

# 用边界元法分析非均匀介质中的传输线\*

郑勤红, 曾 华, 蒋绍全, 蔡武德

(云南师范大学 物理与电子信息学院, 云南 昆明 650092)

摘 要: 从静电场边值问题的积分解出发, 推导出用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题的矩阵表达式, 给出传输线电容参数的计算公式, 介绍用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题的基本原理和求解过程。对两类传输线的计算结果表明: 用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题, 不仅具有较高的计算精度, 而且可以很方便地应用于各类复杂截面分区均匀介质填充传输线问题的工程设计与计算, 边界元法是求解分区均匀介质填充传输线问题的一种有效方法。

关键词: 边界元; 分区均匀介质; 传输线; 电容

中图分类号: TN01; TN814; O441

文献标识码: A

在雷达、导航、通讯系统及电气设备中, 一般都需要通过传输线测量和控制各种信号。当传输线受外界电磁场激励时, 传输线上的信号会受到干扰。在计算这种干扰时, 首先必须知道传输线的电感、电容等特性参数, 所以对传输线电容的准确计算至关重要, 只有通过计算才能确定电气电子设备中各导体的自电容和耦合电容值, 为各类器件的准确设计提供理论依据。因此, 几十年来, 有关传输线特性参数计算方法的研究一直在进行, 有限元、边界元、矩量法等数值方法成为求解传输线特性参数的主要方法。但以往的研究工作主要集中在用边界元、矩量法、多极理论等方法求解均匀(单一)介质填充传输线问题<sup>[1-3]</sup>, 用有限元法、矩量法、保角变换近似法等方法求解分区均匀介质填充传输线问题<sup>[4-7]</sup>, 用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题却未见报导。工程实际中的传输线一般都通过绝缘包层或介质支架等将导体与导体隔离开来, 亦即, 工程实际中的传输线基本属于分区均匀(或非均匀)介质中的传输线。据此, 本文提出用边界元法计算分区均匀介质填充传输线的电容, 介绍用边界元法求解分区均匀介质填充静电场边值问题的基本原理和求解过程, 给出两类分区均匀介质填充传输线的电容计算结果。

## 1 用边界元法分析分区均匀介质填充传输线的基本原理

图 1 所示是填充  $M$  种分区均匀介质的传输线截面示意图。图中,  $J$  是第  $J$  个区域( $J$ )中介质的电容率,  $l_{J00}$  是  $J$  中给定电势(第一类边界条件)的边界,  $l_{J01}$  是  $J$  中给定电势法向导数(第二类边界条件)的边界,  $l_{Jm}$  是第  $J$  个区域  $J$  与第  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, M, m \neq J$ ) 个区域  $m$  的分界线。在区域  $J$  中, 其静电场边值问题为

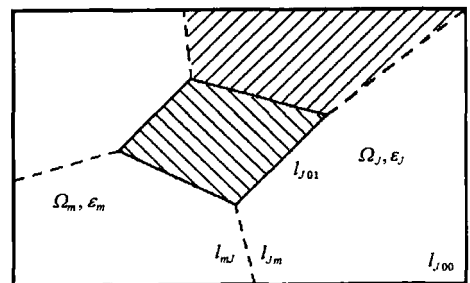


Fig. 1 Transmission line filled with piecewise homogeneous dielectric

图 1 分区均匀介质传输线截面示意

$$\begin{cases} \nabla^2 u_J = 0, \\ u_J |_{l_{J00}} = g(x, y)_J, \quad \frac{\partial u_J}{\partial n} \Big|_{l_{J01}} = q(x, y) \\ u_J |_{l_{Jm}} = u_m |_{l_{mJ}}, \quad \frac{\partial u_J}{\partial n} \Big|_{l_{Jm}} = \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_{l_{mJ}} \end{cases} \quad (m, J = 1, 2, \dots, M; m \neq J) \quad (1)$$

利用格林定理可推导出式(1)的积分解为

\* 收稿日期: 2004-08-10; 修订日期: 2005-05-09

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(10365002); 云南省自然科学基金资助课题(2004A0028M); 云南省中青年学术和技术带头人培养计划资助课题(2000 YP16); 云南省高校教学科研带头人培养计划资助课题; 云南省教委自然科学基金资助课题(03Z321A)

作者简介: 郑勤红(1962—), 男, 博士后, 教授, 主要从事电磁理论及应用研究; E-mail: Zheng\_qh@yahoo.com.cn.

$$C_P u_J(r) = \int_{l_j} (G \frac{\partial u}{\partial n} - u_j \frac{\partial G}{\partial n}) dl \tag{2}$$

