} |\widehat{\nabla}\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{4}nb^2H^2|\phi|^2 + na^2|\widetilde{D}\phi|^2 \\ &\quad + bH\langle e^0 \cdot D\phi, \phi\rangle - 2a\langle D\phi, \widetilde{D}\phi\rangle - nabH\langle e^0 \cdot \phi, \widetilde{D}\phi\rangle \\ &= |\nabla\phi|^2 + (a + b - nab)H\langle e^0 \cdot D\phi, \phi\rangle \\ &\quad + (na^2 - 2a)|\widetilde{D}\phi|^2 + \frac{H^2}{4}(2a + nb^2 - 2nab)|\phi|^2. \end{aligned}$$

因此由 Weitzenböck 型公式

$$\int_M |\widetilde{D}\phi|^2 = \int_M |\nabla\phi|^2 + \left\langle \phi, \frac{\hat{R}}{4} \cdot \phi \right\rangle,$$

令 $a + b - nab = 0$, 其中

$$(na - 1)^2 = \frac{(n-1)|H|}{\sqrt{n(n-1)\check{R} + nH^2} - |H|},$$

就可得到

$$\int_M |\widehat{\nabla}\phi|^2 \leqslant \int_M (1 + na^2 - 2a)\left[\lambda^2 - \frac{1}{4(n-1)^2}\left(\sqrt{n(n-1)\check{R} + nH^2} - |H|\right)^2\right]|\phi|^2,$$

从而得到了我们的估计.

若 λ^2 取到最小值, 则 $\widehat{\nabla}\phi = 0$,

$$\int_M \langle \phi, \hat{R} \cdot \phi \rangle = \int_M \check{R}|\phi|^2,$$

以及

$$\sqrt{n(n-1)\check{R} + nH^2} - |H|$$

恒为常数.

首先, $\widehat{\nabla}\phi=0$ 意味着 ϕ 满足下面过定方程

$$\nabla_i\phi=-\lambda a e^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\phi,$$

其中 $a+b-nab=0, a=a(R,H)$ 定义如上.

则我们不难计算:

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_i\phi&=\left(\nabla_i+\frac{1}{2}h_{ij}e^0\cdot e^j\right)\cdot\phi.=-\lambda a e^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\phi+\frac{1}{2}h_{ij}e^0\cdot e^j\cdot\phi,\\ \widetilde{D}\phi&=e^i\cdot\widetilde{\nabla}_i\phi=na\lambda\phi+\frac{H}{2}(1-nb)e^0\cdot\phi,\\ \nabla_j\nabla_i\phi&=-\lambda a_j e^i\cdot\phi-\lambda a e^i\cdot\nabla_j\phi-\nabla_j\left(\frac{bH}{2}\right)e^0\cdot e^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\nabla_j\phi\\ &=-\lambda a_j e^i\cdot\phi-\nabla_j\left(\frac{bH}{2}\right)e^0\cdot e^i\cdot\phi+\left(a^2\lambda^2-\frac{b^2H^2}{4}\right)e^i\cdot e^j\cdot\phi.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{R}{2}\phi&=e^i\cdot e^j(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\phi\\ &=2(n-1)\lambda\nabla a\cdot\phi-(n-1)\nabla(bH)\cdot e^0\cdot\phi+2n(n-1)\left(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\right)\phi\end{aligned}$$

和

$$H(1-nb)e^0\cdot\phi=2(1-na)\lambda\phi.$$

由 a,b 的定义和 $\sqrt{n(n-1)\check{R}+nH^2}-|H|$ 恒为常数, 可知

$$H\nabla b=-\frac{nb-1}{2n}\nabla H,\quad H\nabla a=\frac{na-1}{2n}\nabla H.$$

因此我们得到

$$\frac{R}{2}\phi=-\frac{2(n-1)(na-1)^2\lambda}{nH}\nabla H\cdot\phi+2n(n-1)\left(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\right)\phi.$$

