

# 一类代数空间逼近样条

彭丰富

PENG Feng-fu

桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004

School of Mathematics & Computational Sciences, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi 541004 China

E-mail: pengfengfu@yahoo.com.cn

**PENG Feng-fu. A kind of algebraic approximating spline in space. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(23): 165-169.**

**Abstract:** Tetrahedron can be formed with four sequence and non-coplanar points in space, and any points in it can be represented by barycentric coordinate system with space affine transform. Both regular algebraic patches of cubic and quadratic with three variables, which is constructed in the tetrahedron, represented in algebraic Bernstein-Bézier zero contour. The intersection set of both patches constructs a regular segment. The quadratic patches is fixed, and its parametric representation method is gained. The cubic patches reduce to three local factors through reducing Bernstein coefficients to control shape of curve, two of them are used to join segments into  $G^2$  continuity approximating curves for given sequence data in space, and the other is used to adjust shape of segment. The parametric representation of segment can be gained from quadratic patch and constrained equations with cubic patches. A  $G^2$ -continuity approximate curve for a sequence points similar to cubic Bézier splines with four control points is generated. The method is quite different from popularly algebraic method by joining planar arc into a continuous curve, and the latter is also represented by barycentric coordinate system with planar affine transform.

**Key words:** algebraic splines; approximation curve; algebraic surfaces;  $G^2$ -continuity

**摘要:** 给定空间不共面的四个有序数据点, 可以形成一个四面体。在四面体内, Bernstein-Bézier(B-B)形式定义两类正则实多项式代数曲面片, 一类是二次的, 一类是三次的。此两类曲面片在四面体内的交集为一条正则曲线段。先固定二次曲面片, 并得到其参数形式, 然后约简三次曲面片所对应的 Bernstein 系数, 使之成为带有三个形状调整的形状因子, 其中两个分别代表曲线段端点处的曲率, 另外一个作为形状的调整。利用二次曲面的参数形式, 由三次曲面片可得到曲线的隐参数约束形式, 从而得到曲线的参数形式。对给定的空间点列, 利用两个形状因子较容易的拼接出  $G^2$ -连续的逼近曲线, 突破了现行代数曲线生成方法, 即空间连续曲线均是通过三角形仿射变换, 由 B-B 形式生成的平面弧拼接而成。

**关键词:** 代数样条; 逼近曲线; 代数曲面;  $G^2$ -连续

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.23.046 **文章编号:** 1002-8331(2009)23-0165-05 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

在计算机辅助几何设计和图形学领域中, 大致有两种定义曲线的方法, 即参数形式和隐式形式, 由于参数形式的曲线和曲面构造简单、计算方便而成为几何设计的主流。与参数形式相比, 隐式形式提供了更多形状控制自由度, 可达更高连续性。另外, 隐式形式还具有几何运算独到的优越性<sup>[1]</sup>。所以, 近些年, 隐式形式的几种低次代数样条被广泛研究, 特别是构造光滑曲线等方面的优势已获得长足的发展。文献[2-5]着重对三个不共线点的平面仿射变换、限定在此三个点所形成的三角形的多项式曲线弧予以详细的讨论。这种较实用的曲线弧还是三次与低次多项式代数曲线。因而关于限定在三角形内的三次代数曲线的奇异、保形性的讨论日趋完备。其不足是这种代数曲线段是限定在给定的三角形内, 通过另外选取控制点的方法, 再由曲

线段拼接为插值或逼近数据点的连续曲线。也就是说, 这种连续曲线是由平面曲线段拼接而成, 特别是对空间连续曲线的构造, 这方法有其明显的不足。国内也有很多对三次代数曲线的研究, 文献[6-7]对基于几何约束的三次代数插值曲线有具体详细的研究, 但是这些是从几何约束出发来构造曲线。而该文的主要工作是把平面仿射变换推广到空间仿射变换, 类似三次参数形式 Bézier 曲线构造方法, 由四个空间有序数据点确定一段带形状因子曲线弧, 再由这些曲线段拼接成连续逼近曲线。从而突破了平面及三角形的限制, 使得每段曲线弧均是空间的, 并且曲线还可以写成带参数约束形式的曲线方程, 形式较直观, 参数几何意义也较明显。曲线段中的形状因子均是局部控制的, 并且可用弹性能法局部优化, 因子对曲线的调节是基本

