

文章编号: 1001-4322(2002)05-0749-04

# 有限磁场作用下等离子体背景中的切伦可夫不稳定性研究\*

李 伟<sup>1</sup>, 谢鸿全<sup>1,2</sup>, 魏彦玉<sup>1</sup>, 刘盛纲<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学 高能电子学研究所, 四川 成都 610054; 2. 西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621002)

**摘 要:** 较高密度的相对论电子束注入等离子体中将会形成离子通道,在考虑了离子通道的影响下,导出圆柱波导中更普遍的色散方程,并计算出考虑离子通道和不考虑离子通道效应时的色散关系及电磁波的增长率。

**关键词:** 有限磁场; 离子通道; 色散方程; 波增长率

**中图分类号:** TN128 **文献标识码:** A

在八十年代末期,随着微波器件向更高功率和频率的发展,人们把研究的热点转向了相对论电子束与等离子体的相互作用,以获得强烈的电磁辐射<sup>[1,2]</sup>,包括高功率等离子体微波器件和高功率的激光器件。这样等离子体就存在于这些器件中,它不仅参与整个相互作用过程,而且还成为电子束高效传输的通道,人们把这种通道称为等离子体通道<sup>[3]</sup>。它可以通过两种方式形成:直接由外部注入等离子体,或者充入一定压力的气体,再利用高速电子束的前端或强激光使气体电离形成系统内的等离子体。当电子束穿过等离子体时又产生了所谓的离子通道<sup>[4,5]</sup>。这是一个正离子背景通道,是由电子束的头部将等离子体电子排除或部分排除后获得的一个由相对静止的离子构成的区域,其半径为<sup>[6]</sup>  $R_i = R_b \sqrt{n_b/n_p}$ ,  $R_b$  是电子束半径,  $n_b$  和  $n_p$  分别是电子和等离子体密度。而在该通道外仍为等离子体通道。电子束能顺利和高效地传输,起本质作用的是离子通道而非等离子体通道。因为该通道能提供一个正电荷的背景,使电子束的空间电荷被有效地中和而聚束传输并顺利通过注-波互作用空间。

在本文中,所研究的系统是有限磁场作用下的等离子体填充的圆柱介质波导,为处理问题的方便,在考虑离子通道的时候,不考虑通道的振荡,且离子通道内残留的等离子体电子较少,几乎是一纯正离子的背景通道。

## 1 磁化等离子体填充介质波导中的电磁波传播理论

本文所研究的系统结构如图 1 所示,在圆柱体介质波导的中心处通过一半径为  $R_b$  的实心电子注,其初速度为  $v = v_0 e_z$ ,沿波导的中心轴线方向加一引导磁场  $B_0$ ,电子束穿过等离子体后形成如图所示的离子通道(区域 I)。图中,  $R_i$  是离子通道半径,  $R_p$  是填充的等离子体的半径,  $R_c$  是介质波导的半径。区域 I 表示实心电子注内的区域 ( $0 < r < R_b$ ), 区域 II 表示离子通道区域 ( $R_b < r < R_i$ ), 区域 III 表示等离子体里面的区域 ( $R_i < r < R_p$ ), 区域 IV 表示介质区域 ( $R_p < r < R_c$ )。

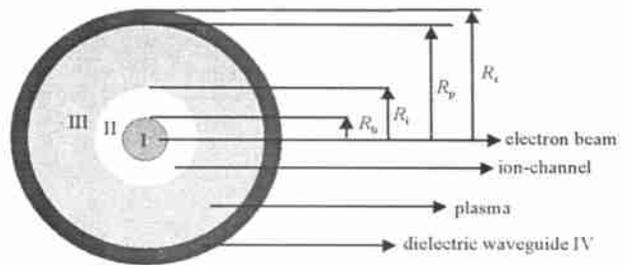


Fig. 1 Cross section of plasma-filled cylindrical waveguide  
图 1 等离子体填充光滑波导系统的横截面示意图

