

# 有界域轴向流动中棒束流致振动和稳定性研究

蒋莉, 王建立, 沈孟育

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

**摘要:**基于 Chen 有界域静止流体中棒束流致振动数学模型, 给出了棒束稳定分析的数值方法。作为应用研究, 分析了有界域轴向流动中棒束(4根)流致振动的特性及稳定性, 给出了不同条件下轴向及横向的振型。

**关键词:**棒束; 有界轴向流动; 流致振动; 稳定性

**中图分类号:** TL334 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-6931(2000)-01-59-06

反应堆堆芯内存在长期承受高速轴向流动的柱状结构, 对这些柱状结构的流致振动和稳定性进行研究可为堆芯设计提供理论依据, 以减小因流致振动和失稳所引起的结构失稳和破坏。

S. S. Chen 基于细长体假设和二维位势流理论得到了无界域轴向流动中棒束流致振动的数学模型<sup>[1]</sup>及有界域静止流体中棒束流致振动模型<sup>[2]</sup>。本文作者依据 Chen 的模型给出了有界域轴向流动中棒束流致振动过程中附加质量力系数的具体表达式<sup>[3]</sup>。本工作研究棒束稳定性的分析方法, 并对有界域轴向流动中棒束(4根)流致振动的特性及稳定性进行研究, 比较不同条件下的轴向及横向振型。

## 1 数学模型

无粘流体对棒在  $x$  和  $y$  方向的作用力  $g_k$  和  $h_k$  可表达为棒各点的加速度的形式。S. S. Chen<sup>[1]</sup>在分析棒的受力时考虑了流体沿轴向的压力变化引起的横向作用力、流体的粘性阻尼力、流体的摩擦阻力和形状阻力。由棒的受力平衡分析可得到棒的流致振动方程。将  $x$  和  $y$  方向的方程表达为统一形式, 则有:

$$\begin{aligned} E_i I_i \frac{\partial^4 u_i}{\partial z^4} + \mu_i I_i \frac{\partial^5 u_i}{\partial t \partial z^4} + \sum_{j=1}^{2N} i_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 u_j - \\ [T_i(l) - (m_i g - R_i W^2 \bar{C}_i)(l - z) + p A_i] \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \left[ m_i g + \frac{\partial p}{\partial z} A_i \right] \frac{\partial u_i}{\partial z} + \\ R_i W \bar{C}_i \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + W \frac{\partial u_i}{\partial z} \right] + C_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i \quad i = 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期: 1999-01-12; 修回日期: 1999-05-10

作者简介: 蒋莉(1965—), 女, 安徽芜湖人, 助理研究员, 博士, 计算流体专业

$i = 2k$  表示  $x$  方向,  $i = 2k - 1$  表示  $y$  方向,  $k = 1, 2, \dots, N$ 。式(1)中:  $W$  为轴向流速;  $E$  为棒的弹性模量;  $I$  为惯性矩;  $m$  为棒单位长度质量;  $\mu$  为结构内部阻尼系数;  $T_i(l)$  为棒下游端所受的拉力;  $l$  为棒的长度;  $C_i$  为流体阻尼系数;  $\bar{C}_i$  为流体阻力系数;  $p$  为流体压力, 通常表达为  $p = p_0 - p_1 z$ ,  $p_1 = -\frac{\partial p}{\partial z}$ ;  $f_i$  为其他激振力;  $i_j$  为流体附加质量, 可由附加质量力系数<sup>[3]</sup>表示:  $i = 2k - 1, j = 2l - 1, i_j = R_k^2 R_{kl}$ ;  $i = 2k - 1, j = 2l, i_j = R_k^2 R_{kl}$ ;  $i = 2k, j = 2l - 1, i_j = R_k^2 R_{kl}$ ;  $i = 2k, j = 2l, i_j = R_k^2 R_{kl}$ ;  $R_k$  为棒的半径。

棒的边界条件可归纳为 3 种情形:

$$\text{简支端 + 简支端} \quad z = 0, l, \quad u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \quad (2a)$$

$$\text{固支端 + 固支端} \quad z = 0, l, \quad u_i = \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0 \quad (2b)$$

$$\text{固支端 + 自由端} \quad z = 0, \quad u_i = \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0; \quad z = l, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial z^3} = 0 \quad (2c)$$