**作者简介:** 彭丰富(1972-), 男, 博士, 研究方向: 计算机辅助几何设计和数值逼近。

**收稿日期:** 2008-10-13 **修回日期:** 2009-01-13

可见的,正是利用这些性质,可以构造出高几何连续性曲线。

### 1 空间三次代数曲线的构造及性质

设  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in R^3$  是四个空间不共面的有序数据点(共面的情况再后面再作补充)。由这四点所形成的四面体(tetrahedron)区域,记为  $T$ 。令  $P_i=(x_i, y_i, z_i)^T, i=1, 2, 3, 4, \forall P=(x, y, z)^T \in T, P=\sum_{i=1}^4 \alpha_i P_i$ , 其中  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i=1, 0 \leq \alpha_i \leq 1$ 。记  $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ , 其中  $\alpha$  是关于三个变量的函数。则  $\alpha$  为  $P$  在  $T$  中的重心坐标(见图 1),重心坐标与直角坐标有关系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

由于  $P_1, P_2, P_3, P_4$  线性无关,故  $4 \times 4$  的系数矩阵为非奇异矩阵。

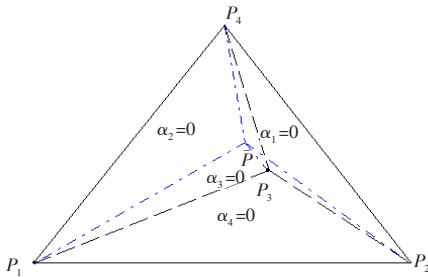


图 1 四面体重心坐标表示

在四面体  $T$  内的任意  $d$  次多项式  $F(p)$  可以表示为:

$$F(p) = \sum_{|\lambda|=d} b_\lambda B_\lambda^d(\alpha), \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T \in Z_+^4 \quad (2)$$

$$B_\lambda^d(\alpha) = \frac{d!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \lambda_4!} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \alpha_3^{\lambda_3} \alpha_4^{\lambda_4}, |d| \triangleq \sum_{i=1}^4 \lambda_i$$

令  $S(\alpha) = \sum_{|\lambda|=d} b_\lambda B_\lambda^d(\alpha), |\alpha|=1$  为  $T$  内的  $d$  次多项式,并定义  $S(\alpha) = b^T B^d, b$  就是由 Bernstein 系数所形成的列向量,  $B$  是由 Bernstein 基函数所形成的向量。  $F(p)$  和  $S(\alpha)$  分别表示在不同坐标系  $(o, x, y, z)$  与  $(o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  中的代数多项式。

同时式(1)通过简单的运算,它等价于:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 \\ y_1-y_4 & y_2-y_4 & y_3-y_4 \\ z_1-z_4 & z_2-z_4 & z_3-z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由于式(1)中的  $4 \times 4$  矩阵是非奇异的,从而式(3)的  $3 \times 3$  矩阵也是非奇异的,并且记为  $J$  的逆矩阵  $J^{-1}$ 。则式(3)为  $G_{12}$  仿射群的一个空间仿射变换,同时式(3)也等价于:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x-x_4 \\ y-y_4 \\ z-z_4 \end{bmatrix}, J = \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial(x, y, z)} \quad (4)$$

曲面在两种不同的坐标下有如下关系:

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = F(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$$

$$\nabla F(x, y, z) = J^T \nabla S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

在式(2)中,令,其共有 Bernstein 系数 20 个,考虑代数零等值曲面  $F(p)=0$ ,则自由度为 19,作为一个庞大的可调系数系统(见图 2)。这里仅仅考虑该文一种带有少量 Bernstein 系数的约简情形。另外一类是  $d=2$ ,它带有 10 个系数,经过条件限定之后形式较简单。这两类曲面片均限定在四面体  $T$  内。