磁化等离子体介电张量为

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & j 2 & 0 \\ 0 & -j 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_1 = 1 - \frac{2}{p} / (\omega^2 - \omega_c^2), \quad \epsilon_2 = -\frac{2}{p} \omega / (\omega^2 - \omega_c^2), \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{2}{p} / \omega^2 \quad (1)$$

\* 收稿日期:2002-03-01; 修订日期:2002-04-22  
基金项目:国防科技基础研究基金资助课题(99.JS.10)  
作者简介:李 伟(1966-),男,博士生,主要从事微波等离子体电子学和高功率微波的研究;E-mail:2000liwei@263.net。

式中:  $\omega_p = (N_p e^2 / m_0 \epsilon_0)^{1/2}$  是电子等离子体频率;  $\omega_c = eB_0 / m_0$  是电子回旋频率;  $\omega$  为电磁波的角频率;  $e$  为电子的电量;  $j$  为单位虚数;  $m_0$  是电子质量;  $N_p$  为电子的密度;  $B_0$  为纵向磁场的大小;  $\epsilon_0$  为自由空间的介电常数。

假定等离子体波导中波的传播因子为  $\exp\{j(\omega t - k_z z)\}$ , 从麦克斯韦方程组可得<sup>[1,2]</sup>

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + a E_z = b H_z + j \mu_0 J_z - \frac{j k_z}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 H_z + c H_z = d E_z - (\nabla \times \mathbf{J}) - \frac{2}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (2)$$

式中<sup>[1,7]</sup>:  $\nabla^2 = \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2$ ;  $k^2 = \omega^2 / c^2$ ;  $a = (k^2 \epsilon_1 - k_z^2) / \epsilon_0$ ;  $b = j k_z \mu_0 / \epsilon_0$ ;  $c = -k_z^2 + k^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) / \epsilon_0$ ;  $d = -j k_z \epsilon_0 \omega^2 / \epsilon_0$ 。

从(2)式可看到 TM 模和 TE 模耦合在一起而不能单独存在, 也就是耦合为 EH 模或 HE 模。  $J_z$  和  $\epsilon_0$  分别是电子注电流密度和电荷密度, 它们都可根据电子运动方程和连续方程用  $E_z$  分量表示为

$$J_z = - \frac{j \epsilon_0 \omega^2}{\omega^2 - k_z^2 v_0^2} E_z, \quad \epsilon_0 = k_z J_z / \quad (3)$$

式中:  $\omega_b = (N_b e^2 / m_0 \epsilon_0)^{1/2}$  是电子注电子频率;  $v_0$  是电子注  $z$  轴方向的速度。由式(2)和(3)可得:

( ) 电子注区域 ( $|r| < R_b$ )

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + a E_z = b H_z \\ \nabla^2 H_z + c H_z = d E_z \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $a = \frac{k^2 \epsilon_1 - k_z^2}{\epsilon_0} [1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - k_z^2 v_0^2}]$ ;  $d = -j k_z \epsilon_0 \omega^2 [1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - k_z^2 v_0^2}]$ 。

在(4)式中我们忽略了电子注的横向扰动, 而对称模式可以得到

$$\begin{cases} E_z = A_1 J_0(q_1 r) + A_2 J_0(q_2 r) \\ H_z = A_1 H_1 J_0(q_1 r) + A_2 H_2 J_0(q_2 r) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $q_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [(a + c) \pm [(a + c)^2 - 4(ac - bd)]^{1/2}]$ ,  $H_{1,2} = (a - q_{1,2}^2) / b$  (6)

( ) 离子通道区域 ( $R_b < |r| < R_i$ ), 因为是纯的正离子通道, 此区域内无等离子体电子存在, 所以

$$\begin{cases} E_z = A_3 J_0(k_c r) + A_4 N_0(k_c r) \\ H_z = A_5 J_0(k_c r) + A_6 N_0(k_c r) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $k_c^2 = k^2 - k_z^2$ 。