## 2 数值方法

棒束流致振动方程式(1)的求解采用伽辽金方法。设  $q_n(z)$  为真空中满足边界条件式(2)的梁的  $n$  阶基本振型函数, 且满足:

$$\frac{1}{l} \int_0^l m(z) q_n(z) dz = m_n \quad (3)$$

设:

$$u_i(z, t) = \sum_{n=1}^{2N} q_{in}(t) q_n(z) \quad (4)$$

将式(4)代入式(1), 并对方程两端积分  $\frac{1}{l} \int_0^l m(z) dz$ , 应用式(3)得:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_{im} + \sum_{j=1}^{2N} i_j \ddot{q}_{jm} + [C_i + R_i W \bar{C}_i + (\mu_i / E_i) m_i] \dot{q}_{im} + 2W \sum_{j=1}^{2N} i_j \sum_{n=1}^{2N} c_{mn} \dot{q}_{jn} + \\ m_i \sum_{j=1}^{2N} i_j \sum_{n=1}^{2N} d_{mn} q_{jn} - [T_i(l) - (m_i g - R_i W^2 \bar{C}_i) l + p_0 A_i] \sum_{n=1}^{2N} d_{mn} q_{in} - \\ (m_i g - p_1 A_i) \sum_{n=1}^{2N} e_{mn} q_{in} - (m_i g - R_i W^2 \bar{C}_i - p_1 A_i) \sum_{n=1}^{2N} e_{mn} q_{in} + \\ R_i W^2 \bar{C}_i \sum_{n=1}^{2N} c_{mn} q_{in} = f_{im} \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $c_{mn} = \frac{1}{l} \int_0^l n_m dz$ ;  $d_{mn} = \frac{1}{l} \int_0^l n_m dz$ ;  $e_{mn} = \frac{1}{l} \int_0^l n_m z dz$ ;  $f_{im} = \frac{1}{l} \int_0^l f_i dz$ ;  $i_{im}$  为棒的  $m$  阶固有频率。

将式(5)写为矩阵形式得:

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{G\} \quad (6)$$

$\{Q\} = \{q_{1m}, q_{2m}, \dots, q_{2Nm}\}^T_{m=1,2,\dots,m_{\max}}$ ,  $m_{\max}$  为  $m, n$  的最大值, 矩阵的阶数为  $2N \times m_{\max}$ 。

$$\text{令: } \{ \} = \begin{Bmatrix} Q \\ \dot{Q} \\ Q \end{Bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1} & KM^{-1} \\ C \end{bmatrix} \quad \{ \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} G \end{Bmatrix}$$

由式(6)得:

$$\dot{\{ \}} + [U]\{ \} = \{ \} \tag{7}$$

令:

$$\{ \} = \{ X \} e^{-t} \tag{8}$$

得到如下特征值问题:

$$[-I + U]\{ X \} = 0 \tag{9a}$$

其伴随形式为:

$$[-I + U^T]\{ Y \} = 0 \tag{9b}$$

$U^T$  为  $U$  的转置。求解上述特征值问题,得到特征值  $\lambda_i$ 、特征向量  $\{ X_i \}$ 、 $\{ Y_i \}$ ,经正则化使其满足:

$$\{ Y_j \}^T \{ X_i \} = \delta_{ij} \quad \{ Y_j \}^T [U] \{ X_i \} = \lambda_i \delta_{ij} \tag{10}$$

设  $[X]$ 、 $[Y]$  为由特征向量构成的矩阵,且令  $\{ \} = [X]\{ h \}$ ,代入式(7)并作变换得:

$$[Y]^T [X] \dot{\{ h \}} + [Y]^T [U] [X] \{ h \} = [Y]^T \{ \} \tag{11}$$

由式(10)可得如下下一组相互独立的常微分方程组:

$$\dot{\{ h \}} + [ \lambda ] \{ h \} = [Y]^T \{ \} \tag{12}$$

式中:  $\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$  (不对  $i$  求和)。

给定初始条件,对式(12)积分可得到系统对激振和初始条件的响应。

### 3 算例和讨论

应用上述关于棒束轴向流致振动的数学模型和分析方法,计算了4根棒棒束的流致振动。

图1为4根棒棒束示意图。轴向流动方向与重力方向相同,各棒参数亦相同。

计算中采用的参数取自文献[5]所采用的实验参数(表1)。

棒束的流致振动中存在发散失稳和颤振失稳。令  $f_i = \lambda_i / 2$ ,  $\lambda_i$  为系统特征值,其虚部表示振动的频率。流动速度增大到一定值时,首先出现发散失稳,此时,特征值的实部小于0,虚部为0;随着流速的进一步增加,虚部将不为0,实部小于0,此时为颤振失稳。

