加权有理三次样条的形状控制

邓四清[1],方 逵[2,3],谢 进[4]
DENG Si-qing[1],FANG Kui[2,3],XIE Jin[4]

1.湘南学院 数学系,湖南 郴州 423000
2.湖南农业大学 信息科学技术学院,长沙 410128
3.湖南师范大学 数学与计算机科学学院,长沙 410081
4.合肥学院 数理系,合肥 230601
1.Department of Mathematics,Xiangnan University,Chenzhou,Hunan 423000,China
2.School of Information Science and Technology,Hunan Agricultural University,Changsha 410128,China
3.School of Mathematics and Computer,Hunan Normal University,Changsha 410081,China
4.Department of Mathematics and Physics,Hefei University,Hefei 230601,China
E-mail:dengsq66@163.com

DENG Si-qing,FANG Kui,XIE Jin.Shape control of weighted rational cubic spline.Computer Engineering and Applications,2009,45(26):172-175.

Abstract: In this paper,a kind of weighted rational cubic spline interpolation is constructed using the rational cubic spine with cubic polynomial denominators and the rational cubic spline based on function values.The shape control of the weighted rational cubic spline is studied,the sufficient conditions for the interpolating curves to be constrained in the given region are derived.An example is given in the end of this paper.
Key words: computer applications;curve design;rational spline;weighted interpolation;constrained interpolation

摘 要:利用带导数和不带导数的分母为三次的有理三次插值样条构造了一类加权有理三次插值样条函数,由于这种有理三次插值样条中含有参数、调节参数和权系数,因而给约束控制带来了方便。同时只要合适地选择调节参数,就可以使之变成分母为线性的和分母为二次的有理三次插值样条函数。对该样条曲线的区域控制问题进行了研究,给出了将其约束于给定的折线、二次曲线之上、之下或之间的充分条件。最后给出了数值例子。
关键词:计算机应用;曲线设计;有理样条;加权插值;约束插值
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.26.051 **文章编号:**1002-8331(2009)26-0172-04 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391;O241.3

1 引言

样条插值是曲线曲面设计中强有力的工具,一些作者已经研究了不少类型的样条函数用于几何造型的控制设计[1-7],但是通常的样条插值都是确定性的插值,即对于给定的插值条件,插值曲线是确定的。如果要对曲线进行修改,就要改变给定的插值条件,如何在插值条件不变的情况下进行其插值曲线的局部修改,则是计算机辅助几何设计中的重要研究课题。从理论上讲,这种提法似乎与“插值函数关于插值条件的唯一性”相矛盾。近些年来,带参数的有理插值在化解这个矛盾上已有一些有效的工作[8-14],它通过适当的选择参数来改变插值曲线的形状,从而达到曲线形状约束控制的目的,而且将通常的“插值函数关于插值条件的唯一性”演化为“插值函数关于插值条件和参数的唯一性”。

文献[10-13]中,带导数的或仅基于函数值的分母为线性的三次有理样条已被构造出来,而且还研究了该种插值的性质及其应用效果;文献[14-16]构造了分母为线性的加权有理三次插值样条并讨论了将其约束于给定区域的充分条件;文献[17]对一类分母为二次的有理三次插值样条曲线的区域控制问题进行了研究,给出了将其约束于给定区域的充分条件及充分必要条件。分母为三次的有理三次插值函数,由于其结构比分母为线性的和分母为二次的有理三次插值函数复杂,所以对它的诸项性质的讨论很少见诸文献。构造了分母为三次的加权有理三次插值样条并讨论将其约束于一条给定的折线、二次曲线之上、之下或之间的充分条件,同时只要合适地选择该加权有理三次

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60773110);湖南省教育厅科研资助项目(No.06C791);湖南省科技计划项目(No.2008FJ3046);湖南省重点学科建设资助项目;湖南省高校科技创新团队计划支持项目;安徽省教育厅自然科研项目(No.KJ2008B250)。
作者简介:邓四清(1966-),男,副教授,主要研究方向为数值逼近、计算机辅助几何设计;方逵(1963-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学;谢进(1970-),男,讲师,博士生,主要研究方向为计算机辅助几何设计。
收稿日期:2008-10-28 **修回日期:**2008-12-29