( ) 等离子体区域 ( $R_i < |r| < R_c$ )

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + a E_z = b H_z \\ \nabla^2 H_z + c H_z = d E_z \end{cases} \quad (8)$$

求解式(8)得

$$\begin{cases} E_z = B_1 J_0(p_1 r) + C_1 N_0(p_1 r) + B_2 J_0(p_2 r) + C_2 N_0(p_2 r) \\ H_z = [B_1 J_0(p_1 r) + C_1 N_0(p_1 r)] h_1 + [B_2 J_0(p_2 r) + C_2 N_0(p_2 r)] h_2 \end{cases} \quad (9)$$

$p_{1,2}$  和  $h_{1,2}$  与式(6)很相似, 只需用  $a$  和  $d$  替换其中的  $a$  和  $d$  即可。

( ) 介质区域 ( $R_p < |r| < R_c$ )

$$\begin{cases} E_z = A_{11} J_0(pr) + A_{12} N_0(pr) \\ H_z = A_{13} J_0(pr) + A_{14} N_0(pr) \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $p^2 = k^2 + k_d^2$ ,  $k_d$  为介质的相对介电常数。

在式(5)~式(10)中  $J_0(pr)$  和  $N_0(pr)$  分别是零阶贝塞尔函数和诺伊曼函数, 各区域中的  $E$  和  $H$  见文献[7]。

## 2 色散方程

### 2.1 “热”色散方程

根据文献[1,2,7,8]有电子注时的色散方程为

$$3(k_z^2 - k_{z0}^2) P_E + j \mu_0 \omega^2 (k_z - k_{z0}) P_{HE} = \frac{2}{b} (k^2 - k_z^2) (\omega - k_z v_z)^{-2} P_E \tag{11}$$

其中参数  $P_E = \iint E_z E_{z0}^* ds$ ,  $\iint E_{z0} E_{z0}^* ds$ ,  $P_{HE} = \iint H_z E_{z0}^* ds$ ,  $\iint H_{z0} E_{z0}^* ds$ 。而归一化的波的增长率为  $G_e = \text{Im}(R_e/c)$  (12)

式(11)是一个包含复数  $\omega$  和  $k_z$  的“热”色散方程,而  $\omega$  的虚部即为波的增长率,但要得到  $k_z$  和  $\omega$  色散关系以及波的增长率,需要先求得  $k_{z0}$ ,  $P_{HE}$  和  $P_E$  等,因此得先求解“冷”色散方程。

### 2.2 “冷”色散方程

式(5)~(10)中各区域的场分量须满足以下的边界条件:

- ( ) 在  $|r| = R_b$  处,  $E_z = E_z$ ,  $E_r = E_r$ ,  $H_z = H_z$ ,  $H_r = H_r$ ;
- ( ) 在  $|r| = R_i$  处,  $E_z = E_z$ ,  $E_r = E_r$ ,  $H_z = H_z$ ,  $H_r = H_r$ ;
- ( ) 在  $|r| = R_p$  处,  $E_z = E_z$ ,  $E_r = E_r$ ,  $H_z = H_z$ ,  $H_r = H_r$ ;
- ( ) 在  $|r| = R_c$  处,  $E_z = 0$ ,  $E_r = 0$ 。

利用(5)~(10)式以及上面的边界条件可得到考虑了离子通道的“冷”色散方程为

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,14} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{14,1} & a_{14,2} & \dots & a_{14,14} \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

式中系数见文献[7],系数中包含  $k_{z0}$  和  $\omega$ , 因此(13)式即是  $k_{z0}$  和  $\omega$  的色散关系。