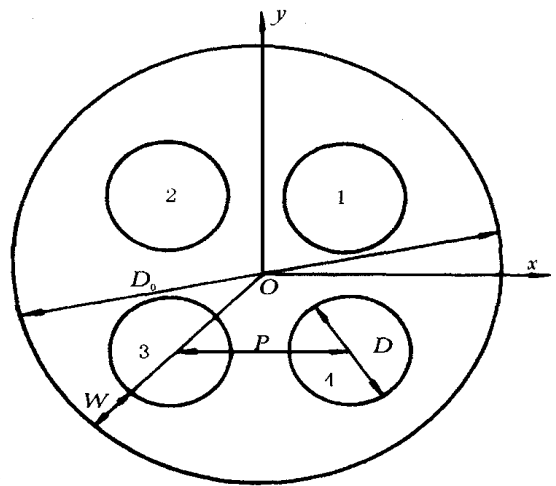


图1 棒束示意图

Fig. 1 Diagram of rod bundle

表 1 计算参数

Table 1 System parameters used in calculation

$D/cm$	$P/D$	$D_0/cm$	$l/cm$	$m/kg \cdot m^{-1}$	$\rho/g \cdot cm^{-3}$	$p_0/Pa$
2.52	1.5	20.48	52.19	0.569 2	1.0	$p_1 l$
$E \cdot I/N \cdot m^2$	$E/Pa$	$\mu$	$C/N \cdot s \cdot m^{-2}$	$\bar{C}$	$T(l)/N$	$p_1^{(1)}/Pa \cdot m^{-1}$
0.037 03	$1.86 \times 10^6$	0.0	0.0	0.012 57	0.0	

注:1) 压力梯度  $p_1$  的确定采用通道中的关系式  $p_1 = -\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2} W^2/D_h C_f + g$ ,  $C_f = \max(0.32 Re^{-0.25}, 64 Re^{-1})$ ,  $Re = WD/\nu$ ; 当重力与流动方向一致时,  $g$  取负值, 反之取正值

图 2 示出了两端简支条件下最低两组复角频率的实部和虚部随流速的变化。虚部为角频率, 图中横向坐标为无量纲化轴向流速。由图可见: 流速增加, 虚部减小, 当流速增加到一定值时, 最低阶模态的复频率的虚部首先变为 0 (图 2(b)), 实部开始出现负值, 且发生分叉 (图 2(a)), 这时为发散失稳; 流速继续增加, 该模态的虚部保持为 0, 实部先远离 0 点, 尔后又向 0 点靠近, 这表示该模态开始时变得更不稳定, 接着又趋向于稳定。当流速增大到一定值时, 第一阶模态的虚部不再为 0, 并且随流速增加继续增大, 而实部则又开始远离 0 点, 此时为颤振失稳。其他各阶模态则依次经历着类似的过程, 不同阶模态具有不同的临界速度。由图还可以看出: 流速为 0 时, 可以看到清晰的频率带, 各组模态的频率在某一频率附近变化; 随着流速的增加, 频率带相互交叉, 不再清晰可辨, 这反映出流体流动使各模态间的混合加强。