#### 1.1 生成代数曲线的曲面片(Patches)

首先讨论  $d=3$  的情形,考虑的曲面片在  $T$  内经过点  $P_1, P_4$ 。根据仿射变换的性质,因而有  $b_{3000}=b_{0003}=0$ ,同时要求不经过点  $P_2, P_3$ ,则  $b_{0300}, b_{0030} \neq 0$ 。参考 A-spline 关于平面曲线的构造方法<sup>[3,8]</sup>,把三个侧面扩充为三个平面,类似平面三次代数曲线 Bernstein 系数选取方法,即  $b_{2100}, b_{2010}, b_{0102}, b_{0012}$  均为零,从而曲面片在  $\Delta P_1 P_2 P_4$  所在平面上的曲线在点  $P_1, P_4$  处以向量  $P_1 P_2, P_2 P_4$  为切方向,对  $\Delta P_1 P_3 P_4$  所在平面也有类似的结果。同时,设定  $b_{1110}=b_{1011}=b_{1101}=b_{0111}=0$ ,因为这些 Bernstein 系数对曲面片的整体形状的影响是有限的。另外,曲面片在  $T$  内不经过点  $P_2, P_3$ ,同样参照 A-spline 关于平面曲线的构造方法,取定  $b_{0300}=b_{0030}=-1$ 。因此,仅讨论取余下的 8 个非零参数(四面体在面  $\Delta P_1 P_2 P_3$  展开所对应的位置见图 2),具有 8 个自由度。代数表达式(包括系数的符号)取定为:

$$F(p) = S(\alpha) = -\alpha_2^3 - \alpha_3^3 + 3b_{1002} \alpha_1 \alpha_4^2 + 3b_{2001} \alpha_1^2 \alpha_4 - 3b_{1200} \alpha_1 \alpha_2^2 - 3b_{1020} \alpha_1 \alpha_3^2 - 3b_{0201} \alpha_2^2 \alpha_4 - 3b_{0021} \alpha_3^2 \alpha_4 - 3b_{0210} \alpha_2^2 \alpha_3 - 3b_{0120} \alpha_2 \alpha_3^2 \quad (5)$$

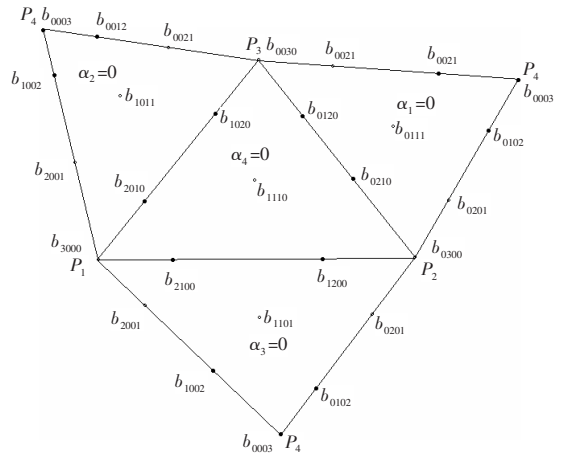


图 2 Bernstein 系数系统

另外,对式(5)的系数设定:  $\exists \lambda_j=2, j=1, 2, 3, 4$ , 则  $b_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \geq 0$ ,也就是说式(5)中  $b_{ijkl}$  的符号均为非负。其零等值曲面(zero contour)为:

$$F(p) = S(\alpha) = 0 \quad (6)$$

并记该曲面片为  $S(\alpha)$ 。则曲面经过点  $P_1, P_4$ ,不经过点  $P_2, P_3$ (图 3)。

定理 1 在  $T$  内,多项式代数方程(6)所确定的曲面片,该曲面片上的两点  $P_1, P_4$  的密切平面分别是由  $\Delta P_1 P_3 P_4$  和  $\Delta P_2 P_3 P_4$  所确定的平面。

这里,还构造另外一个二次的曲面片,令式(2)中  $d=2$ ,并且除  $b_{1010}=-1, b_{0101}=1$  外,其他 Bernstein 系数均为零。该多项式的零等值曲面方程为:

$$\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) \quad (7)$$

曲面片为经过线段  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$  的抛物双曲面(鞍马面)(两类曲面片具体形状见图4), 记这种直纹面片为  $S^*(\alpha)$ 。

### 1.2 空间样条的生成

由方程(6)所确定的曲面片  $S(\alpha)$  与式(7)所确定的  $S^*(\alpha)$  在  $T$  内的交为一曲线段, 记为  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 它插值  $P_1, P_4$  两点, 并具有以下性质(图4):

(1) 此两曲面片均为正则的, 不存在奇异点, 因而  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  也为正则曲线段(见文献[1]);

(2) 曲线在端点  $P_1, P_4$  处分别以  $P_1P_2, P_3P_4$  为切方向;

(3) 曲线在端点  $P_1, P_4$  处的曲率分别与  $\frac{b_{1200}}{b_{2001}}, \frac{b_{0021}}{b_{1002}}$  成正比(参见文献[8-9]), 当  $b_{1200}, b_{0021}$  为零时, 两端点处的曲率均为零, 这些性质为作曲线的高连续性拼接时提供了方便;