插值函数中的调节参数，就可以使分母为三次的有理三次插值样条函数变成分母为线性的和分母为二次的有理三次插值函数。从而构造的分母为三次的有理三次插值函数是分母为线性的和分母为二次的有理三次插值函数的推广；也就是说只要合适地选择加权有理三次插值样条函数中的调节参数和权系数，由得到的结论则可相应地得到文献[10-17]的相关结论。

2　加权有理三次插值样条的构造

给定数据$\{(t_i,f_i,d_i),i=0,1,\cdots,n\}$，其中$f_i,d_i$分别为被插函数$f(t)$在分划点$t_i$的函数值和导数值，此处$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$是分划点。记$h_i=t_{i+1}-t_i,\theta=(t-t_i)/h_i$，且令参数$\alpha_i>0,\beta_i>0$。

定义$[a,b]$上的C^1连续的分母为三次的有理三次插值样条如下：

$$P^*(t)\Big|_{[t_i,t_{i+1}]}=\frac{p_i^*(t)}{q_i^*(t)},i=0,1,\cdots,n-1\tag{1}$$

此处

$$p_i^*(t)=\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i^*\theta(1-\theta)^2+W_i^*\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3$$

$$q_i^*(t)=\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3$$

且　$V_i^*=\lambda_i f_i+\alpha_i h_i d_i,W_i^*=\mu_i f_{i+1}-\beta_i h_i d_{i+1}$

其中$\lambda_i,\mu_i>0$为调节参数。对给定的数据及选定的参数$\alpha_i,\beta_i,\lambda_i$和$\mu_i$，如上所定义的有理三次插值函数是存在且唯一的，其满足

$$P^*(t_i)=f_i,P^{*\prime}(t_i)=d_i,i=0,1,\cdots,n$$

称这种插值是分母为三次的带导数的有理三次样条插值。

记$\Delta_i=(f_{i+1}-f_i)/h_i$，定义$[a,b]$上的$C^1$连续的仅基于函数值的有理三次插值样条为：

$$P_*(t)\Big|_{[t_i,t_{i+1}]}=\frac{p_{i,*}(t)}{q_{i,*}(t)},i=0,1,\cdots,n-2\tag{2}$$

此处

$$p_{i,*}(t)=\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_{i,*}\theta(1-\theta)^2+W_{i,*}\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3$$

$$q_{i,*}(t)=\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3$$

且

$$V_{i,*}=\alpha_i f_{i+1}+(\lambda_i-\alpha_i)f_i,W_{i,*}=\mu_i f_{i+1}-\beta_i h_i\Delta_{i+1}$$

容易验证，$P_*(t)$满足

$$P_*(t_i)=f_i,P_*{}'(t_i)=\Delta_i,i=0,1,\cdots,n-1$$

称这种插值是分母三次的仅基于函数值的有理三次样条插值。

现在，令$\lambda\in R$，利用由式（1）和式（2）所定义的两种有理三次插值样条，构造一类加权有理三次插值样条如下：

$$P(t)\Big|_{[t_i,t_{i+1}]}=\lambda P^*(t)+(1-\lambda)P_*(t),i=0,1,\cdots,n-1\tag{3}$$

此处

$$p_i(t)=\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3$$

$$q_i(t)=\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3$$

且

$$V_i=[\lambda_i-(1-\lambda)\alpha_i]f_i+\lambda\alpha_i h_i d_i+(1-\lambda)\alpha_i f_{i+1}$$

$$W_i=\mu_i f_{i+1}-\lambda\beta_i h_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i h_i\Delta_{i+1}$$