上面等式与 ϕ 做内积, 再比较两边的实部, 可以推出 $\nabla H=0$ 和

$$\frac{R}{2}=2n(n-1)\left(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\right).$$

同时注意到

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{4}H^2&=\frac{b^2}{4}\frac{(na-1)^4\left(\sqrt{n(n-1)\check{R}+nH^2}-|H|\right)^2}{(n-1)^2}\\ &=\left(\frac{a}{na-1}\right)^2(na-1)^4\lambda^2=\lambda^2a^2(na-1)^2,\end{aligned}$$

因此我们得到了如下恒等式

$$R=4(n-1)(2-na)n^2a^3\lambda^2.$$

另一方面, 由 $H(1-nb)e^0\cdot\phi=2(1-na)\lambda\phi$, 我们有

$$\nabla_i\phi=-\lambda a e^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\phi=\left(-a+b\frac{1-na}{1-nb}\right)\lambda e^i\cdot\phi=-(2a-na^2)\lambda e^i\cdot\phi,$$

这也能说明 a 是常数以及表明了限制 $\phi|_M$ 是实 Killing 旋量, Killing 数为 $(2a-na^2)\lambda$, M 是具有正数量曲率的 Einstein 流形:

$$R=4n(n-1)(na^2-2a)^2\lambda^2.$$

联合这两个恒等式, 我们容易看出 $a \neq 0, \frac{2}{n}$, 则 $a = \frac{1}{n}$ 以及

$$\lambda^2 \equiv \frac{n}{4(n-1)} R.$$

最后若 $a = 0, \frac{2}{n}$, 则 $\nabla_i \phi = -(na^2 - 2a)\lambda e^i \cdot \phi = 0$. 因此类空超曲面 M 是 Ricci 平坦的 (参见文献 [7]) 以及

$$\lambda^2 \equiv \frac{1}{4(n-1)^2}\left(\sqrt{n(n-1)\check{R} + nH^2} - |H|\right)^2 \equiv \frac{H^2}{4}.$$

定理证毕.

给定一个旋量 ϕ, 我们可以定义相应的旋量的能量动量张量 Q_ϕ 如下:

$$(Q_\phi)_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle e^i \cdot \nabla_j \phi + e^j \cdot \nabla_i \phi, \phi/|\phi|^2\rangle.$$

该张量出现于用来描述 spin 1/2 的粒子和引力场之间的相互作用的 Einstein-Dirac 方程中. 1992 年, Hijazi 用该张量推广了著名的 Friedrich 不等式 (参见文献 [7]). 现在我们用此张量来估计 Dirac-Witten 算子的特征值下界.

定理 2 设 λ 是一个非零的 Dirac-Witten 算子特征值, 其对应的特征旋量为 ϕ, 若超曲面满足条件 $n(\check{R} + 4|\widetilde{Q}|^2) > -|H|^2$, 其中 $\widetilde{Q}_{ij} \equiv Q_{ij} - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(Q)\delta_{ij}$. 则有

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{4(n-1)^2}\inf_M \left(\sqrt{n(n-1)(\check{R} + 4|\widetilde{Q}|^2) + nH^2} - |H|\right)^2,$$

其中 $\widetilde{Q}_{ij} \equiv Q_{ij} - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(Q)\delta_{ij}$. 若上式等号成立, 则 M 必具有常平均曲率和常 $R + 4|\widetilde{Q}|^2$. 事实上, 极限情形只有下面两种情形:

(i) $H = 0,\ \lambda^2 \equiv \frac{n}{4(n-1)}(R + 4|\widetilde{Q}|^2)$,

(ii) $R = -4|\widetilde{Q}|^2,\ \lambda^2 \equiv \frac{H^2}{4}$.