式中:  $l_j = l_{j00} + l_{j01} + l_{jS}$ ,  $l_{jS} = \sum_{m=1}^M l_{jm}$ ;  $G = -\frac{1}{2} \ln |r - r'|$  是二维格林函数,  $r$  是场点位置矢量,  $r'$  是源点位置矢量;  $C_P$  是积分系数, 它与场点  $P$  的位置有关, 即

$$C_P = \begin{cases} 0, & P \text{ 点在 } l_j \text{ 外} \\ 1/2, & P \text{ 点在 } l_j \text{ 上} \\ 1, & P \text{ 点在 } l_j \text{ 内} \end{cases} \tag{3}$$

按照边界元法的基本步骤, 将  $l_{j00}$  (给定电势的第一类边界) 剖分为  $N_{j00}$  个常数单元,  $l_{j01}$  (给定电势法向导数的第二类边界) 剖分为  $N_{j01}$  个常数单元,  $l_{jm}$  ( $l_j$  与  $l_m$  的分界线) 剖分为  $N_{jm}$  个常数单元, 则  $l_j$  中边界单元总数为  $N_j = N_{j00} + N_{j01} + N_{jS}$ ,  $N_{jS} = \sum_{m=1}^M N_{jm}$ 。由(2), (3)两式可得第  $i$  个边界单元所对应的代数方程为

$$\sum_{k=1}^{N_j} H_{jik} u_{jk} + \sum_{k=1}^{N_j} G_{jik} (\frac{\partial u}{\partial n})_{jk} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_j) \tag{4}$$

式中:  $G_{jik} = -\frac{1}{2} \int_{l_{jk}} \ln |r_i - r_k| dl$ ;  $H_{jik} = \frac{1}{2} \int_{l_{jk}} \frac{\partial}{\partial n} (\ln |r_i - r_k|) dl$  ( $i \neq k$ ),  $H_{jik} = \frac{1}{2} \int_{l_{jk}} \frac{\partial}{\partial n} (\ln |r_i - r_k|) dl - \frac{1}{2}$  ( $i = k$ )。

式(4)中,  $l_{j00}$  上的  $N_{j00}$  个  $u_{jk}$ ,  $l_{j01}$  上的  $N_{j01}$  个  $(\frac{\partial u}{\partial n})_{jk}$  值已由边界条件给出, 现将它们分别用  $u_{j00}$  ( $N_{j00}$ ) 和  $Q_{j00}$  ( $N_{j01}$ ) 表示;  $l_{j00}$  上有  $N_{j00}$  个  $(\frac{\partial u}{\partial n})_{jk}$  值,  $l_{j01}$  上的  $N_{j01}$  个  $u_{jk}$  值为未知量, 将它们分别用  $Q_{j01}$  ( $N_{j00}$ ) 和  $u_{j01}$  ( $N_{j01}$ ) 表示; 分界线上的  $N_{jS}$  个  $(\frac{\partial u}{\partial n})_{jk}$  和  $N_{jS}$  个  $u_{jk}$  为未知量, 将它们分别用  $Q_{jS}$  ( $N_{jS}$ ) 和  $u_{jS}$  ( $N_{jS}$ ) 表示。则方程(4)可用分块矩阵表示为

$$[H_{j00} \quad H_{j01} \quad H_{jS}] \begin{bmatrix} u_{j00} (N_{j00}) \\ u_{j01} (N_{j01}) \\ u_{jS} (N_{jS}) \end{bmatrix} + [G_{j00} \quad G_{j01} \quad G_{jS}] \begin{bmatrix} Q_{j00} (N_{j01}) \\ Q_{j01} (N_{j00}) \\ Q_{jS} (N_{jS}) \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

式中:  $H_{j00}$ ,  $H_{j01}$ ,  $H_{jS}$  分别为  $N_j \times N_{j00}$ ,  $N_j \times N_{j01}$ ,  $N_j \times N_{jS}$  阶的分块矩阵;  $G_{j00}$ ,  $G_{j01}$ ,  $G_{jS}$  分别为  $N_j \times N_{j01}$ ,  $N_j \times N_{j00}$ ,  $N_j \times N_{jS}$  阶的分块矩阵。

将未知项放在方程左边, 已知项移到方程右边, 则方程(5)变为

$$[G_{j01} \quad H_{j01} \quad G_{jS} \quad H_{jS}] \begin{bmatrix} Q_{j01} (N_{j00}) \\ u_{j01} (N_{j01}) \\ Q_{jS} (N_{jS}) \\ u_{jS} (N_{jS}) \end{bmatrix} = [-H_{j00} \quad -G_{j00} \quad O_0] \begin{bmatrix} u_{j00} (N_{j00}) \\ Q_{j00} (N_{j01}) \\ O(N_{jS}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

方程(6)中  $O_0$  为  $N_j \times N_{jS}$  阶零矩阵,  $O(N_{jS})$  为  $N_{jS} \times 1$  阶零矩阵。方程(6)也可简化为

$$A_J X_J = C_J \quad (A_J = A_{N_j \times (N_j + N_{jS})}, X_J = X_{(N_j + N_{jS}) \times 1}, C_J = C_{N_j \times 1}) \tag{7}$$