## 3 数值计算

### 3.1 “冷”色散关系

我们利用式(13)进行了计算,得到了无电子注时的色散曲线,和不考虑离子通道的情况进行了对比,如图2和图3。计算中所使用的参数是:  $B_0 = 0.5\text{T}$ , 等离子体的密度为  $n_p = 4 \times 10^{11}\text{cm}^{-3}$ , 等离子体的半径为  $R_p = 15\text{mm}$ , 电子注的半径为  $R_b = 3\text{mm}$ , 介质波导的半径为  $R_c = 18\text{mm}$ , 介质的介电常数为  $\epsilon_d = 10.0$ , 而离子通道的半径因电子注的密度和半径而发生变化,由于本例中所采用的电压和电流分别为  $V_0 = 400\text{kV}$  和  $I_0 = 1\text{kA}$ , 所以对应的离子通道的半径为  $R_i = R_b \sqrt{n_b/n_p} = 1.055 R_b$ 。

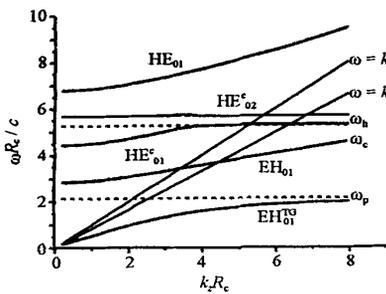


Fig.2 Dispersion curves for ion-channel not being taken into account  
图2 不考虑离子通道时的色散关系

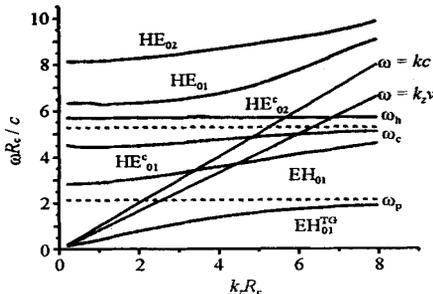


Fig.3 Dispersion curves for ion-channel being taken into account  
图3 考虑离子通道时的色散关系

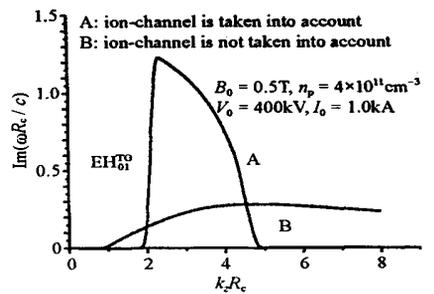


Fig.4 Wave growth rate  $\text{Im}(R_e/c)$  vs wavenumber  $k_z R_c$   
图4 考虑离子通道和不考虑离子通道情况下的波增长率

从图2和图3可以看出,考虑离子通道后各模式的色散曲线略有些下移,但不是特别的明显,尤其是本例的离子通道半径仅为电子注半径的1.055倍。

### 3.2 切伦可夫不稳定性

由式(12)计算出分别考虑离子通道和不考虑离子通道情况下各自的波的增长率,见图4。可看出在两种情况下的波增长率有明显的差异,考虑离子通道的情况下,带宽变小而波增长率却高许多,这相当于等离子体

部分填充的情况, A 曲线是考虑离子通道的情况; 而一般情况下若忽略离子通道, 计算结果如曲线 B, 此时带宽较宽而波的增长率较低。

接着我们分析了通道半径对色散关系和增益的影响, 如图 5。从图中可以看到随着通道半径的增大(本例中是通过增大电子注的电流以增大电子注的密度从而达到增大通道半径的目的:  $R_i = \sqrt{I_0}$ ), 所研究的  $\text{EH}_{01}$  模的频率有所下降。图中按 A, B, C, D 的顺序通道的半径依次增大(从  $R_i = 1.055 R_b$  增大到  $R_i = 2.110 R_b$ ), 而曲线有所下移。从图 6 可看到对于 TG 模( $\text{EH}_{01}$ )而言, 离子通道的增加, 其增益和带宽都有一定的减小。