证明 定义下面修正的联络 $\widehat{\nabla}^Q$ 如下:

$$\widehat{\nabla}_i^Q = \nabla_i + \lambda a e^i + \frac{bH}{2} e^0 \cdot e^i + \widetilde{Q}_{ij} e^j,$$

其中 $\widetilde{Q}_{ij} \equiv Q_{ij} - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(Q)\delta_{ij}$. 则对应特征旋量 ϕ, 有

$$\begin{aligned}
|\widehat{\nabla}^Q \phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + (a + b - nab)H\langle e^0 \cdot D\phi, \phi\rangle + (na^2 - 2a)|\widetilde{D}\phi|^2 \\
&\quad + \frac{H^2}{4}(2a + nb^2 - 2nab)|\phi|^2 + |\widetilde{Q}|^2|\phi|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \nabla_i\phi, \widetilde{Q_{ij}} e^j \cdot \phi\rangle \\
&\quad + 2\mathrm{Re}\langle \lambda a e^i \cdot \phi, \widetilde{Q_{ij}} e^j \cdot \phi\rangle + 2\mathrm{Re}\left\langle \frac{bH}{2} e^0 \cdot e^i \cdot \phi, \widetilde{Q_{ij}} e^j \cdot \phi\right\rangle \\
&= |\nabla\phi|^2 + (a + b - nab)H\langle e^0 \cdot D\phi, \phi\rangle + (na^2 - 2a)|\widetilde{D}\phi|^2 \\
&\quad + \frac{H^2}{4}(2a + nb^2 - 2nab)|\phi|^2 - |\widetilde{Q}|^2|\phi|^2.
\end{aligned}$$

这次, 我们仅需要令 $a + b - nab = 0$, 其中

$$(na - 1)^2 = \frac{(n-1)|H|}{\sqrt{n(n-1)(\check{R} + 4|\widetilde{Q}|^2) + nH^2} - |H|}\ .$$

现在我们讨论极限情形. 若 λ^2 取到等号, 则 $\widehat{\nabla}_i^Q \phi = 0$,

$$\int_M (|\nabla H||\phi|^2 - \langle \phi, e^0 \cdot \nabla H \cdot \phi\rangle) = 0$$

且

$$\sqrt{n(n-1)(\check{R} + 4|\widetilde{Q}|^2) + nH^2} - |H|$$

恒为常数.

我们可以类似地计算

$$
\begin{aligned}
&H(1-nb)e^0\cdot\phi=2(1-na)\lambda\phi,\\
&H\nabla b=-\frac{nb-1}{2n}\nabla H,\quad H\nabla a=\frac{na-1}{2n}\nabla H,\\
&\nabla_j\nabla_i\phi=\nabla_j\bigg[\bigg(-\lambda ae^i-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i-\widetilde{Q}_{ik}e^k\bigg)\phi\bigg]\\
&\qquad=-\lambda a_je^i\cdot\phi-\lambda ae^i\nabla_j\phi-\nabla_j\bigg(\frac{bH}{2}\bigg)e^0\cdot e^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\nabla_j\phi\\
&\qquad\quad-(\widetilde{Q}_{ik})_je^k\cdot\phi-\widetilde{Q}_{ik}e^k\cdot\nabla_j\phi\\
&\qquad=-\lambda a_je^i\cdot\phi-\nabla_j\bigg(\frac{bH}{2}\bigg)e^0\cdot e^i\cdot\phi+\bigg(a^2\lambda^2-\frac{b^2H^2}{4}\bigg)e^i\cdot e^j\cdot\phi\\
&\qquad\quad-(\widetilde{Q}_{ik})_je^k\cdot\phi+\lambda a(\widetilde{Q}_{jk}e^i\cdot e^k-\widetilde{Q}_{ik}e^j\cdot e^k-2\widetilde{Q}_{ij})\phi\\
&\qquad\quad+\frac{bH}{2}(\widetilde{Q}_{jk}e^i\cdot e^k+\widetilde{Q}_{ik}e^j\cdot e^k+2\widetilde{Q}_{ij})e^0\cdot\phi+\widetilde{Q}_{ik}\widetilde{Q}_{jl}e^k\cdot e^l\cdot\phi.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{R}{2}\phi=&e^i\cdot e^j(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\phi\\
=&2(n-1)\lambda\nabla a\cdot\phi-(n-1)\nabla(bH)\cdot e^0\cdot\phi+\bigg[2n(n-1)\bigg(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\bigg)-2|\widetilde{Q}|^2\bigg]\phi\\
&+\lambda ae^i\cdot e^j[(\widetilde{Q}_{ik}e^j\cdot e^k-\widetilde{Q}_{jk}e^i\cdot e^k)-(\widetilde{Q}_{jk}e^i\cdot e^k-\widetilde{Q}_{ik}e^j\cdot e^k)]\cdot\phi\\
&+e^i\cdot e^j[-(\widetilde{Q}_{jk})_ie^k+(\widetilde{Q}_{ik})_je^k]\cdot\phi,
\end{aligned}
$$