这里λ称为权系数。显然由式（3）所定义的$P(t)$是C^1连续的有理三次插值样条，称之为由式（1）和式（2）加权得到的分母为三次的加权有理三次插值样条。容易验证，$P(t)$满足

$$P(t_i)=f_i,P'(t_i)=\lambda d_i+(1-\lambda)\Delta_i,i=0,1,\cdots,n-1$$

有趣的是，当$\alpha_i=\beta_i,\lambda_i=2\alpha_i+\beta_i,\mu_i=\alpha_i+2\beta_i,\lambda=1$，则式（3）就是标准的三次 Hermite 插值。

进一步，令

$$P''(t_i+)=P''(t_i-),i=1,2,\cdots,n-2$$

可以得到如下连续性方程

$$h_i\alpha_i[\alpha_{i-1}(\lambda d_{i-1}+(1-\lambda)\Delta_{i-1})-\lambda_{i-1}\Delta_{i-1}+\mu_{i-1}(\lambda d_i+(1-\lambda)\Delta_i)-\beta_{i-1}(\lambda d_i+(1-\lambda)\Delta_i)]=h_{i-1}\beta_{i-1}[\alpha_i(\lambda d_i+(1-\lambda)\Delta_i)-\lambda_i(\lambda d_i+(1-\lambda)\Delta_i)+\mu_i\Delta_i-\beta_i(\lambda d_{i+1}+(1-\lambda)\Delta_{i+1})],i=1,2,\cdots,n-2\tag{4}$$

称式（4）为C^2连续性约束条件。当参数$\alpha_i,\beta_i,\lambda_i,\mu_i$和权系数$\lambda$满足关系式（4）时，插值函数是$C^2$连续的。

当$\alpha_i=\beta_i,\lambda_i=2\alpha_i+\beta_i,\mu_i=\alpha_i+2\beta_i,\lambda=1$且在等距分划的情况下，式（4）变成人们熟知的三次样条插值的三对角方程

$$d_{i-1}+4d_i+d_{i+1}=3(\Delta_i-\Delta_{i-1}),i=1,2,\cdots,n-2$$

由此，可由$[t_0,t_1]$上的α_0和β_0通过式（4）确定α_1和β_1，依此类推，逐段构造出$[a,b]$上的C^2连续的有理三次插值函数$P(t)$。

3　将插值曲线约束于两给定的折线之间的问题

设$f(t)$是被插函数，令$P(t)$是$f(t)$在$t\in[t_0,t_n]$上的由式（3）所定义的分母为三次的加权有理插值函数，$g(t)$是$[t_0,t_n]$上定义的以$t_0<t_1<\cdots<t_n$为分点的分段线性函数，数据$\{(t_i f_i,d_i),i=0,1,\cdots,n\}$满足

$$f_i\geqslant(\leqslant)g(t_i),i=0,1,\cdots,n$$

如果对所有$t\in[t_0,t_n]$均有$P(t)\geqslant(\leqslant)g(t)$，则$P(t)$称作被约束于$g(t)$之上（下）的分母为三次的加权有理三次插值函数，$g(t)$被称作下（上）约束曲线。文中总假定分划是等距的。现考虑把分母为三次的加权有理三次插值曲线约束在给定的折线之上的情况，有如下定理。

定理 1　给定数据$\{(t_i,f_i,d_i,g_i),i=0,1,\cdots,n\}$且$f_i\geqslant g_i$，此处$g_i$表示$g(t_i)$，则由式（3）所定义的分母为三次的加权有理三次插值样条曲线$P(t)$在$[t_i,t_{i+1}]$上位于直线段$g(t)$之上的充分条件是参数$\alpha_i>0,\beta_i>0$，调节参数$\lambda_i,\mu_i>0$和$\lambda\in R$满足如下不等式组

$$\begin{cases}\lambda_i(f_i-g_i)+\alpha_i[\lambda f_i-g_{i+1}+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}]\geqslant 0\\ \lambda_i(f_i-g_{i+1})+\mu_i(f_{i+1}-g_i)+(1-\lambda)\alpha_i(f_{i+1}-f_i)+\\ \quad[\lambda\alpha_i d_i-\lambda\beta_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i\Delta_{i+1}]h_i\geqslant 0\\ \mu_i(f_{i+1}-g_{i+1})+\beta_i[f_{i+1}-g_i-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]\geqslant 0\end{cases}\tag{5}$$