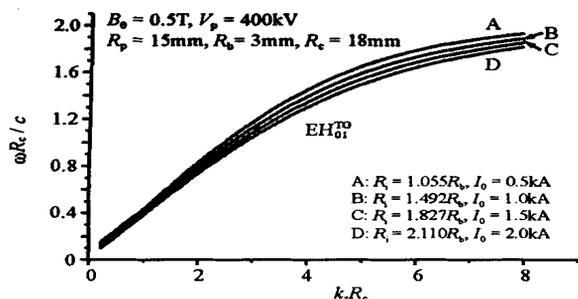


Fig. 5 Dispersion relationship when radius of ion-channel increases

图 5 离子通道半径增大时的色散关系

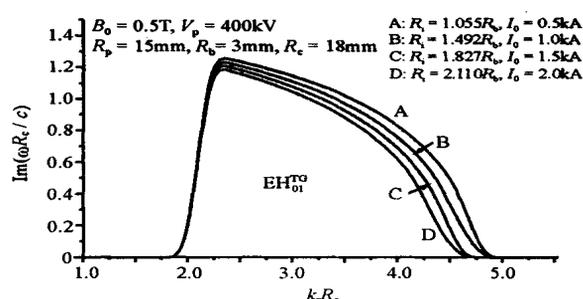


Fig. 6 Growth rate curves when radius of ion-channel increases

图 6 离子通道半径增大时的增益曲线

## 4 结 论

考虑离子通道后与不考虑离子通道情况相比, 注-波相互作用的频率略有下降而增益明显提高。而继续增大离子通道时频率和波增长率都略有减小, 这与实际情况更接近。

## 参考文献:

- [1] Liu S G, Barker R J, Zhu D J, et al. Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics Part I: A fluid model analysis of electron beam-wave interactions[J]. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2000, **28**(6): 2135—2151.
- [2] Liu S G, Barker R J, Yan Y, et al. Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics Part II: Kinetic theory of electron beam-wave interactions[J]. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2000, **28**(6): 2152—2165.
- [3] Whittum D H. Electromagnetic instability of the ion-focused regime[J]. *Phys Fluids*, 1992, **B4**(3).
- [4] Chen K R, Katsouleas T C, Dawson J M. On the amplification of the ion-channel laser[J]. *IEEE Trans on P S*, 1990, **18**:837—841.
- [5] Tang C J, Liu P K, Liu S G. Electromagnetic instability in an ion-channel electron cyclotron maser[J]. *J Phys D*, 1996, **29**:90—94.
- [6] 陈 希, 谢文楷, 刘盛纲. 等离子体加载波纹波导的色散方程[J]. *真空电子技术*, 1999, **2**:1—4. (Chen X, Xie W K, Liu S G. The dispersion equations of a plasma aided corrugated waveguide. *Vacuum Electronics*, 1999, **2**:1—4)
- [7] 李 伟. 磁化等离子体填充相对论微波器件的理论和实验研究[D]. 成都:电子科技大学, 2002. (Li W. Theoretical and experiment study on magnetized plasma-filled relativistic microwave devices. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China, 2002)
- [8] 李 伟, 魏彦玉, 刘盛纲. 有限磁场作用下等离子体圆柱波导中的线性理论[J]. *强激光与粒子束*, 2001, **13**(5):641—645. (Li W, Wei Y Y, Liu S G. Linear theory of plasma cylindrical waveguide in a finite magnetic field. *High Power Laser and Particle Beams*, 2001, **13**(5):641—645)

## Study of Cherenkov instability for a plasma immersed waveguide in a finite magnetic field

LI Wei<sup>1</sup>, XIE Hong-quan<sup>1,2</sup>, WEI Yan-yu<sup>1</sup>, LIU Sheng-gang<sup>1</sup>

(1. Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;

2. College of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621002, China)

**Abstract:** When an electron beam is injected into plasma, an ion-channel might form if the beam density is relatively high. A dispersion equation of a circular cylindrical waveguide with the ion-channel taken into account is given in this paper. The properties of dispersion and wave growth rates have also been discussed for two cases, one is that the ion-channel was taken into account, and the other is that the ion-channel was neglected.

**Key words:** a finite magnetic field; ion-channel; dispersion equation; wave growth rate