(4) 具有变差减少性质(Variation diminishing);

(5) 凸包性质(Convex hull);

(6) 曲线形状受到式(6)中的 Bernstein 系数的影响, 当其中的  $b_{2001}, b_{1002} \gg$  其他的 Bernstein 系数时, 曲线逼近控制四边形  $P_1P_2P_3P_4$  中间两点, 也就是逼近控制多边形。当  $b_{2001}, b_{1002} \ll$  其他的 Bernstein 系数时, 曲线逼近线段  $P_1P_4$ , 当  $b_{2001}, b_{1002} = 0$  时, 曲线退化为线段  $P_1P_4$ , 因此下面均假定  $b_{2001}, b_{1002} \neq 0$ 。

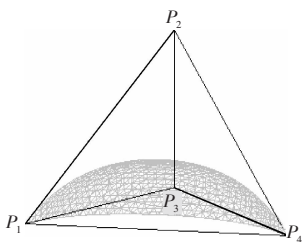


图3 三次代数曲面片

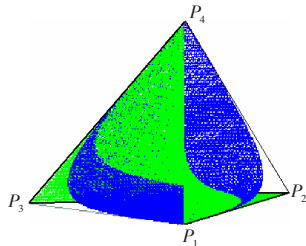


图4 控制四边形的样条曲线

同时, 为了方便讨论曲线  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 对式(7)参数化得到形式较简单的参数形式:

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1-u)(1-v) \\ \alpha_2 = (1-u)v \\ \alpha_3 = uv \end{cases} \quad u, v \in [0, 1] \quad (8)$$

曲面片  $S^*(\alpha)$  上的任意一点  $P$  对应于参数形式(8)的参数  $u, v$  的几何意义分别是:  $u$  表示在参数范围内线段  $P_1P_2$  的两端点沿线段  $P_1P_4, P_2P_3$  匀速滑动的距离;  $v$  表示在参数范围内线段  $P_1P_4$  的两端点沿线段  $P_1P_2, P_3P_4$  匀速滑动的距离。

曲线段  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  由参数形式(8)和代数方程(6)包含参数  $u, v$  的等价形式

$$\begin{aligned} &-[u^3 + (1-u)^3 + 3b_{0210}u(1-u)^2 + 3b_{0120}u^2(1-u)]v^3 + \\ &3[b_{1002}u^2(1-u) + b_{2001}u(1-u)^2](1-v)^3 - \\ &3[b_{1200}(1-u)^3 + b_{1020}u^2(1-u) + b_{0201}u(1-u)^2 + b_{0021}u^3]v^2(1-v) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

共同决定。由于上述 Bernstein 系数的选取使得  $v=1$  不满足式(9), 也就是  $v=1$  不在曲线段上, 令  $t = \frac{v}{1-v}, t \in [0, +\infty)$ , 则式(9)为:

$$\begin{aligned} &a(u)t^3 + b(u)t^2 + c(u) = 0 \\ &a(u) = -[u^3 + (1-u)^3 + 3b_{0210}u(1-u)^2 + 3b_{0120}u^2(1-u)] \\ &b(u) = -3[b_{1200}(1-u)^3 + b_{1020}u^2(1-u) + b_{0201}u(1-u)^2 + b_{0021}u^3] \\ &c(u) = 3[b_{1002}u^2(1-u) + b_{2001}u(1-u)^2] \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中有  $a(u) < 0, b(u) \leq 0, c(u) > 0$  成立。

定理2 实多项式方程(9)在上述 Bernstein 系数约束下, 参数  $v, t$  是由  $u$  唯一确定, 同时  $u$  为函数  $v, t$  的变量。

曲线段  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有类似三次 Bézier 样条的特点。对于给定四个有序不重复的四个点  $P_1P_2P_3P_4$ , 也就是控制四边形, 可以生成一段三次 Bézier 曲线, 该曲线插值于  $P_1, P_4$  两点, 并在这两端点以  $P_1P_2, P_3P_4$  为切线。同时  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有下面定理。

定理3 实系数多项式方程(9)在给定 Bernstein 系数  $b_{0210} = b_{1020}, b_{1200} = b_{0021}, b_{1020} = b_{0201}$  和  $b_{1002} = b_{2001}$  约束下, 则参数  $v$  在区间  $[0, 1]$  当  $u = \frac{1}{2}$  时取唯一的极大值。