其中容易看出

$$
-e^i(\widetilde{Q}_{jk})_ie^j\cdot e^k\cdot\phi=0,\quad(\widetilde{Q}_{ik})_je^i\cdot e^j\cdot e^k\cdot\phi=-2(\widetilde{Q}_{ik})_ie^k\cdot\phi.
$$

于是和上一个定理的证明一样, 我们能得到

$$
\begin{aligned}
\frac{R}{2}\phi=&-\frac{2(n-1)(na-1)\lambda}{n(nb-1)H}\nabla H\cdot\phi-2(\widetilde{Q}_{ik})_ie^k\cdot\phi\\
&+\bigg[2n(n-1)\bigg(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\bigg)-2|\widetilde{Q}|^2\bigg]\phi.
\end{aligned}
$$

但是

$$
\int_M|\nabla H||\phi|^2=-\int_M\langle\phi,\nabla H\cdot e^0\cdot\phi\rangle=-\int_M\mathrm{Re}\bigg\langle\phi,\nabla H\cdot\frac{2\lambda(1-na)}{H(1-nb)}\phi\bigg\rangle=0,
$$

这意味着

$$
\nabla H=0.
$$

因此与 ϕ 做内积, 比较两边的实部, 可得

$$
\frac{R}{2}=2n(n-1)\Big(\lambda^2a^2-\frac{b^2}{4}H^2\Big)-2|\widetilde{Q}|^2=2(n-1)(2-na)n^2a^3\lambda^2-2|\widetilde{Q}|^2,
$$

即

$$
R+4|\widetilde{Q}|^2=4(n-1)(2-na)n^2a^3\lambda^2.
$$

另一方面, 注意到在极限情形时,

$$
\nabla_i\phi=-\lambda ae^i\cdot\phi-\frac{bH}{2}e^0\cdot e^i\cdot\phi-\widetilde{Q}_{ij}e^j\cdot\phi=-(2a-na^2)\lambda e^i\cdot\phi-\widetilde{Q}_{ij}e^j\cdot\phi=-L_{ij}e^j\cdot\phi,
$$

其中

$$L_{ij} \equiv (2a - na^2)\lambda\delta_{ij} + \widetilde{Q}_{ij}.$$

因此由文献 [7] 中命题 14, 有

$$(\mathrm{tr}L)^2 = \frac{R}{4} + |L|^2.$$

这告之我们

$$R + 4|\widetilde{Q}|^2 = 4(n^2 - n)(2a - na^2)^2\lambda^2 \geqslant 0.$$

联合这两个恒等式可以看出若 $a \neq 0, \frac{2}{n}$, 则 $a = \frac{1}{n}$ 以及

$$\lambda^2 \equiv \frac{n}{4(n-1)}\left(R + 4|\widetilde{Q}|^2\right).$$

若 $a = 0, \frac{2}{n}$, 则

$$R = -4|\widetilde{Q}|^2, \quad \lambda^2 \equiv \frac{H^2}{4}.$$

定理证毕.