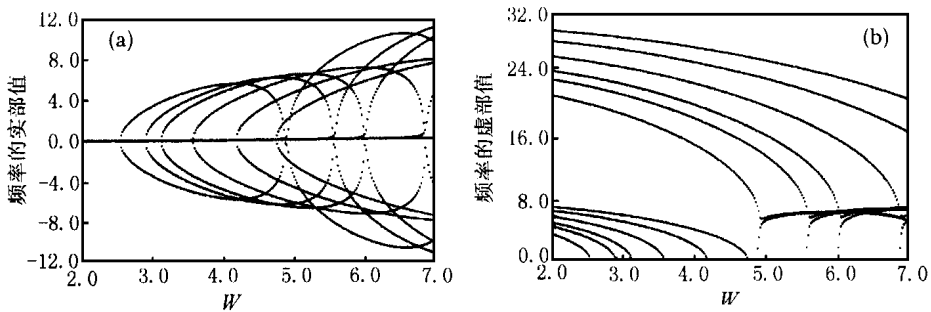


图 2 两端简支棒束角频率随速度的变化

Fig. 2 Variations of angular frequency of pinned-pinned rod bundle with axial flow velocity

(a) ——复角频率实部; (b) ——复角频率虚部

图 3、4 给出了  $P/D = 1.5$  时两端简支棒束分别在发散失稳和颤振失稳临界流速下最低一组频率所对应的轴向和横向振型。由图可以看出: 在发散失稳临界流速时 (图 3), 棒束第一组模态 (对应于流速为 0 时最低的 8 个模态) 的最低一阶复频率  $f_1$  的实部变为负值, 虚部变为 0, 并且出现了分叉 (以  $f_{1-}$  和  $f_{1+}$  表示)。轴向出现了第二阶梁振型, 这表明随着流速的增加, 轴向模态的混合加强, 高阶的梁模态在低阶模态中出现。当流速达到颤振失稳临界流速时 (图 4), 最低一阶复频率  $f_1$  实部仍为负值, 而虚部不再为 0, 且有更多的模态发生了分叉。从振型上来看, 流速增加使这一现象更为突出, 一部分轴向振型的最大值明显偏离中点。横向振型中不再出现如图 3 中与  $f_3$  和  $f_5$  对应的绕转振型, 其他模态基本保持较类似的振型。

## 4 结论

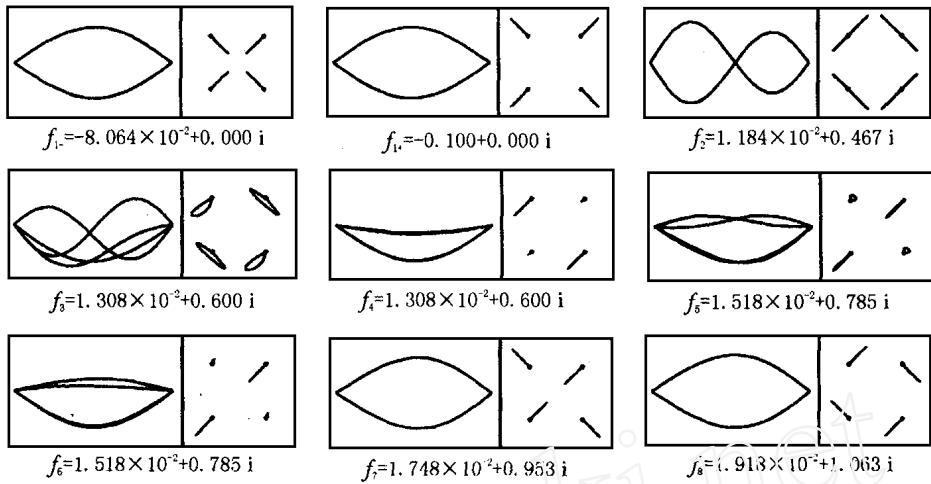


图3 发散失稳临界流速时两端简支棒束轴向和横向振型图 ( $W_{cb} = 2.56$ )

Fig. 3 Axial and cross sectional mode shapes of pinned-pinned rod bundle at buckling critical flow velocity ( $W_{cb} = 2.56$ )