证明 由定理2 可知式(10)中的是  $t$  关于  $u$  的一个函数, 同时  $t$  也是关于  $v$  的一个函数, 两边对变量  $u$  微分得:

$$a'(u)t^3 + b'(u)t^2 + [3a(u)t + 2b(u)]t'(u) + c'(u) = 0$$

可得  $t'(u) = 0$  当且仅当  $u = \frac{1}{2}$ , 又对函数  $v(u)$  有  $v(0) = v(1) = 0$ , 因而是最大值。

通常所用的参数样条, 其参数一般不具有几何意义, 或者几何意义不明显。隐式代数多项式曲线, 只有二次和三次的一个子集可以有理参数化。即使是在平面上对三次曲线完全参数化都是比较困难, 因为过于复杂, 空间里就更加了。所述限定在  $T$  内的代数曲线段  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  在端点曲率为零时, 同时  $b_{1020} = b_{0201} = 0$  时, 即  $b(u) \equiv 0$ , 也就是在自然边界条件下, 可以对其形式较为简单的有理参数化, 解方程(10)得:

$$v = \frac{\sqrt[3]{c(u)}}{\sqrt[3]{-a(u)} + \sqrt[3]{c(u)}}, u \in [0, 1]$$

代入式(8)可得曲线段  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  参数化形式, 并且参数是具有几何意义。下面再来讨论另外一种实用的情形。

### 2 带三个形状因子的代数曲线

式(10)和式(8)所定义的曲线段包含有 8 个 Bernstein 系数, 在实际应用中, 过多的调节因子不利于曲线的设计。所以给定式(10)  $a(u)$  中 Bernstein 系数  $b_{0210} = b_{0120} = 1$ , 则  $a(u) = 1, b(u)$  中的  $b_{1020} = b_{0201} = 0$ , 因为相对其他 Bernstein 系数而言, 这些系数对曲线段  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  的整体影响相对较小。因而, 式(10)转化为:

$$t^3 + 3[b_{1200}(1-u)^3 + b_{0021}u^3]t^2 - 3[b_{1002}u + b_{2001}(1-u)]t(1-u) = 0 \quad (11)$$

同时令  $b_{1200}/b_{1002} = \kappa_1, b_{0021}/b_{2001} = \kappa_2, b_{1200} = b_{2001} = \tau \neq 0$ , 因此式(11)仅余下三个形状因子  $\kappa_1, \kappa_2, \tau$ 。下面来考察该曲线的参数化及三个形状因子分别对曲线的影响。

#### 2.1 三个形状因子对曲线影响及参数化

方程(1)等价于:

$$t^3 + At^2 - B = 0 \quad (12)$$

其中  $A=3\tau[\kappa_1(1-u)^3+\kappa_2u^3], B=3\tau u(1-u)$ 。令  $p=-\frac{1}{3}A^2, q=\frac{2}{27}A^3-B$ 。

(1) 当  $\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{q}{3})^3 \geq 0$  时, 对应方程(12)有唯一的实根:

$$t(u)=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{1}{3}A$$

(2) 当  $\Delta < 0$  时, 对应方程(12)有三个实根, 必有  $p < 0$ , 设  $r =$

$$\frac{\sqrt{(-p)^3}}{3\sqrt{3}}, \theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(-\frac{q}{2r}\right)$$
。所要的解为:

$$t(u) = 2r^{\frac{1}{3}} \cos\theta - \frac{1}{3}A$$

解得  $v(u) = \frac{t(u)}{1+t(u)}$ , 代入方程(8)可得曲线关于参数  $u$  的形式。

式(11)中的  $\kappa_1, \kappa_2$  可以简单看作曲线  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  在端点  $P_1, P_4$  点处的曲率(参见文献[2])(事实上并非曲率, 还与四个顶点的选取有关), 因此  $\kappa_1(\kappa_2)$  对曲线影响最大的是参数  $u=0(1)$  两点附近, 即对应两端点附近, 影响沿曲线段减弱, 称此两因子为连续因子, 它主要应用于曲线的几何连续性拼接, 当  $\kappa_1, \kappa_2 \rightarrow \infty$  时, 则  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow$  线段  $P_1P_4$ , 当  $\kappa_1, \kappa_2 \rightarrow 0$  时, 则  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow$  由点列  $P_1, P_2, P_3, P_4$  所形成的折线(效果见图 6); 而因子  $\tau$  对整个曲线段产生相对较均匀的影响, 但是对曲线段的影响没有连续因子表现明显, 称为调节因子。当  $\tau \rightarrow 0$  时, 则  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow$  线段  $P_1P_4$ , 当  $\tau \rightarrow \infty$  时, 则  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow$  由点列  $P_1, P_2, P_3, P_4$  所形成的折线(效果见图 5)。