证明　由式（3）可知，当$t\in[t_i,t_{i+1}]$时，$q_i(t)>0$。于是

$$P(t)=\frac{p_i(t)}{q_i(t)}\geqslant g(t)$$

等价于

$$p_i(t)-q_i(t)g(t)\geqslant 0$$

令　$U_i(t)=p_i(t)-q_i(t)g(t)$

则　$U_i(t)=\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3-$

$$[\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3][g_i(1-\theta)+g_{i+1}\theta]\geqslant 0$$

由于

$$\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3=$$

$$[\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3][(1-\theta)+\theta]=$$

$$\alpha_i f_i(1-\theta)^4+(\alpha_i f_i+V_i)\theta(1-\theta)^3+(V_i+W_i)\theta^2(1-\theta)^2+$$

$$(W_i+\beta_i f_{i+1})\theta^3(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^4$$

$$[\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3][g_i(1-\theta)+g_{i+1}\theta]=$$

$$\alpha_i g_i(1-\theta)^4+(\alpha_i g_{i+1}+\lambda_i g_i)\theta(1-\theta)^3+(\lambda_i g_{i+1}+\mu_i g_i)\theta^2(1-\theta)^2+$$

$$(\mu_i g_{i+1}+\beta_i g_i)\theta^3(1-\theta)+\beta_i g_{i+1}\theta^3$$

所以

$$U_i(t)=\alpha_i(f_i-g_i)(1-\theta)^4+A_i\theta(1-\theta)^3+B_i\theta^2(1-\theta)^2+$$
$$C_i\theta^3(1-\theta)+\beta_i(f_{i+1}-g_{i+1})\theta^4\geqslant 0$$

其中

$$A_i=\alpha_i f_i+V_i-\alpha_i g_{i+1}-\lambda_i g_i=$$
$$\lambda_i(f_i-g_i)+\alpha_i[\lambda f_i-g_{i+1}+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}]$$

$$B_i=V_i+W_i-\lambda_i g_{i+1}-\mu_i g_i=$$
$$\lambda_i(f_i-g_{i+1})+\mu_i(f_{i+1}-g_i)+(1-\lambda)(f_{i+1}-f_i)+$$
$$[\lambda\alpha_i d_i-\lambda\beta_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i\Delta_{i+1}]h_i$$

$$C_i=W_i+\beta_i f_{i+1}-\mu_i g_{i+1}-\beta_i g_i=$$
$$\mu_i(f_{i+1}-g_{i+1})+\beta_i[f_{i+1}-g_i-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]$$

因为$f_i\geqslant g_i$,$f_{i+1}\geqslant g_{i+1}$,所以$\alpha_i(f_i-g_i)\geqslant 0$,$\beta_i(f_{i+1}-g_{i+1})\geqslant 0$。

如果$A_i\geqslant 0$,$B_i\geqslant 0$,$C_i\geqslant 0$成立,则有$U_i(t)\geqslant 0$对所有$t\in[t_i,t_{i+1}]$均成立。

用类似的方法,有如下有理插值样条曲线$P(t)$约束于给定直线下的充分条件。

定理2 给定数据$\{(t_i,f_i,d_i,g_i^*),i=0,1,\cdots,n\}$且$f_i\leqslant g_i^*$,则由式(3)所定义的分母为三次的加权有理三次插值样条曲线$P(t)$在$[t_i,t_{i+1}]$上位于直线有段$g^*(t)$之下的充分条件是参数$\alpha_i>0$,$\beta_i>0$,调节参数$\lambda_i,\mu_i>0$和$\lambda\in R$满足如下不等式组

$$\begin{cases}\lambda_i(f_i-g_i^*)+\alpha_i[\lambda f_i-g_{i+1}^*+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}]\leqslant 0\\ \lambda_i(f_i-g_{i+1}^*)+\mu_i(f_{i+1}-g_i^*)+(1-\lambda)\alpha_i(f_{i+1}-f_i)+\\ \quad[\lambda\alpha_i d_i-\lambda\beta_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i\Delta_{i+1}]h_i\leqslant 0\\ \mu_i(f_{i+1}-g_{i+1}^*)+\beta_i[f_{i+1}-g_i^*-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]\leqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