方程(7)是一个亚定方程( $N_j$  个方程,  $N_j + N_{jS}$  个未知量), 无法单独直接求解。

对每一个均匀区域均可获得形如式(7)的方程组, 因此, 图 1 所示传输线的边界元方程为

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & A_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_M \end{bmatrix} \tag{8}$$

由式(1)可知, 在两种介质分界面处, 电势及其法向导数必须满足一定的约束条件, 所以, 式(7)中各个均匀区域中的变量彼此并不是完全独立的。在两种介质分界面处, 强加式(1)中的边值关系

$$u_{jk} |_{l_{jm}} = u_{mk} |_{l_{mj}}, \quad j \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{jk} \Big|_{l_{jm}} = -m \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{mk} \Big|_{l_{mj}} \quad (m, j = 1, 2, \dots, M; m \neq j) \tag{9}$$

则方程(8)变为

$$AX = C \tag{10}$$

式中： $A$  为  $N \times N$  阶矩阵， $X$  为  $N \times 1$  阶矩阵， $C$  为  $N \times 1$  阶矩阵  $N = \sum_{j=1}^M N_j$ 。未知量数正好等于方程数，所以，方程(10)即为分区均匀介质填充静电场边值问题的边界元方程。求解方程(10)即可获得分区均匀介质填充传输线的电容

$$C = Q/V = \sum_{k=K_0}^{K_1} (k) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_k / V \tag{11}$$

式中： $V$  为传输线导体间的电势差； $K_0, K_1$  为导体边界线剖分单元的起止编号； $(\frac{\partial u}{\partial n})_k$  是方程(10)的计算结果， $(k)$  为对应区域的电容率。

## 2 计算实例

例 1:图 2 所示为分区均匀介质填充偏心传输线的截面示意图,半径为  $r$  的圆柱形内导体被相对电容率为  $\epsilon_r$ 、张角为  $2\theta$  的介质支撑,空心圆柱形外导体的半径为  $R$ ,两圆柱导体间的偏心距离为  $d$ ,文献[4]提出用保角变换近似逼近法分析该传输线。当  $d=0$  时,其电容具有如下形式的解析解

$$C = 2\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + \epsilon_0) / \ln(R/r) \tag{12}$$

利用前面所述边界元法将边界剖分为 180 个常数单元,某些规格尺寸下( $\epsilon_r=2.0, r/R=0.5$ )的计算结果见表 1(表 1 中  $C_t$  为理论值,  $C_b$  为边界元计算结果)。

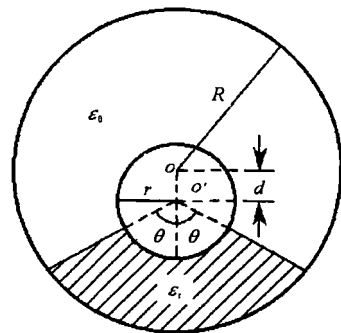


Fig. 2 Eccentric coaxial cable partially filled with dielectric

图 2 分区均匀介质填充偏心传输线

表 1 分区均匀介质填充偏心传输线的电容 (pF/m)

Table 1 Capacitance of eccentric coaxial cable partially filled with dielectric (pF/m)

$\theta / (^\circ)$		10	20	30	40	50	60	70	80	90	120	150
$d=0$	$C_t$	84.68	89.14	93.59	98.05	102.51	106.96	111.42	115.88	120.33	133.70	147.08
	$C_b$	84.79	89.22	93.70	98.15	102.60	107.06	111.52	115.98	120.45	133.87	147.32
$d/R=0.2$	$C_b$	93.92	100.37	106.72	112.84	118.72	124.33	129.66	134.71	139.51	152.56	164.16
$d/R=0.4$	$C_b$	148.96	164.66	178.79	191.10	201.60	210.56	218.25	224.90	230.74	244.88	256.20

由表 1 可见,对于有解析解的情况( $d=0$ ),边界元计算结果与理论值之间的最大相对误差不超过 0.17%。由于全部结果是用同一通用程序计算的,所以可以确信表 1 中的边界元计算结果均具有相同的精度,可作为传输线的设计参数使用。另外,表 1 中的结果也与文献[4]的结果完全一致。

例 2:图 3 所示是由两平行圆柱导体所组成的传输线的截面示意图,半径为  $r$  的两圆柱形导体被相对电容率为  $\epsilon_r$ 、外半径为  $R$  的绝缘层所包围,形成分区均匀介质填充非屏蔽传输线。当  $h/R=1.0$  时,文献[5]提出用矩量法,文献[6,7]则提出用保角变换近似方法求解其电容。利用前面所述边界元法,将边界剖分为 200 个常数单元( $\epsilon_r=4.0$ ),边界元法计算结果见表 2。