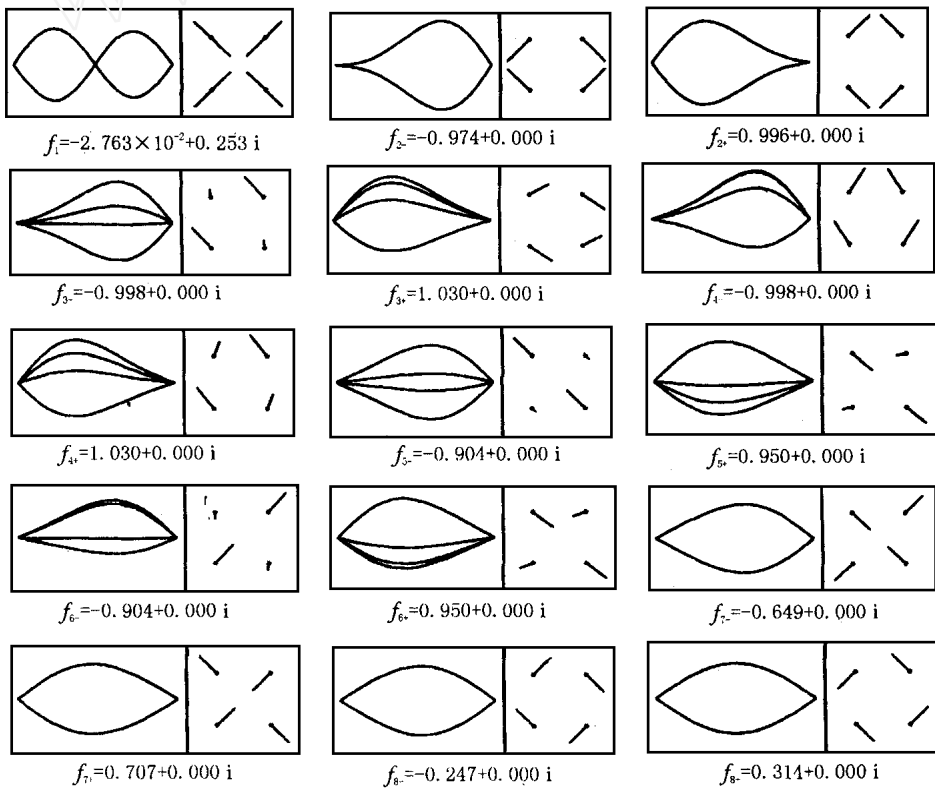


图4 颤振失稳临界流速时两端简支棒束轴向和横向振型图 ( $W_{cf} = 4.88$ )

Fig. 4 Axial and cross sectional mode shapes of pinned-pinned rod bundle at flutter critical flow velocity ( $W_{cf} = 4.88$ )

应用本工作所建立的有界域轴向流动中棒束稳定性分析方法,对有外围约束的4根棒棒束的流致振动和稳定性问题进行了研究,计算出两端简支约束下发散失稳和颤振失稳的临界速度。由分析可知:流体的存在使各棒的运动相互耦合,出现了不同的横向振型;轴向振型不再是单一的某阶梁振型,轴向流动使得轴向模态的混合加强,流速增大,混合强烈;各阶振动频率的分布构成不同的频率带,各频率带内的各阶频率仅在某一值附近变化。

#### 参考文献:

- [1] Chen SS. Vibration of Nuclear Fuel Bundles[J]. Nuclear Engineering and Design, 1975, 35:399~422.
- [2] Chung H, Chen SS. Vibration of a Group of Circular Cylinders in Confined Fluid[J]. Journal of Applied Mechanics, 1977, 9:213~217.
- [3] 蒋莉,王建立,孙成海,等. 有界域轴向流动中棒束流致振动的附加质量力模型[J]. 原子能科学技术, 1999, 33(5):431~435.
- [4] Lighthill MJ. Note on the Swimming of Slender Fish[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1960, 9:305~317.
- [5] Paidoussis MP. The Dynamics of Clusters of Flexible Cylinders in Axial Flow: Theory and Experiments[J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 65(3):391~417.

## Study on the Stability of Rod Bundle Vibrating in Bounded Axial Flow

JIANGLi, WANGJian-li, SHEN Meng-yu

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The mathematic models and the stability analysis method are established for analyzing flow-induced vibration of rod bundles in bounded axial flow. As applications, the vibration characteristics and stability of a 4-rod system are studied. With the flow velocity incremental, the system experiences divergence instability and flutter instability. The existence of the axial flow induces the coupling of the movement of the rods. This coupling makes the very complicated vibration modes.

**Key words:** rod bundle; bounded axial flow; flow-induced vibration; stability