其中$g^*(t_i)=g_i^*$,$g^*(t_{i+1})=g_{i+1}^*$。

由定理1和定理2可得如下有理三次插值样条$P(t)$约束于折线$g(t)$和$g^*(t)$之间的充分条件。

定理3 给定数据$\{(t_i,f_i,d_i,g_i,g_i^*),i=0,1,\cdots,n\}$且$g_i\leqslant f_i\leqslant g_i^*$,则由式(3)所定义的分母为三次的加权有理三次插值样条曲线$P(t)$在$[t_i,t_{i+1}]$上约束在直线段$g(t)$和$g^*(t)$之间的充分条件为参数$\alpha_i>0$,$\beta_i>0$,调节参数$\lambda_i,\mu_i>0$和$\lambda\in R$同时满足不等式组(5)和(6)。

4 将插值曲线约束于两给定的抛物线之间的问题

设$f(t)$是被插函数,令$P(t)$是$f(t)$在$[t_0,t_n]$上的由式(3)所定义的分母为三次的加权有理插值函数。$g(t)$是$[t_0,t_n]$上定义的以$t_0<t_1<\cdots<t_n$为分点的分段二次函数,上(下)约束插值的定义如第3章所给。则有

定理4 给定数据$\{(t_i,f_i,d_i,g_i,g_i'),i=0,1,\cdots,n\}$且$f_i\geqslant g_i$,此处

$$g_i=g(t_i),g_{i+1}=g(t_{i+1}),g_i'=g'(t_i)$$

则由式(3)所定义的分母为三次的加权有理样条曲线$P(t)$在$[t_i,t_{i+1}]$上位于二次曲线段$g(t)$之上的充分条件是参数$\alpha_i>0$,$\beta_i>0$,调节参数$\lambda_i,\mu_i>0$和权系数λ满足不等式组

$$\begin{cases}\lambda_i(f_i-g_i)+\alpha_i[(1+\lambda)f_i+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}-2g_i-g_i'h_i]\geqslant 0\\ \alpha_i[(2\lambda-1)f_i-g_{i+1}+2\lambda h_i d_i+2(1-\lambda)f_{i+1}]+\lambda_i(2f_i-2g_i-g_i'h_i)+\\ \quad\mu_i(f_{i+1}-g_i)-\lambda\beta_i h_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i h_i\Delta_{i+1}\geqslant 0\\ \lambda_i(f_i-g_{i+1})+\beta_i[f_{i+1}-g_i-2\lambda h_i d_{i+1}-2(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]+\\ \quad\mu_i(2f_{i+1}-2g_i-g_i'h_i)+\alpha_i[(1-\lambda)(f_{i+1}-f_i)+\lambda h_i d_i]\geqslant 0\\ \beta_i[2f_{i+1}-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}-2g_i-g_i'h_i]+\mu_i(f_{i+1}-g_{i+1})\geqslant 0\end{cases}\tag{7}$$

证明 因为$g(t)$是$[t_i,t_{i+1}]$上的二次函数,所以

$$g(t)=g_i(1-\theta)^2+(2g_i+g_i'h_i)\theta(1-\theta)+g_{i+1}\theta^2$$

由式(3)可知,当$t\in[t_i,t_{i+1}]$时,$q_i(t)>0$。于是

$$P(t)=\frac{p_i(t)}{q_i(t)}\geqslant g(t)$$

等价于

$$p_i(t)-q_i(t)g(t)\geqslant 0$$

令 $U_i(t)=p_i(t)-q_i(t)g(t)$

则 $U_i(t)=\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3-$
$[\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3][g_i(1-\theta)+(2g_i+g_i'h_i)\cdot$
$\theta(1-\theta)+g_{i+1}\theta^2]\geqslant 0$