上面所考虑的数据点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  不共面的情形, 假设  $P_1P_2, P_3, P_4$  是仿射相关的, 可以取线段  $P_2P_3$  上的一点(不包含两 endpoint)  $P^*$ , 则点组  $P_1, P_2, P^*, P^*, P_3, P_4$  分别形成两个三角形, 在平面上关于代数样条的讨论已有较为详尽的论述(见文献[1-9]), 同样可以生成一条光滑的曲线段, 而且容易的达到  $G^2$ -连续。

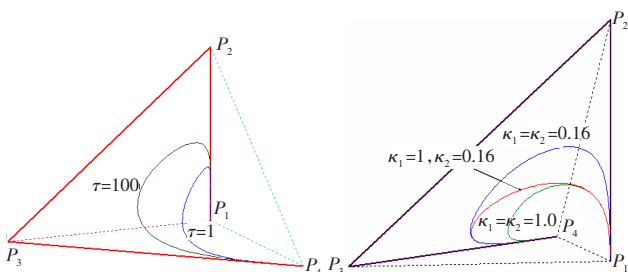


图 5 调节因子对曲线段的影响 图 6 连续因子对曲线段的影响

## 2.2 局部最小弹性能运用

对式(3)两边微分可得  $dP/du = J^{-1} d\alpha/du$ , 记  $M = J^{-T} J^{-1}$ 。曲线在  $(o, x, y, z)$  坐标系统中的弧长与参数  $u$  有关系:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left(\frac{dP}{du}\right)^T \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{d\alpha}{du}\right)^T J^{-T} J^{-1} \left(\frac{d\alpha}{du}\right) = \alpha_u^T M \alpha_u \quad (13)$$

应用曲线的弹性(elastica)能法<sup>[10-11]</sup>:

$$E_{local} = \int_I (\beta + \gamma \kappa^2) ds \quad (14)$$

其中  $\beta$  表示曲线的拉伸(stretching)能,  $\gamma \kappa^2$  表示曲线的弯曲

(bending)能。由式(13)代入式(14)可得:

$$E_{local} = \int_I (\beta + \gamma \kappa^2) ds = \int_0^1 [\alpha_u^T M \alpha_u]^{1/2} (\beta + \gamma \kappa^2) du$$

$$\kappa^2 = \frac{|J^{-1} \alpha_u \times J^{-1} \alpha_{uu}|^2}{|J^{-1} \alpha_u|^3} = \frac{(J^{-1} \alpha_u \times J^{-1} \alpha_{uu}) \cdot (J^{-1} \alpha_u \times J^{-1} \alpha_{uu})}{(J^{-1} \alpha_u \times J^{-1} \alpha_u)^{\frac{3}{2}}}$$

由 Lagrange 恒等式易知:

$$\kappa^2 = \frac{\alpha_u^T M [\alpha_u \alpha_{uu}^T - (\alpha_u \alpha_{uu}^T)^T] M \alpha_{uu}}{(\alpha_u^T M \alpha_u)^{\frac{3}{2}}}$$

从而:

$$E_{local} = \int_0^1 [\alpha_u^T M \alpha_u]^{1/2} (\beta + \gamma \frac{\alpha_u^T M [\alpha_u \alpha_{uu}^T - (\alpha_u \alpha_{uu}^T)^T] M \alpha_{uu}}{(\alpha_u^T M \alpha_u)^{\frac{3}{2}}}) du$$

利用局部能量最小方法, 给定两个能量因子  $\beta, \gamma$ , 可得此三个形状因子的一个关系。关系等式由

$$f(\kappa_1, \kappa_2, \tau) = \frac{dE_{local}(\kappa_1, \kappa_2, \tau)}{d\tau} = 0$$

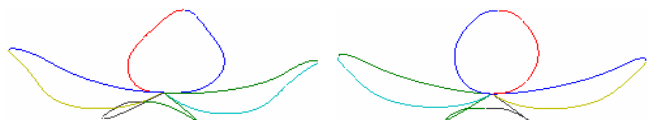
确定。最后只剩下两个形状因子的代数曲线, 但是整个符号计算过程非常复杂, 并不一定有解析表达式, 所以采取数值计算方法, 并且从物理学的角度来看, 数值求解必定有唯一正实数解, 只是在某些情况, 解值相对比较大或比较小, 具体情况具体分析。