注 1 事实上, 由 $\nabla_i\phi = -L_{ij}e^j \cdot \phi$ 以及 Q_{ij} 的定义, 易知 $L_{ij} = Q_{ij}$. 我们称这样的旋量场为 EM- 旋量. 进一步, 因为 $\mathrm{tr}Q = (2 - na)na\lambda$ 也是常数, $\phi|_M$ 也称 T-Killing 旋量 [8].

注 2 在定理 2 中, 若 λ^2 取到等式时, 我们不难看出 $\mathrm{div}\widetilde{Q}_{ik}=0$. 但由文献 [7] 的命题 14 和常数 $\mathrm{tr}Q$, $\mathrm{div}\widetilde{Q}_{ik} = 0$ 等价于 $R + 4|\widetilde{Q}|^2$ 是常数.

注 3 在定理 1 中, 若 λ^2 取到等式, 则由 $\widehat{\nabla}\phi = 0$ 我们知

$$(Q_\phi)_{ij} = \left(\lambda a - \frac{bH}{2}\langle e^0 \cdot \phi, \phi/|\phi|^2\rangle\right)\delta_{ij} = a(2 - na)\lambda\delta_{ij},$$

其中 $a = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}$ 或 0. 因此 $\widetilde{Q}_{ij} = 0$.

任意给定 N 上的实值光滑函数 u, 我们考虑共形度量 $\bar{\widetilde{g}} = e^{2u}\widetilde{g}$. 令 G_u 为 $\mathrm{SO}_{\widetilde{g}}N$ 到 $\mathrm{SO}_{\bar{\widetilde{g}}}N$ 之间的等距映射. 等距 G_u 诱导了 Spin_n 主丛, $\mathrm{Spin}_{\widetilde{g}}N$ 与 $\mathrm{Spin}_{\bar{\widetilde{g}}_N}N$ 以及它们的超平面旋量丛 $\mathbf{S}$ 与 $\bar{\mathbf{S}}(\equiv G_u\mathbf{S})$ 之间的等距. 给定两个截面 $\phi, \psi \in \Gamma(\mathbf{S})$, 记 $\bar{\phi} = G_u\phi$, $\bar{\psi} = G_u\psi$, 则

$$\langle\phi, \psi\rangle_{\widetilde{g}} = \langle\bar{\phi}, \bar{\psi}\rangle_{\bar{\widetilde{g}}}\ .$$

而 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的 Clifford 乘积定义如下

$$\overline{e^\alpha}\,\bar{\cdot}\,\bar{\phi} := \overline{e^\alpha \cdot \phi}.$$

注意到度量 $\bar{g}_N$ 限制在 M 上就得到了 M 上的一个共形度量. 令 N 上的正则共形类为

$$\mathcal{U} = \{u \in C^\infty(N), du(e^0)|_M = 0\}.$$

关于此正则共形类, 若 $\mathcal{U}$ 非空, 类似于文献 [9], Dirac-Witten 算子的共形变换是

$$\bar{\widetilde{D}}\big(e^{-\frac{n-1}{2}u}\phi\big) = e^{-\frac{n+1}{2}u}\overline{\widetilde{D}\phi}.$$

类似于文献 [9], 我们能得到

定理 3 条件如同定理 1, 设 λ 为 Dirac-Witten 算子的非零特征值, 则

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{4(n-1)^2}\sup_u \inf_M \left(\sqrt{n(n-1)\overline{\breve{R}}e^{2u} + nH^2} - |H|\right)^2,$$

其中 $\overline{\breve{R}} = \bar{R} + \bar{H}^2 - 2|\bar{\nabla}\bar{H}|_{\bar{g}}$. 若 λ^2 取到等号, 则 $(M, \bar{g})$ 是 Einstein 流形.

定理 4 条件如同定理 2, 设 λ 为 Dirac-Witten 算子的非零特征值, 则

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{4(n-1)^2}\sup_u \inf_M \left(\sqrt{n(n-1)(\overline{\check{R}}e^{2u}+4|\widetilde{Q}|^2)+nH^2}-|H|\right)^2,$$

其中 $\widetilde{Q_{ij}} \equiv Q_{ij}-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(Q)\delta_{ij}$.