由于

$$\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3=$$

$$[\alpha_i f_i(1-\theta)^3+V_i\theta(1-\theta)^2+W_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^3][(1-\theta)^2+2\theta(1-\theta)+\theta^2]=$$

$$\alpha_i f_i(1-\theta)^5+(2\alpha_i f_i+V_i)\theta(1-\theta)^4+(\alpha_i f_i+2V_i+W_i)\theta^2(1-\theta)^3+$$

$$(V_i+2W_i+\beta_i f_{i+1})\theta^3(1-\theta)^2+(W_i+2\beta_i f_{i+1})\theta^4(1-\theta)+\beta_i f_{i+1}\theta^5$$

$$[\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)^2+\beta_i\theta^3][g_i(1-\theta)^2+(2g_i+g_i'h_i)\theta(1-\theta)+g_{i+1}\theta^2]=$$

$$\alpha_i g_i(1-\theta)^5+(2\alpha_i g_i+\alpha_i g_i'h_i+\lambda_i g_i)\theta(1-\theta)^4+(\alpha_i g_{i+1}+2\lambda_i g_i+\lambda_i g_i'h_i+\mu_i g_i)\theta^2(1-\theta)^3+(\lambda_i g_{i+1}+2\mu_i g_i+\mu_i g_i'h_i+\beta_i g_i)\theta^3(1-\theta)^2+(\mu_i g_{i+1}+2\beta_i g_i+\beta_i g_i'h_i)\theta^4(1-\theta)+\beta_i g_{i+1}\theta^5$$

所以

$$U_i(t)=\alpha_i(f_i-g_i)(1-\theta)^5+D_i\theta(1-\theta)^4+E_i\theta^2(1-\theta)^3+F_i\theta^3(1-\theta)^2+$$
$$G_i\theta^4(1-\theta)+\beta_i(f_{i+1}-g_{i+1})\theta^5\geqslant 0$$

其中

$$D_i=2\alpha_i f_i+V_i-2\alpha_i g_i-\alpha_i g_i'h_i-\lambda_i g_i=$$
$$\lambda_i(f_i-g_i)+\alpha_i[(1+\lambda)f_i+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}-2g_i'-g_i'h_i]$$

$$E_i=\alpha_i f_i+2V_i+W_i-\alpha_i g_{i+1}-2\lambda_i g_i-\lambda_i g_i'h_i-\mu_i g_i=$$
$$\alpha_i[(2\lambda-1)f_i-g_{i+1}+2\lambda h_i d_i+2(1-\lambda)f_{i+1}]+$$

$$\lambda_i(2f_i-2g_i-g_i{}'h_i)+\mu_i(f_{i+1}-g_i)-\lambda\beta_i h_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i h_i \Delta_{i+1}$$

$$F_i=V_i+2W_i+\beta_i f_{i+1}-\lambda_i g_{i+1}-2\mu_i g_i-\mu_i g_i{}'h_i-\beta_i g_i=$$

$$\lambda_i(f_i-g_{i+1})+\beta_i[f_{i+1}-g_i-2\lambda h_i d_{i+1}-2(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]+$$

$$\mu_i(2f_{i+1}-2g_i-g_i{}'h_i)+\alpha_i[(1-\lambda)(f_{i+1}-f_i)+\lambda h_i d_i]$$

$$G_i=W_i+2\beta_i f_{i+1}-\mu_i g_{i+1}-2\beta_i g_i-\beta_i g_i{}'h_i=$$

$$\beta_i[2f_{i+1}-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}-2g_i-g_i{}'h_i]+\mu_i(f_{i+1}-g_{i+1})$$

因为$f_i\geqslant g_i, f_{i+1}\geqslant g_{i+1}$，所以$\alpha_i(f_i-g_i)\geqslant 0, \beta_i(f_{i+1}-g_{i+1})\geqslant 0$

如果$D_i\geqslant 0, E_i\geqslant 0, F_i\geqslant 0$和$G_i\geqslant 0$成立，则有$U_i(t)\geqslant 0$对所有$t\in[t_i, t_{i+1}]$均成立。