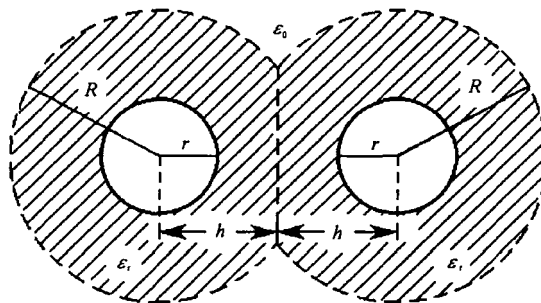


Fig. 3 Transmission line of parallel dielectric-coated cylinders

图 3 平行绝缘圆柱导体传输线

表 2 平行绝缘圆柱导体传输线的电容 (pF/m)

Table 2 Capacitance of transmission line of parallel dielectric-coated cylinders (pF/m)

$r/R$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
$h/R=1.0$	28.28	34.29	39.65	45.16	51.36	59.27	69.72	86.25	120.77	164.46
$h/R=0.95$	30.03	37.01	43.46	50.40	58.71	69.78	86.98	119.70	236.38	-
$h/R=0.85$	32.92	41.59	50.12	59.98	72.90	92.48	130.35	257.73	-	-

将表 2 中  $h/R=1.0$  时的结果与文献[5~7]的计算结果相比较可知,几种方法的计算结果完全一致。另外,由表 2 中的结果可以看出:当绝缘包层发生某种变形( $h/R \neq 1.0$ )时,对电容的影响是非常大的,因此,在这类传输线的工程设计中,必须考虑由于绝缘包层变形所引起的特性参数的变化。

### 3 结 论

本文针对分区均匀介质填充传输线问题的特点,提出用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题,推导出用边界元法求解分区均匀介质填充传输线问题的矩阵表达式,给出电容参数的计算公式。实例计算结果表明:用边界元法计算分区均匀介质填充传输线问题最突出优点是变量数少,计算精度高;计算精度完全能满足工程设计要求,可用同一通用程序求解各种复杂截面分区均匀介质填充传输线问题。

### 参考文献:

- [1] 华光,殷连生.同轴双线型加载传输线特性阻抗的计算[J].微波学报,1996,12(4):264—270. (Hua G, Yin L S. Determination of the characteristic impedance of coaxial hybrid loaded transmission line. *Journal of Microwaves*, 1996, 12(4):264—270)
- [2] 孙蓓云,郑振兴,周辉,等.多芯屏蔽电缆电容的矩量法求解[J].强激光与粒子束,2000,12(6):749—752. (Sun B Y, Zheng Z X, Zhou H, et al. Method of moment for calculating capacitance of shielded multiconductor cable. *High Power Laser and Particle Beams*, 2000, 12(6):749—752)
- [3] 郑勤红,解福瑶,蔡武德.多芯屏蔽电缆电容的多极理论分析[J].强激光与粒子束,2003,15(10):999—1002. (Zheng Q H, Xie F Y, Cai W D. Multipole theory analysis on the capacitance of shielded multiconductor cable. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, 15(10):999—1002)
- [4] Das B N, Chakrabarty S B, Rao K S R. Effect of dielectric support on the inner conductor of eccentric coaxial line[J]. *IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility*, 1995, 37(1):71—74.
- [5] Savage J S, Smith W T. Capacitance calculations for cable harnesses using the method of moments[J]. *IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility*, 1995, 37(1):131—137.
- [6] Das B N, Chakrabarty S B, Rao K S R. Capacitance of transmission line of parallel cylinders in the presence of dielectric coating[J]. *IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility*, 1995, 37(1):94—96.
- [7] Das B N, Das S, Parida D. Capacitance of transmission line of parallel cylinders with variable radial width[J]. *IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility*, 1998, 40(4):325—330.

## Capacitance calculation for transmission line filled with piece wise homogeneous dielectric using boundary element method

ZHENG Qin-hong, ZENG Hua, JIANG Shao-quan, CAI Wu-de

(School of Physics and Electronic Information, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

**Abstract:** Boundary element method(BEM) is presented as a new approach for the analysis and design of various transmission lines filled with piecewise homogeneous dielectric. The solution of the boundary-value problem associated with transmission lines filled with piecewise homogeneous dielectric is transformed into a matrix formula of BEM. The procedure to obtain the capacitance is described. Two representative computational examples, eccentric coaxial cable partially filled with dielectric and transmission line of parallel dielectric-coated cylinders, are given to validate the theory, and to demonstrate the accuracy and flexibility of BEM.

**Key words:** Boundary element method; Piecewise homogeneous dielectric; Transmission line; Capacitance