3 紧致带边的类空超曲面

假设 M 有非空边界 ∂M 并且 ∂M 具有诱导的 Riemannian 和 spin 结构. 令 $\nabla^{\partial M}$ 是 ∂M 上的 Levi-civita 联络并用相同的记号表示为它们在旋量丛 $\mathbf{S}$ 的提升. 固定点 $q\in\partial M$ 和 T_qM 的一正交标架, 其中 e_r 为 ∂M 的外法方向, e_a 切于 ∂M 满足 $1\leqslant a,b\leqslant n-1$, $(\nabla_a^{\partial M}e_b)_q=0$, $(\nabla_{e_r}e_b)_q=0$. 令 $\{e^r,e^a\}$ 为其对偶标架. 则

$$(\nabla_a e^b)_q=-h_{ab}^{\partial M}e^r,\quad (\nabla_a e^r)_q=h_{ab}^{\partial M}e^b,$$

其中 $h_{ab}^{\partial M}=\langle\nabla_a e_r,e_b\rangle$ 为第二基本形式在 q 点的分量, 同时有

$$\nabla_a=\nabla_a^{\partial M}+\frac{1}{2}h_{ab}^{\partial M}e^r\cdot e^b\cdot$$

令 $H^{\partial M}=\sum h_{aa}^{\partial M}$ 为 ∂M 的平均曲率, $D^{\partial M}=e^a\cdot\nabla_a^{\partial M}$ 记为 ∂M 内蕴的 Dirac 算子. 则 $e_r\cdot D^{\partial M}$ 与度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 也相容. 进一步,

$$\nabla_a^{\partial M}(e^r\cdot\phi)=e^r\cdot\nabla_a^{\partial M}\phi,\quad D^{\partial M}(e^r\cdot\phi)=-e^r\cdot D^{\partial M}\phi.$$

于是在带边的情形下, Weitzenböck 型公式变为

$$\int_M|\nabla\phi|^2+\frac{1}{4}\langle\phi,\hat{R}\cdot\phi\rangle-|\widetilde{D}\phi|^2=\frac{1}{2}\int_{\partial M}(\langle\phi,[e^r,e^a]\cdot\nabla_a\phi\rangle-H\langle\phi,e^0\cdot e^r\cdot\phi\rangle)*e^r,$$

其中 “$*$” 为 M 的星算子.

因为 $\nabla_a=\nabla_a^{\partial M}+\frac{1}{2}h_{ab}^{\partial M}e^r\cdot e^b\cdot$, 我们可得

$$\int_M|\nabla\phi|^2+\frac{1}{4}\langle\phi,\hat{R}\cdot\phi\rangle-|\widetilde{D}\phi|^2=\int_{\partial M}\left(\langle\phi,e^r\cdot D^{\partial M}\phi\rangle-\frac{1}{2}H^{\partial M}|\phi|^2-H\langle\phi,e^0\cdot e^r\cdot\phi\rangle\right)*e^r.$$

为使得算子 $\widetilde{D}$ 是形式自伴的, 我们考虑下面局部边界条件

$$\phi=\pm e^r\cdot e^0\cdot\phi.$$

于是不难知道 $\langle\phi,e^r\cdot D^{\partial M}\phi\rangle=0$, 因此我们获得下面公式

$$\int_M|\widetilde{D}\phi|^2=\int_M\left(|\nabla\phi|^2+\frac{1}{4}\langle\phi,\hat{R}\cdot\phi\rangle\right)+\int_{\partial M}\left(\frac{1}{2}H^{\partial M}\mp H\right)|\phi|^2*e^r.$$

定理 5 若 λ 是一个非零的 Dirac-Witten 算子特征值, 条件与定理 1 一样. 若在边界 ∂M 上满足不等式 $\frac{1}{2}H^{\partial M}\mp H\geqslant 0$, 则在局部边界条件下, 我们有估计

$$\lambda^2\geqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\inf_M\left(\sqrt{n(n-1)\check{R}+nH^2}-|H|\right)^2.$$