类似地，对于$g^*(t)$为“下约束”二次曲线的情况，有下述充分条件的定理。

定理5 给定数据$\{(t_i, f_i, d_i, g_i^*, g_i^*{}'), i=0,1,\cdots,n\}$且$f_i\leqslant g_i^*$，此处

$$g_i^*=g^*(t_i), g_{i+1}^*=g^*(t_{i+1}), g_i^*{}'=g^*{}'(t_i)$$

则由式（3）所定义的分母为三次的加权有理样条曲线$P(t)$在$[t_i, t_{i+1}]$上位于二次曲线段$g^*(t)$之下的充分条件是参数$\alpha_i>0$，$\beta_i>0$，调节参数$\lambda_i, \mu_i>0$和权系数λ满足不等式组

$$\begin{cases}\lambda_i(f_i-g_i^*)+\alpha_i[(1+\lambda)f_i+\lambda h_i d_i+(1-\lambda)f_{i+1}-2g_i^*-g_i^*{}'h_i]\leqslant 0\\ \alpha_i[(2\lambda-1)f_i-g_{i+1}^*+2\lambda h_i d_i+2(1-\lambda)f_{i+1}]+\lambda_i(2f_i-2g_i^*-g_i^*{}'h_i)+\\ \quad\mu_i(f_{i+1}-g_i^*)-\lambda\beta_i h_i d_{i+1}-(1-\lambda)\beta_i h_i\Delta_{i+1}\leqslant 0\\ \lambda_i(f_i-g_{i+1}^*)+\beta_i[f_{i+1}-g_i^*-2\lambda h_i d_{i+1}-2(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}]+\\ \quad\mu_i(2f_{i+1}-2g_i^*-g_i^*{}'h_i)+\alpha_i[(1-\lambda)(f_{i+1}-f_i)+\lambda h_i d_i]\leqslant 0\\ \beta_i[2f_{i+1}-\lambda h_i d_{i+1}-(1-\lambda)h_i\Delta_{i+1}-2g_i^*-g_i^*{}'h_i]+\mu_i(f_{i+1}-g_{i+1}^*)\leqslant 0\end{cases}\tag{8}$$

由定理4和定理5可得如下“上下同时约束”条件的定理

定理6 给定数据$\{(t_i, f_i, d_i, g_i, g_i^*, g_i{}', g_i^*{}'), i=0,1,\cdots,n\}$且$g_i\leqslant f_i\leqslant g_i^*$，则由式（3）所定义的分母为三次的加权有理样条曲线$P(t)$在$[t_i, t_{i+1}]$上被约束在二次曲线$g(t)$之上和$g^*(t)$之下的充分条件是参数$\alpha_i>0, \beta_i>0$，调节参数$\lambda_i, \mu_i>0$和权系数λ满足由式（7）和式（8）所组成的不等式组。

5 数值例子

例1 设$f(t)=\sin\frac{\pi}{2}t, t\in[0,4]$。取插值结点为0.0，0.5，1.0，1.5，2.0，2.5，3.0，3.5，4.0，即等距分划，$h=0.5$，其中在$[0,4]$上的由式（3）定义的有理样条曲线记为$P(t)$，其中取$\lambda=0.5$。

取“上约束”的二次曲线$g^*(t)$为

$$g^*(t)=\begin{cases}-t^2+2t+0.05 & 0\leqslant t\leqslant 2\\ t^2-6t+8.05 & 2\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$$

取“下约束”的二次曲线$g(t)$为

$$g(t)=\begin{cases}-t^2+2t-0.05 & 0\leqslant t\leqslant 2\\ t^2-6t+7.95 & 2\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$$

表1给出了$g(t)$、$g^*(t)$、$P(t)$及$f(t)$在插值区间上的值。其中$\alpha_i=\beta_i=1(i=0,1,\cdots,7)$，而$\lambda_i=(4,28,14,28,6,8,9,28)$，$\mu_i=(4,70,2,17,8,18,3,17)(i=0,1,\cdots,7)$。从中也可以看出：尽管$f(t)$并不完全界于两条二次曲线$g(t)$和$g^*(t)$之间，但其插值曲线$P(t)$完全被约束于两条二次曲线$g(t)$和$g^*(t)$之间，见图1。