## 3 给定数据点列构造连续曲线及算例

给定数据点列  $\{P_i, i=1, 2, \dots, n\}$  生成光滑逼近曲线方法与 Bézier 曲线方法基本一致, 均是通过增加拼接点, 使得拼接点位于两个相邻数据点所形成的线段中(不包含两个 endpoint)。譬如, 对第一条曲线段, 选取线段  $P_3P_4$  中一点  $P_4^{(1)}$  作为拼接点(这种拼接点的选取具有一个自由度, 没有特殊要求的情况下, 取线段的中点即可), 以  $P_1P_2P_3P_4^{(1)}$  四个点, 若该四点不共面, 则利用该文所述方法可以生成一段曲线, 该曲线段带有三个形状因子  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}, \tau^{(1)}$ , 其中  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$  简单的代表曲线在  $P_1, P_4^{(1)}$  两点处的曲率,  $\tau^{(1)}$  作为调节曲线形状的调节因子, 也可以通过能量法确定。继续选取线段  $P_5P_6$  上一点  $P_4^{(2)}$  作为拼接点, 以  $P_4^{(1)}P_4P_5P_4^{(2)}$  四个点, 同样可以生成一段曲线, 该曲线段同样有形状因子  $\kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}, \tau^{(2)}$ 。假设在拼接点  $P_4^{(1)}$  处选取形状因子  $\kappa_1^{(2)} = \kappa_2^{(1)}$ , 一直继续下去, 假若出现四点共面的情况, 则可对数据点作适当的选取或者直接由平面上分解成两个三角形, 按照三角形仿射变换的代数处理方法, 同样可实现  $G^2$ -连续<sup>[12]</sup>。直至对所有数据点生成整条逼近数据点的  $G^2$ -连续曲线。

事实上, 在计算过程中, 并不是对每个曲线段均要进行一次代数方程的求解过程。假设给定的是海量数据, 编程时, 首先赋值所有的  $\{\kappa_1^{(j)}, \kappa_2^{(j)}, \tau^{(j)}, j=1, 2, \dots, n\}$  对应唯一初始值, 对给定的初始值, 求解一次, 并存储结果。然后对不同的数据点组进行仿射变换的逆变换, 就可以生成整个生成曲线。再对曲线不满意的方作人机交互式修改, 对一个  $\tau^{(j)}$  的修改只影响一段曲线, 对  $\kappa_1^{(j)}$  的修改只影响相邻的两段曲线。

算例是一个以四个花瓣为花瓣图形作为例图(见图 7、8),



(a)  $\tau=100, \kappa_1=\kappa_2=0.5$  (b)  $\tau=10, \kappa_1=1.0, \kappa_2=0.125$

图7 对应不同的形状因子花瓣生成图形

每个花瓣由两个对称的空间曲线段构成, 每条曲线段是由四个控制点按该文所述方法生成, 其中连续因子  $\kappa_1, \kappa_2$  分别表示曲线段在花心处和瓣尖处的曲率,  $\tau$  作为调节因子, 具体图形效果见图 7。图 8 的调节因子  $\tau$  是由相应的连续因子  $\kappa_1, \kappa_2$  按照局部最小能量法求出, 所求方法是用 Cotes 积分公式得到, 对应的能量因子取  $\beta=\gamma=1$ 。

#### 4 结论

因为参数形式具有简单易用的特点, 所以将隐式形式表示成参数形式是十分有意义的, 但是这种参数化并非总能实现。所考虑的以四个不共面的空间数据点生成曲线样条的方法, 同时充分利用这两种表示法的优越性, 在给定的区域内, 以两个分别是二次和三次的代数多项式隐代数曲面的交集生成一条曲线段, 充分考虑二次曲面的参数形式, 从而得到曲线的参数表示形式。并且可以通过局部形状因子对曲线给予调整, 其中的两个形状因子是有明显的几何意义, 可直接用于生成  $G^2$ -连续曲线。总体来说, 该方法形式较简单, 而且计算可行。

#### 参考文献:

[1] 徐国良. CAGD 中的隐式曲线和曲面[J]. 数值计算与计算机应用, 1997(2): 114-123.  
 [2] Paluszny M, Patterson R R. Geometric control of  $G^2$ -cubic a-spline[J]. Computer Aided Geometric Design, 1998, 15(3): 161-187.