若等式成立, 则 M 必具有常平均曲率和常 Ricci 曲率, $\frac{1}{2}H^{\partial M}\mp H=0$. 事实上只有下列两种情形出现:

(i) M 是具有正数量曲率的 Einstein 流形, 此时 $\lambda^2\equiv\frac{n}{4(n-1)}R$;

(ii) M 是具有非零常平均曲率的 Ricci 平坦流形.

定理 6 条件与定理 2 一样, 若 λ 是一个非零的 Dirac-Witten 算子特征值. 若在边界 ∂M 上满足不等式 $\frac{1}{2}H^{\partial M}\mp H\geqslant 0$, 则在局部边界条件下, 我们有估计

$$\lambda^2\geqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\inf_M\left(\sqrt{n(n-1)(\check{R}+4|\widetilde{Q}|^2)+nH^2}-|H|\right)^2$$

若 λ^2 取到等号, 则 M 必具有常平均曲率和常 $R+4|\widetilde{Q}|^2$, $\frac{1}{2}H^{\partial M}\mp H=0$. 事实上, 极限情形只有下面两种情形:

(i) $H=0,\ R>0,\ \lambda^2\equiv\frac{n}{4(n-1)}(R+4|\widetilde{Q}|^2)$;

(ii) $R=-4|\widetilde{Q}|^2,\ \lambda^2\equiv\frac{H^2}{4}$.

4 例子

下面我们具体来看一个例子. 设 $(M,\widetilde{g})$ 是这样一类的 Lorentzian 流形:

$$\widetilde{g}=-a^2(t,x)dt^2+g_{ij}(t,x)dx^idx^j,$$

其中 $a>0, 1\leqslant i,j\leqslant n$. 则 t-slice 具有 $g_{ij}=\widetilde{g}_{ij}$. 因为

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\widetilde{\Gamma_{ij}^{\alpha}}\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

从运动公式易知, 关于单位法向量的第二基本形式为

$$h_{ij}=h\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=a\widetilde{\Gamma_{ij}^{0}}=\frac{1}{2a}\partial_t g_{ij}.$$

特别地, 我们对具有正宇宙常数 $\Lambda=\frac{3}{\kappa^2}>0$ 的 de Sitter 时空更感兴趣. 即, $R^{1,4}$ 的超曲面 (M,g), 其中

$$\widetilde{g}_{dS}=-dt^2+\kappa^2\cos h^2\frac{t}{\kappa}(dr^2+\sin^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\psi^2)).$$

(实验表明我们的宇宙有正宇宙常数). 每个 t-slice 是 3 维球面, 很明显它是紧致的, 类空 spin 超曲面. 令 $(t,r,\theta,\psi)=(x^0,x^1,x^2,x^3),\ g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}),\ h_{ij}=h(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}), 1\leqslant i,j\leqslant 3$. 对于每个固定的 t-slice, 其平均曲率

$$H=\frac{1}{2}g^{ij}\partial_t g_{ij}=\frac{3}{\kappa}th\frac{t}{\kappa},$$

$R_{ijkl}=-\kappa^2\cos h^2\frac{t}{\kappa}g_{ii}g_{jj}(\delta_{jl}\delta_{ik}-\delta_{il}\delta_{jk})$, 其数量曲率

$$R=\frac{24}{\kappa^2(e^{\frac{t}{\kappa}}+e^{-\frac{t}{\kappa}})^2}\ (>0).$$

根据定理 1, 我们知道对于任意 t, 第一个非零特征值 λ 满足估计

$$\lambda^2\geqslant\frac{1}{16}(\sqrt{6R+9H^2}-|H|)^2=\frac{9}{16\kappa^2(e^{\frac{t}{\kappa}}+e^{-\frac{t}{\kappa}})^2}\left(\sqrt{16+9(e^{\frac{t}{\kappa}}-e^{-\frac{t}{\kappa}})^2}-|e^{\frac{t}{\kappa}}-e^{-\frac{t}{\kappa}}|\right)^2,$$