表1 $g(t)$、$g^*(t)$、$P(t)$及$f(t)$在插值区间上的值

t	$g^*(t)$	$g(t)$	$P(t)$	$f(t)$
0.00	0.050 0	–0.050 0	0.000 0	0.000 0
0.25	0.487 5	0.387 5	0.415 5	0.382 7
0.50	0.800 0	0.700 0	0.707 1	0.707 1
0.75	0.987 5	0.887 5	0.923 4	0.923 9
1.00	1.050 0	0.950 0	1.000 0	1.000 0
1.25	0.987 5	0.887 5	0.954 6	0.923 9
1.50	0.800 0	0.700 0	0.707 1	0.707 1
1.75	0.487 5	0.387 5	0.420 4	0.382 7
2.00	0.050 0	–0.050 0	0.000 0	0.000 0
2.25	–0.387 5	–0.487 5	–0.432 8	–0.382 7
2.50	–0.700 0	–0.800 0	–0.707 1	–0.707 1
2.75	–0.887 5	–0.987 5	–0.907 5	–0.923 9
3.00	–0.950 0	–1.050 0	–1.000 0	–1.000 0
3.25	–0.887 5	–0.987 5	–0.920 6	–0.923 9
3.50	–0.700 0	–0.800 0	–0.707 1	–0.707 1
3.75	–0.387 5	–0.487 5	–0.437 1	–0.382 7
4.00	0.050 0	–0.100 0	0.000 0	0.000 0

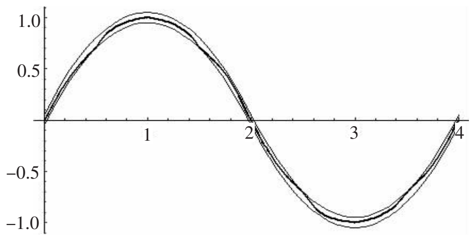

图1 约束$P(t)$于两条二次曲线之间

6 结束语

当$\lambda=1$和$\lambda=0$，式（3）就分别变成了带导数的分母三次的有理三次插值样条和仅基于函数值的分母为三次的有理三次插值样条，因此由定理1~定理6的结果就可相应地得到将带导数的分母为三次的有理三次插值样条和仅基于函数值的分母为三次的有理三次插值样条曲线约束于给定的折线、二次曲线之上、之下或之间的充分条件，从而文献[18–19]的相关结论都是该文的特例；当取调节参数$\lambda_i=\alpha_i+\kappa_i, \mu_i=\beta_i+\kappa_i$时，由于

$$\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3=\alpha_i(1-\theta)^2+\kappa_i\theta(1-\theta)+\beta_i\theta^2,$$

于是式（3）就变成了分母为二次的加权有理三次插值样条，此时若分别取$\lambda=1$和$\lambda=0$，式（3）就分别变成了带导数的分母二次的有理三次插值样条和仅基于函数值的分母为二次的有理三次插值样条，因此由定理1~定理6的结果就可相应地得到将分母为二次的加权有理三次插值样条及带导数的分母二次的有理三次插值样条和仅基于函数值的分母为二次的有理三次插值样条曲线约束于给定的折线、二次曲线之上、之下或之间的充分条件，从而文献[16–17]的相关结论都是该文的特例；当取调节参数$\lambda_i=2\alpha_i+\beta_i, \mu_i=\alpha_i+2\beta_i$时，由于$\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^2+\mu_i\theta^2(1-\theta)+\beta_i\theta^3=\alpha_i(1-\theta)+\beta_i\theta$，于是式（3）就变成了分母为线性的加权有理三次插值样条，此时当分别取$\lambda=1$和$\lambda=0$时，式（3）就分别变成了分母线性的有理三次插值样条和仅基于函数值的分母为线性的有理三次插值样条，因此由定理1~定理6的结果就可以得到文献[10–15]的相关结论，从而文献[10–15]的相关结论都是该文的特例。

（下转192页）