(上接 153 页)

表 2 随机分布数据实验结果

次数	C-均值算法	GA	KGA	该文算法
1	101.455	101.343	101.572	101.278
2	101.572	101.298	101.507	101.278
3	101.818	101.309	101.583	101.278

从表 1 和表 2 中, 不难看出所给出的混合算法的局部收敛速度和全局收敛速度都明显优于 GA 和 KGA 算法。特别是对大规模、完全随机分布的数据聚类问题, 其优越性更加明显。

#### 6 结论

提出了一种基于免疫遗传算法的 FCM 算法。一方面, 将 FCM 算法作为一个搜索算子, 使得该算法具有局部搜索能力强, 运算量小的特点, 从而能加快算法的局部寻优速度; 另一方面, 结合了免疫算法的优点, 使得该算法具有免疫系统的记忆功能和抗体的促进和抑制功能, 加快了搜索速度, 保证了个体的多样性, 克服了 GA 未成熟收敛的现象。因此, 算法具有较快的收敛速度和较高的收敛精度。实验结果也表明, 该算法能够有效地收敛于全局最优解。



图8 调节因子由对应的连续因子按局部最小能量法用 Cotes 公式求得  $\kappa_1=5.0, \kappa_2=1.0$

[3] Bajaj C, Xu G.A-splines: Local interpolation and approximation using  $C^k$ -continuous piecewise real algebraic curves [C]//Computer Science Technical Report, Purdue University, 1992: 92-144.  
 [4] Bajaj C, Xu G. Data fitting with cubic a-spline [C]//Gigante M, Kunii T. Proceedings of Computer Graphics International, CGI'94, World Scientific Publishing Co, Melbourne, Australia, 1996.  
 [5] Bajaj C, Xu G.A-splines: Local interpolation and approximation using  $C^k$ -continuous piecewise real algebraic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(6): 557-578.  
 [6] 孙燮华. 关于具有几何约束的三次代数曲线的插值[J]. 计算机学报, 2003, 26(9): 1201-1205.  
 [7] 张三元, 孙守迁. 基于几何约束的三次代数曲线插值[J]. 计算机学报, 2001, 24(5): 509-515.  
 [8] Paluszny M, Patterson R R. Geometric control of  $G^2$ -cubic A-spline [J]. Computer Aided Geometric Design, 1998, 15(3): 161-287.  
 [9] Paluszny M, Patterson R R. Curvature continuous cubic algebraic splines [C]//Proc of SPIE, Curves & Surfaces in Computer Vision and Graphics III, 1992, 1830: 48-57.  
 [10] Jou E, Han W. Elastica and minimal-energy splines [C]//Laurent P, Le Méhauté A, Schumaker L. Curves and Surfaces, International Conference on Curves and Surfaces, Chamonix -Mont -Blanc, France, 1990: 1-4.  
 [11] Mumford D. Elastica and computer vision [M]//Bajaj C. Algebraic Geometry and Its Applications. Berlin: Springer, 1994: 491-506.  
 [12] 彭丰富, 韩旭里. 一类  $G^2$  连续分段四次代数样条 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(9): 1421-1425.

#### 参考文献:

[1] Dinda P. Online prediction of the running time of tasks [C]//Proceedings of 10th IEEE International Symposium on High Performance Distributed Computing. San Francisco, CA, USA: IEEE Press, 2001: 383-384.  
 [2] Khotanzad A, Sadek N. Ultra-scale high-speed network traffic prediction using combination of neural networks [C]//Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. Portland, OR, USA: IEEE Press, 2003: 1071-1075.  
 [3] 张雷, 李人厚. 人工免疫 C-均值聚类算法 [J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(8): 836-839.  
 [4] de Castro L N, von Zuben F J. Learning and optimization using the clonal selection principle [J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2002, 6(3): 239-251.  
 [5] 杨峰, 柳林, 唐贤瑛, 等. 基于免疫遗传算法的物流配送车辆路径优化问题研究 [J]. 计算机应用与软件, 2007, 24(5): 50-51.  
 [6] 高坚. 基于 C-均值和免疫遗传算法的聚类 [J]. 计算机工程, 2003, 29(12): 65-66.  
 [7] 高隽. 智能信息处理方法导论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.  
 [8] 王耀南. 智能信息处理技术 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.  
 [9] 雷英杰, 张善文. MATLAB 遗传算法工具箱及应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005.