等号成立当且仅当 $H=0$, 即 t=0. 与此同时, 我们还有实 Killing 旋量, 满足以下实 Killing 方程 $\nabla^{dS}_X\phi+\frac{1}{2\kappa}X\cdot\phi=0$. 通过此方程, 我们即得特征值

$$\widetilde{D}\phi=e_i\cdot\nabla^{dS}_{e_i}\phi=\frac{3}{2\kappa}\phi.$$

因此我们知道, 对于 $t=0$ 的 slice, $\lambda=\frac{3}{2\kappa}$ 是最小特征值, 这个特征旋量是 Killing 旋量.

致谢 本文是在张晓研究员指导下完成的, 谨此致谢.

参考文献

1 Park T, Taubes C. On Witten's proof of the positive energy theorem. *Commun Math Phys,* **84**: 223–238 (1982)

2 Witten E. A new proof the positive energy theorem. *Commun Math Phys,* **80**: 381–402 (1981)

3 Hijazi O, Zhang X. The Dirac-Witten operator on spacelike hypersurfaces. *Comm Anal Geom,* **11**: 737–750 (2003)

4 Zhang X. Positive mass theorem for modified energy condition. In: Proceedings of the Workshop on Morse theory, Minimax Theory and their Applications to Nonlinear Differential Equations held at Morningside Center of Mathematics, 275–282 (1999)

5 Baum H. Spin-strukturen und Dirac-operatoren über pseudo-Riemannsche mannigfaltigkeiten. Stuttgart-Leipzig: Teubner-Verlag, 1981

6 Fridrich T. Der erste eigenwert des Dirac-operators einer kompakten Riemannschen mannifaltigkeit nicht negativer skalarkrümmung. *Math Nach,* **97**: 117–146 (1980)

7 Hijazi O. Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator. *J Geom Phys,* **16**: 27–38 (1995)

8 Morel B. Eigenvalue estimates for the Dirac-Schrödinger operators. *J Geom Phys,* **38**: 1–18 (2000)

9 Hijazi O, Zhang X. Lower bounds for the eigenvalues of Dirac operator, Part I. The hypersurface Dirac operators. *Ann Glob Anal Geom,* **19**: 355–376 (2001)

10 Gibbons G, Hawking S, Horowitz G, et al. Positive mass theorems for black holes. *Commun Math Phys,* **88**: 295–308 (1983)

11 Hijazi O. A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors. *Commun Math Phys,* **104**: 151–162 (1986)

12 Hijazi O. Premiè valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe. *CR Acad Sci Paris,* **313**: 865–868 (2001)

13 Hijazi O, Montiel S, Zhang X. Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary. *Commun Math Phys,* **221**: 255–265 (2001)

14 Huang W, Zhang X. On the relation between ADM and Bondi energy-momenta. III. Perturbed radiative spatial infinity. *Sci China Ser A*, **50**: 1316–1324 (2007)

15 Lawson H B, Michelsohn M L. Spin Geometry. In: Princeton Math Series, Vol. 38. Princeton: Princeton University Press, 1989

16 Zhang X. Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators. *Math Res Lett,* **5**: 199–210 (1998) A remark on: Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators. *Math Res Lett,* **6**: 465–466 (1999)

17 Zhang X. Positve mass conjecture for five-dimensional Lorentzian manifolds. *J Math Phys,* **40**: 3540–3552 (1999)

18 Zhang X. Positive mass theorem for hypersurface in 5-dimensional Lorentzian manifolds. *Comm Anal Geom,* **8**: 635–652 (2000)

19 Zhang X. A quasi-local mass for 2-spheres with negative Gauss curvature. *Sci China Ser A*, **51**: 1644–1650 (2008)